

ANALISIS BIFURKASI MODEL LESLIE GOWER TIPE HOLLING II DENGAN WAKTU TUNDA

N. F. SAHAMONY¹, P. SIANTURI², JAHARUDDIN³

Abstrak

Pada artikel ini dijelaskan model persamaan diferensial nonlinear mangsa pemangsa Leslie Gower dengan waktu tunda pada mangsa dan pemangsa. Berdasarkan hasil analisis diperoleh empat titik tetap, satu di antaranya bersifat stabil dan tiga lainnya tidak stabil pada saat nilai $\tau = 0$ (tanpa waktu tunda). Waktu tunda kritis (τ_0) adalah nilai batas yang menyebabkan perubahan kestabilan. Simulasi numerik dibagi menjadi tiga kasus, yakni ketika nilai $\tau = 0$ (tanpa waktu tunda) bersifat stabil, $\tau < \tau_0$ bersifat stabil dan saat nilai $\tau > \tau_0$ bersifat tidak stabil. Dari hasil simulasi saat nilai $\tau > \tau_0$ bersifat tidak stabil hal ini disebabkan karena terjadi bifurkasi pada model tersebut, titik tetap yang awalnya bersifat stabil menjadi tidak stabil.

Kata Kunci: Leslie-Gower, waktu tunda, bifurkasi Hopf.

1. PENDAHULUAN

Pada bidang ekologi, model matematika mangsa pemangsa banyak digunakan dalam penelitian, karena model mangsa pemangsa sangatlah luas dan penting. Pada artikel ini dibahas mengenai model mangsa pemangsa Leslie Gower. Model Leslie Gower mengasumsikan bahwa populasi pemangsa mempunyai hubungan timbal balik dengan kelangkaan populasi mangsa [1].

Waktu tunda pada artikel ini menjelaskan saat dimana waktu yang dibutuhkan pemangsa untuk mencari mangsa, karena untuk memperoleh mangsa membutuhkan waktu sehingga pada artikel ini mempertimbangkan waktu tunda. Waktu tunda juga dalam bidang penelitian sangat menarik karena waktu tunda dalam model matematika dapat menggambarkan keadaan yang sebenarnya.

Beberapa penulis telah menganalisis model matematika untuk mempelajari model mangsa pemangsa. Mereka telah mempelajari model mangsa pemangsa Lotka-Volterra dengan waktu tunda [2, 10]. Sebuah model matematika telah mengusulkan untuk mengetahui adanya bifurkasi pada model mangsa pemangsa. Pada tahun 2009, Yuan *et al.* [3] telah menganalisis bifurkasi model mangsa pemangsa Leslie Gower. Selain itu, Beretta dan Kuang telah meneliti mengenai model mangsa pemangsa menggunakan waktu tunda pada mangsa [4]. Banyak

¹Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: nurfitriyanisahamony@gmail.com

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: jaharipb@yahoo.com

³Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: psianturi15@gmail.com

peneliti telah menganalisis waktu tunda pada mangsa dan pemangsa [5, 6, 7, 8]. Zhang *et al.* telah menyajikan pengaruh waktu tunda pada mangsa dan pemangsa menggunakan waktu tuda serta fungsi respons Holling tipe I [9]. Pada tahun 2006, Nindjin *et al.* [1] juga telah mempelajari model mangsa pemangsa Leslie Gower menggunakan waktu tunda pada pemangsa dan menggunakan fungsi respons Holling II. Namun, Nindjin *et al.* [1] tidak menggunakan waktu tunda pada mangsa.

Oleh karena itu, dalam makalah ini model matematika nonlinear dianalisis untuk menyelidiki keadaan sistem mangsa Model ini mengacu Zhang *et al.* [9] dan Nindjin *et al.* [1]. Selanjutnya, model ini juga mempertimbangkan waktu tunda pada mangsa dan pemangsa. Tujuan dari makalah ini ialah untuk mempelajari keadaan sistem mangsa pemangsa. Kami mengamati dinamika model dengan variations parameter pada simulasi numerik. Makalah ini disusun sebagai berikut: Bagian 2 dikhususkan untuk deskripsi singkat dari model matematika yang akan dianalisis. Bagian 3 menjelaskan ekuilibrium dari model, dan bagian 4 dan stabilitas analisis untuk setiap titik tetap, masing-masing dan menunjukkan adanya bifurkasi Hopf. Dalam Bagian 5, beberapa simulasi numerik dilakukan untuk mengamati dinamika model. Bagian terakhir adalah kesimpulan.

2. MODEL MANGSA PEMANGSA LESLIE GOWER

Model mangsa pemangsa mempunyai beberapa asumsi, yaitu:

- Laju pertumbuhan populasi mangsa dipengaruhi oleh tingkat pertumbuhan populasi mangsa, berkurang karena persaingan antar spesies dan interaksi mangsa dan pemangsa.
- Laju pertumbuhan populasi pemangsa dipengaruhi oleh tingkat pertumbuhan populasi mangsa, berkurang karena persaingan antar spesies dan interaksi mangsa dan pemangsa.

Dari beberapa asumsi model mangsa pemangsa Leslie Gower tipe Holling II di atas maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \left(r_1 - bx(t) - \frac{c_1 y(t - \tau)}{x(t) + K_1} \right) x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \left(r_2 - \frac{c_2 y(t - \tau)}{x(t - \tau) + K_2} \right) y(t),\end{aligned}\tag{1}$$

dengan nilai:

$$x(0) \geq 0, y(0) \geq 0.$$

Di dalam persamaan (1), x adalah banyaknya populasi mangsa, y adalah banyaknya populasi pemangsa, r_1 adalah pertumbuhan mangsa, b adalah tingkat penurunan kompetisi, c_1 adalah tingkat penurunan y karena x , K_1 adalah daya dukung mangsa, r_2 adalah pertumbuhan pemangsa, c_2 adalah tingkat penurunan y karena x dan K_2 adalah daya dukung pemangsa.

3. ANALISIS TITIK TETAP

Titik tetap dari sistem (1) diperoleh dengan menentukan $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Berdasarkan hasil analisis diperoleh empat titik tetap taknegatif, yaitu $E_0(0, 0)$, $E_1\left(\frac{r_1}{b}, 0\right)$, $E_2\left(0, \frac{r_2 K_2}{c_2}\right)$ and $E_3(x^*, y^*)$ dimana x dan y sebagai berikut:

$$x^* = \frac{-(r_2 c_1 - c_2 r_1 + b c_2 k_1) \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{2 b c_2}, y^*_{\pm} = \frac{r_2 x(t) + r_2 K_2}{c_2}$$

dimana

$$\Delta = (r_2 c_1 - c_2 r_1 + b c_2 k_1)^2 - 4 c_2 b (c_1 r_2 k_2 - c_2 r_1 k_1).$$

Untuk menjamin bahwa titik tetap E_3 itu ada, maka diperlukan syarat bahwa nilai

$$\frac{r_2 K_2}{c_2} < \frac{r_1 K_1}{c_1}.$$

4. ANALISIS KESTABILAN DAN BIFURKASI HOPF

Pelinearan yang dilakukan pada sistem (1) akan memberikan matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} r_1 - 2bx^* - \frac{c_1 y^*}{x^* + K_1} + \frac{c_1 x^* y^*}{(x^* + K_1)^2} + \frac{c_1 x^* y^* (t - \tau)}{(x^* + K_1)^2} & e^{-\lambda \tau} \frac{c_1 x^*}{x^* + k_1} \\ \frac{c_2 y^*}{(x^* (t - \tau) + k_2)^2} e^{-\lambda \tau} + \frac{c_2 y^* y^* (t - \tau)}{(x^* (t - \tau) + k_2)^2} e^{-\lambda \tau} & r_2 - \frac{c_2 y(t - \tau)}{x(t - \tau) + K_2} + \frac{c_2 y(t)}{x(t - \tau) + K_2} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \quad (2).$$

Pelinearan pada titik tetap $E_0(0, 0)$ untuk matriks Jacobi J_{E_i} di atas menghasilkan matriks Jacobi berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda - r_1 r_2 = 0.$$

Dari persamaan karekteristik diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r_1$ dan $\lambda_2 = r_2$. Karena parameter diasumsikan tidak negatif, maka $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Karena kedua nilai eigen positif, maka kestabilan titik tetap $E_0(0,0)$ bersifat tak stabil.

Pelinearan pada titik tetap $E_1\left(\frac{r_1}{b}, 0\right)$ untuk matriks Jacobi J_{E_i} di atas menghasilkan matriks Jacobi berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -r_1 & \frac{c_1 r_1}{r_1 + K_1 b} \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 + (r_1 - r_2)\lambda - r_1 r_2 = 0.$$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -r_1$ dan $\lambda_2 = r_2$. Karena parameter diasumsikan tidak negatif, maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Nilai eigen pertama bernilai negatif dan nilai eigen kedua bernilai positif maka kestabilan titik tetap $E_1 \left(\frac{r_1}{b}, 0 \right)$ bersifat Sadel.

Pelinearan pada titik tetap $E_2 \left(0, \frac{r_2 k_2}{c_2} \right)$ untuk matriks Jacobi J_{E_i} di atas menghasilkan matriks Jacobi berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{c_1 r_2 K_2}{c_2 K_1} & 0 \\ \frac{r_2^2 K_2}{c_2} & r_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - J) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 - \left(r_1 - \frac{c_1 r_2 K_2}{c_2 K_1} + r_2 \right) \lambda - \left(r_1 - \frac{c_1 r_2 K_2}{c_2 K_1} \right) r_2 = 0.$$

Dari persamaan karakteristik diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r_1 - \frac{c_1 r_2 K_2}{c_2 K_1}$ dan $\lambda_2 = r_2$. Karena nilai parameter diasumsikan tidak negatif, maka titik tetap E_2 tidak stabil jika memenuhi $r_1 > \frac{c_1 r_2 K_2}{c_2 K_1}$ dan $r_2 > 0$.

Pelinearan pada titik tetap $E_3 (x^*, y^*)$ untuk matriks Jacobi J_{E_i} di atas menghasilkan matriks Jacobi berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - 2bx^* - \frac{c_1 y^*}{x^* + K_1} + \frac{c_1 x^* y^*}{(x^* + K_1)^2} + \frac{c_1 x^* y^* (t - \tau)}{(x^* + K_1)^2} & e^{-\lambda \tau} \frac{c_1 x^*}{x^* + k_1} \\ \frac{c_2 y^*}{(x^* (t - \tau) + k_2)^2} e^{-\lambda \tau} + \frac{c_2 y^* y^* (t - \tau)}{(x^* (t - \tau) + k_2)^2} e^{-\lambda \tau} & r_2 - \frac{c_2 y (t - \tau)}{x(t - \tau) + K_2} + \frac{c_2 y(t)}{x(t - \tau) + K_2} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan di atas didapat persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^2 + a\lambda + be^{-\lambda \tau} \lambda + ce^{-\lambda \tau} + d = 0 \quad (3)$$

dimana

$$a = 2bx - r_1 - r_2 + \frac{c_2 y}{x + K_2} + c_1 \left(\frac{y}{x + K_1} - \frac{xy}{x + K_1} - \frac{xy}{(x + K_1)^2} \right),$$

$$b = \frac{c_2 y}{x+k_2},$$

$$c = \frac{c_2 y}{x+k_2} \left((2bx - r_1 + c_1 \left(\frac{y}{x+k_1} - \frac{xy}{x+k_1} - \frac{xy}{(x+k_1)^2} \right)) \right) \text{ dan}$$

$$d = \left(r_2 - \frac{y}{x+k_2} \right) \left(r_1 - 2bx - c_1 \left(\frac{y}{x+k_1} - \frac{xy}{x+k_1} - \frac{xy}{(x+k_1)^2} \right) \right).$$

Untuk mengetahui kestabilan titik tetap $E_3(x^*, y^*)$ digunakan persamaan (3) untuk $\tau = 0$. Menurut aturan Routh Hurwitz, nilai eigen dari persamaan karakteristik (3) bernilai real negatif jika dan hanya jika persamaan (3) memenuhi kondisi $(a + b) > 0$ dan $(c + d) > 0$, sehingga titik tetapnya bersifat stabil asimtotik.

Selanjutnya akan di analisis untuk titik tetap E_3 mengalami bifurkasi Hopf. Untuk nilai $\tau > 0$, jika $\lambda = i\omega$ substitusikan ke persamaan (3), dengan memisahkan bagian real dan bagian imajiner didapat

$$\begin{aligned} -\omega^2 + b\omega \sin(\omega\tau) + c \cos(\omega\tau) + d &= 0 \\ a\omega + b\omega \cos(\omega\tau) - c \sin(\omega\tau) &= 0 \end{aligned}$$

didapat

$$\cos(\omega\tau) = \frac{(c-ab)\omega^2 - cd}{(c^2 + b^2\omega^2)}, \sin(\omega\tau) = \frac{b\omega^3 + ca\omega - b\omega d}{c^2 + b^2\omega^2}.$$

Diperoleh nilai tunda kritis adalah sebagai berikut:

$$\tau_k^\pm = \frac{1}{\omega_\pm} \tan^{-1} \left(\frac{b\omega_\pm^2 + (ac - bd)\omega_\pm}{(c - ab)\omega_\pm^2 - cd} \right) + \frac{k\pi}{\omega_\pm}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Untuk menunjukkan bahwa pada sistem (1) terjadi bifurkasi Hopf yaitu dengan menunjukkan kondisi transversalitas. Kondisi transversalitas adalah suatu kondisi yang menyebabkan perubahan kestabilan titik tetap dengan waktu tunda. Jika $\left(\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_k^+} > 0$ dipenuhi maka kondisi transversalitas dari sistem(1) terpenuhi sehingga terjadi bifurkasi Hopf pada titik tetap E_3 . Turunkan persamaan (1) terhadap τ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + a}{\lambda e^{-\lambda\tau}(b\lambda + c)} + \frac{b}{\lambda(b\lambda + c)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + a}{\lambda(-\lambda^2 - a\lambda - d)} + \frac{b}{\lambda(b\lambda + c)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ \text{sign} \left(\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \right)_{\lambda=i\omega_+} &= \text{sign}(a^2 + 2\omega_+^2 - 2d - b^2) \end{aligned}$$

$$= \text{sign} \left(\sqrt{(2d - a^2 + b^2)^2 - 4(d^2 - c^2)} \right)$$

sehingga terpenuhi bahwa

$$\left(\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_k^+} > 0.$$

Karena memenuhi kondisi transversalitas, maka pada persamaan (1) terjadi bifurkasi Hopf.

5. SIMULASI NUMERIK

Pada bagian ini akan dibahas mengenai simulasi numerik dengan memasukkan nilai - nilai parameter kedalam persamaan (1). $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $K_1 = 10$, $K_2 = 10$, $x(0) = 10$, $y(0) = 5$.

Pada simulasi ini akan disediakan tiga kasus yang berbeda, yaitu kasus saat nilai $\tau = 0$, $\tau < \tau_0$ dan $\tau > \tau_0$. Nilai tunda kritis (τ_0) yang digunakan yaitu 1,080. Tiga kasus yang berbeda ini untuk menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf.

Kasus 1

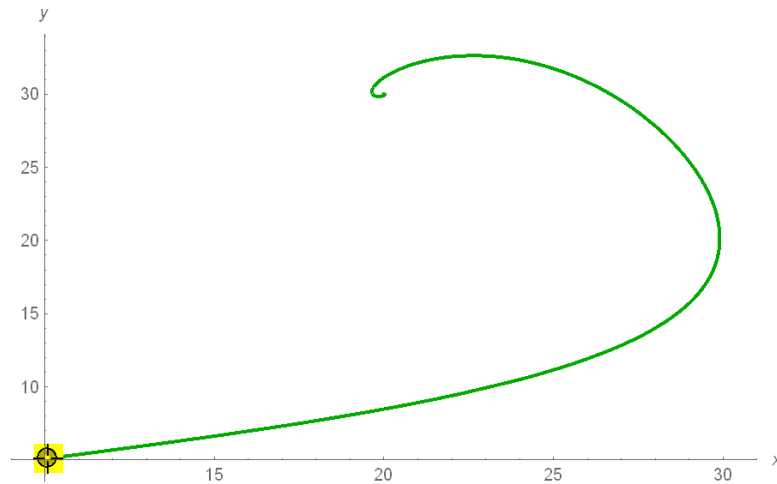
Dinamika Populasi Mangsa pemangsa ($\tau = 0$)

Berdasarkan nilai parameter $r_1, r_2, c_1, c_2, b, K_1$ dan K_2 diperoleh titik tetap, nilai eigen dan jenis kestabilan seperti diberikan dalam Tabel 1.

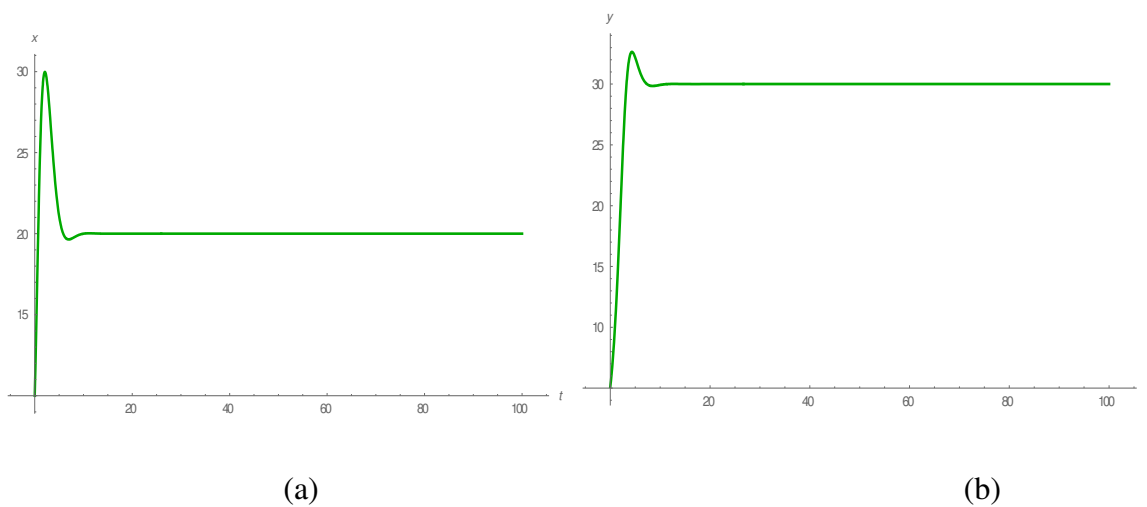
Tabel 1
Titik tetap, nilai eigen dan kestabilan untuk simulasi

Variabel	E_0	E_1	E_2	E_3
x	0	40	0	20
y	0	0	10	30
λ_1	2	-1	1	-2,667+2,981i
λ_2	1	2	1	-2,667-2,981i
Jenis Kestabilan	Tidak Stabil	Tidak Stabil	Tidak Stabil	Stabil

Pada kasus ini diperoleh empat titik tetap, terdapat pada Tabel 1. Gambar 1 menunjukkan *starting point* atau nilai awal dengan simbol bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap.



Gambar 1 Dinamika populasi mangsa (x) dengan populasi pemangsa (y)



Gambar 2 Bidang Solusi mangsa x (a) dan Bidang Solusi pemangsa y (b)

Gambar 2 memperlihatkan bahwa di awal populasi mangsa mengalami kenaikan yang drastis dan setelah itu pertumbuhan mangsa mengalami kestabilan pada titik $x = 20$ serta bidang solusi pemangsa memperlihatkan kenaikan lalu penurunan dan akhirnya mengalami kestabilan pada titik $y = 30$.

Kasus 2

Dinamika Populasi Mangsa pemangsa pada ($\tau < \tau_0$)

Pada kasus ini diperoleh empat titik tetap, terdapat pada Tabel 1. Gambar 3 menunjukkan *starting point* atau nilai awal, bahwa kurva bergerak spiral mendekati titik tetap E_3 . Parameter yang digunakan sama dengan kasus 1. Pada kasus ini digunakan Teorema 2 untuk memilih nilai waktu tunda yang digunakan.

Teorema 2

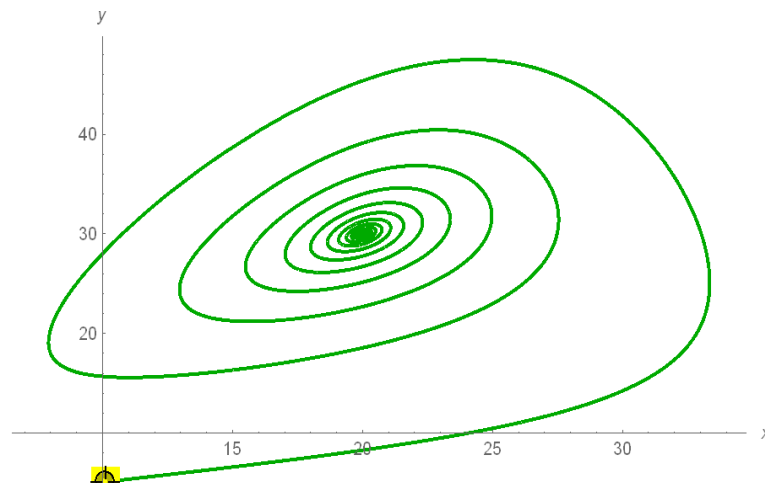
Misalkan m bilangan bulat positif. Jika $\tau \in [0, \tau_0^+) \cup (\tau_0^+, \tau_0^-) \cup \dots \cup (\tau_{m-1}^-, \tau_{m-1}^+)$ titik tetap bersifat stabil dan $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-) \cup (\tau_1^+, \tau_1^-) \cup \dots \cup (\tau_{m-1}^+, \tau_{m-1}^-)$ titik tetap bersifat tidak stabil, maka persamaan (1) akan terjadi bifurkasi Hopf terhadap titik tetap untuk $\tau = \tau_k^\pm, k = 0, 1, 2, \dots$ [10].

Untuk memenuhi Teorema Kar, maka dilakukan pemilihan nilai waktu tunda sebagai berikut:

Tabel 2
Pemilihan nilai waktu tunda

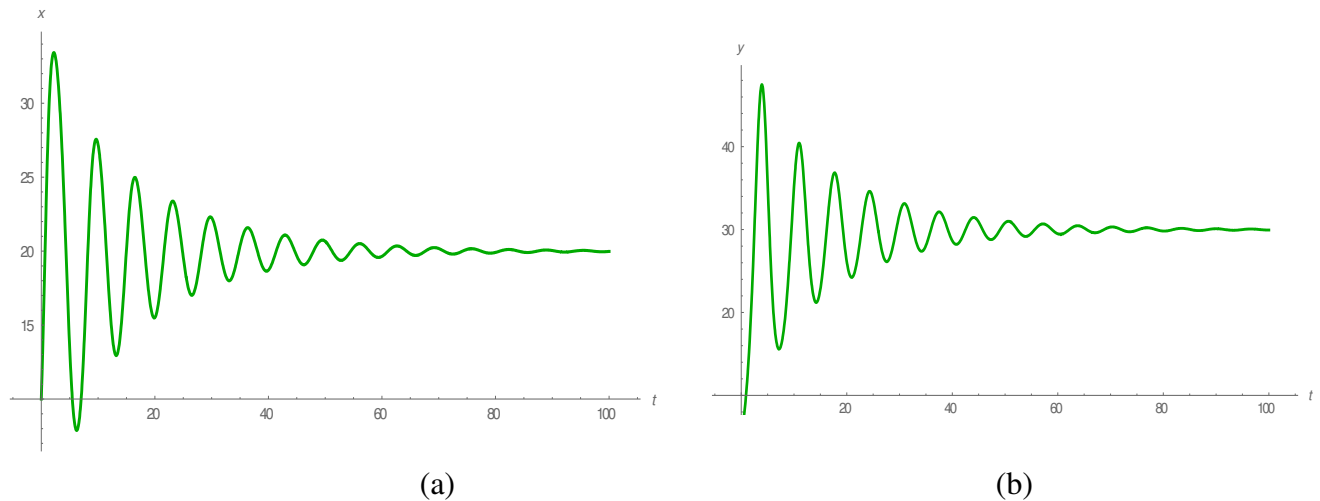
K	τ_k^+	τ_k^-
0	1,0800	2,8320
1	1,0834	2,8354
2	1,0869	2,8389
3	1,0903	2,8423
4	1,0938	2,8458
5	1,0972	2,8492

Menurut Teorema 2, titik tetap $E_3 = (20, 30)$ bersifat stabil ketika $\tau \in (0, 1,800) \cup (2,8320, 1,0834) \cup (2,8354, 1,0869)$. Selanjutnya titik tetap $\tau \in (1,0800, 2,8320)$ sehingga titik tetap $E_3 = (20, 30)$ terjadi bifurkasi Hopf. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh τ_0 . Nilai τ_0 inilah yang menyebabkan terjadinya bifurkasi untuk membuktikan hal itu maka dipilih nilai $\tau < \tau_0$, dalam kasus ini nilai τ yang digunakan yaitu 0.8. Berdasarkan simulasi dapat dilihat pada Gambar 3



Gambar 3 Dinamika populasi mangsa (x) dengan populasi pemangsa (y)

Dapat dilihat berdasarkan Gambar 3 yaitu ilustrasi bidang fase disekitar titik tetapnya menunjukkan bahwa keadaan sistem saat nilai $\tau < \tau_0$ stabil. Agar dapat lebih jelas disajikan Gambar 4 yang menggambarkan bidang solusi mangsa dan pemangsa saat nilai $\tau < \tau_0$.



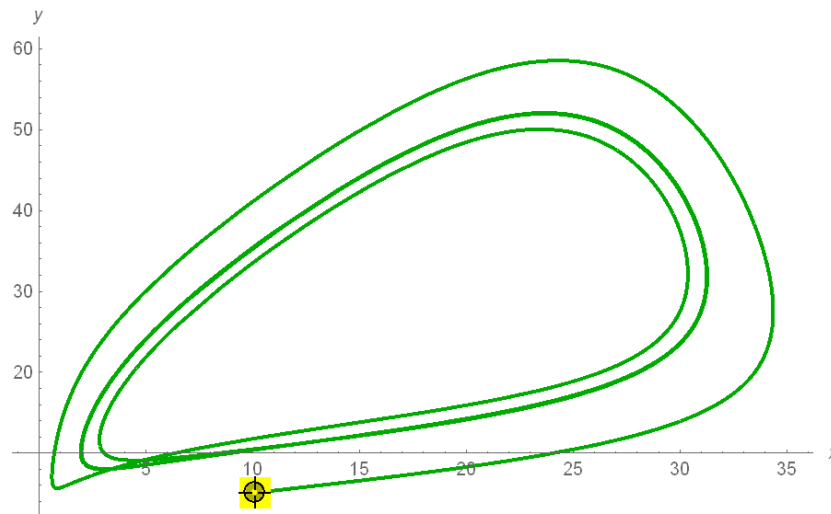
Gambar 4 Bidang Solusi mangsa x (a) dan Bidang Solusi pemangsa y (b)

Pada Gambar 4 disajikan bidang solusi mangsa dan pemangsa. Dapat dilihat bidang solusi mangsa, di awal pertumbuhan populasi mangsa mengalami osilasi yang besar, namun semakin lama nilai simpangannya semakin kecil dan menyebabkan populasi mangsa tersebut stabil. Pada bidang solusi pemangsa, populasi pemangsa mengalami hal yang sama dengan populasi mangsa yang semakin lama bersifat stabil.

Kasus 3

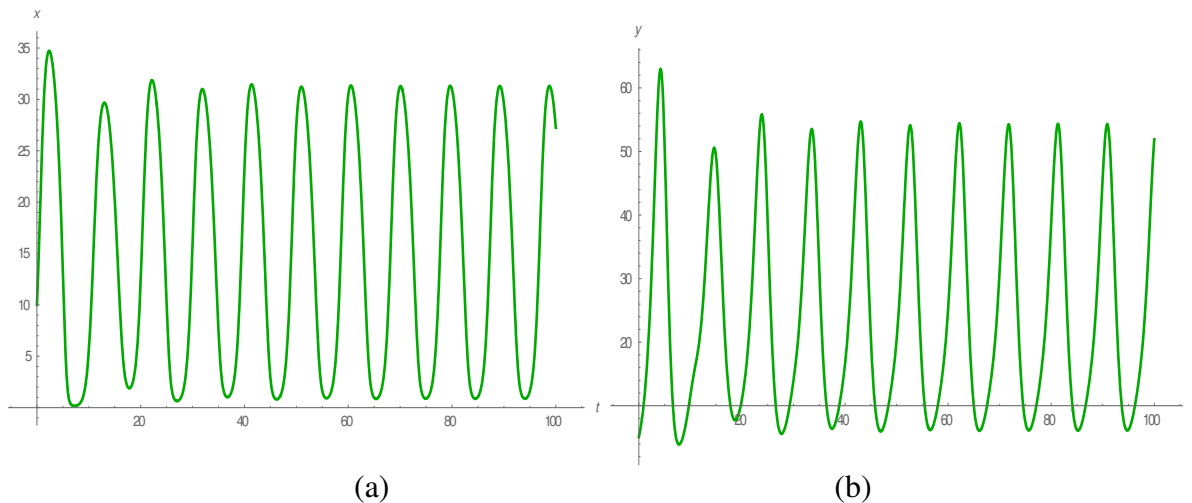
Dinamika Populasi Mangsa Pemangsa ($\tau > \tau_0$)

Pada kasus ketiga dipilih nilai $\tau > \tau_0$. Hal ini dimaksudkan untuk membuktikan apakah pada titik tetap E_3 terjadi bifurkasi Hopf. Pada kasus ini nilai τ yang dipilih yaitu 1.1. Berdasarkan simulasi dapat dilihat pada Gambar 5



Gambar 5 Dinamika populasi mangsa (x) dengan populasi pemangsa (y)

Dapat dilihat berdasarkan Gambar 5 yaitu ilustrasi bidang fase disekitar titik tetapnya menunjukkan bahwa keadaan sistem saat nilai $\tau > \tau_0$ tidak stabil. Perubahan kestabilan titik tetap karena perubahan nilai parameter disebut bifurkasi. Pada Gambar 5 menunjukkan keadaan sistem tidak stabil saat nilai $\tau > \tau_0$ sedangkan saat nilai $\tau < \tau_0$ mengalami kestabilan, maka jelas bahwa pada saat nilai $\tau > \tau_0$ titik tetap E_3 terjadi bifurkasi. Agar dapat lebih jelas disajikan Gambar 6 yang menggambarkan bidang solusi mangsa dan pemangsa saat nilai $\tau > \tau_0$.



Gambar 6 Bidang Solusi mangsa x (a) dan Bidang Solusi pemangsa y (b)

Kemunculan *limit cycle* pada Gambar 5 menunjukkan bahwa pada saat $\tau = 1.1$ terjadi bifurkasi Hopf. Pada Gambar 6 bidang solusi pada saat $\tau = 1.1$, menunjukkan terjadi osilasi yang semakin besar sehingga populasi akan

mengalami kenaikan karena adanya laju kelahiran mangsa yang ditentukan oleh interaksi pemangsa. Oleh karena itu, semakin besar nilai waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidakstabilan terhadap pertumbuhan, dalam hal ini dapat mengakibatkan meningkatnya jumlah populasi dan juga penurunan populasi hingga akhirnya mengalami kepunahan.

6. SIMPULAN

Dalam artikel ini dianalisis model mangsa pemangsa nonlinier. Dalam penelitian ini dihasilkan empat titik tetap, salah satu titik tetap bersifat stabil saat nilai $\tau = 0$ (tanpa menggunakan waktu tunda). Waktu tunda kritis (τ_0) adalah nilai batas yang menyebabkan perubahan kestabilan. Setelah dianalisis ketika nilai $\tau \neq 0$ titik tetap tersebut mengalami bifurkasi Hopf yang menyebabkan titik tetap yang awalnya stabil menjadi tidak stabil. Bifurkasi adalah perubahan kestabilan dikarenakan perubahan nilai parameter. Berdasarkan hasil analisis bahwa pada titik tetap E_3 mengalami bifurkasi. Hal itu diperkuat dengan adanya simulasi yang menunjukkan bahwa pada titik tetap E_3 terjadinya bifurkasi pada saat nilai $\tau > \tau_0$. Hal ini dipengaruhi karena adanya waktu tunda pada sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nindjin AF, Aloui AM, Cadivel M. 2006. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-gower and Holling type II schemes with time delay. *Nonlinear Analysis*. 7: 1104-1118.
- [2] Li YK. 2008. Positive periodic solutions of periodic neutral Loyka-Volterra system with distributed delays. *Chaos, Solution and Fractals*. 37: 288-298.
- [3] Yuan SL, Song YL. 2009. Stability and Hopf bifurcation in a delayed Leslie-Gower predator-prey system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 355 : 82-100.
- [4] Beretta E, Kuang Y. 1998. Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems. *Nonlinear Analysis*. 32: 381-408.
- [5] Liu J, Li YK, Zhao LL. 2009. On a periodic predator-prey system with time delays on time scales. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. 14: 3432-3438.
- [6] Sun HJ, Cao HJ. 2007. Bifurcations and chaos of a delayed ecological model. *Chaos, Solitons and Fractals*. 33: 1383-1393.
- [7] Hu GP, Li WT. 2010. Hopf bifurcation analysis for a delayed predator-prey system with diffusion effects. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 11: 819-826.
- [8] Fang H, Li JB. 2001. On the existence of periodic solutions of a neutral delay model of single-species population growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 259: 8-17.
- [9] Zhang W, Liu H, Xu C. 2013. Bifurcation Analysis for a Leslie-Gower Predator-prey with Time Delay. *International Journal of nonlinear science*. 15: 32-44.
- [10] Kar TK. 2003. Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *Mathematical and Computer Modelling*. 38: 449-458.

