DIMENSI METRIK PADA GRAF LINTASAN, GRAF KOMPLIT, GRAF SIKEL, GRAF BINTANG DAN GRAF BIPARTIT KOMPLIT

Septiana Eka R.
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,Universitas Negeri Surabaya
septiana0409@gmail.com

Budi Rahadjeng, S.Si, M.Si
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
rahajeng13@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G graf terhubung dengan $V(G)$ himpunan titik pada graf G. Misalkan $W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ himpunan titik pada graf G yang anggotanya telah ditentukan. Representasi titik u, untuk setiap $u \in V(G)$ terhadap W yang dinotasikan $r(u|W)$ di G adalah $(u|W) = \left(d(u, w_1), d(u, w_2), \cdots, d(u, w_k)\right)$. Himpunan W disebut himpunan pemisah pada G jika untuk setiap u,v pada G dan $u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|W)$. Dimensi metrik pada G, yang dinotasikan dengan dim(G), adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah pada G.
Kata Kunci: Dimensi Metrik, Himpunan Pemisah, Representasi Metrik.

Abstract

Let $V(G)$ vertices set in a connected graph G. Let subset $W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ of graph G. The metric representation of u for each $u \in V(G)$ with respect to W denoted $r(u|W)$ is $r(u|W) = \left(d(u, w_1), d(u, w_2), \cdots, d(u, w_k)\right)$. The set W is a resolving set for G if for all pairs u,v of vertices of G and $u \neq v$ implies that $r(u|W) \neq r(v|W)$. The metric dimension dim(G) of G is the minimum cardinality of resolving set for G. Problem which is discussed is metric dimension of path, complete, cycle, star graph, complete bipartite graph, union graph and adding graph .
Keywords: Metric Dimension, Resolving set, Metric Representation.

1. PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah jembatan Konisberg tersebut dapat dinyatakan dalam graf dengan menentukan keempat daerah tersebut sebagai titik dan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai.

Salah satu topik dalam teori graf adalah dimensi metrik pada graf. Dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali secara terpisah oleh Slater pada tahun 1975 dan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976.

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah pada G yang dinotasikan dengan dim(G) . Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf terhubung G. Jarak dari u ke v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada yang G dinotasikan dengan d(u,v).

2. DASAR TEORI

2.1 TEORI DASAR GRAF

Graf G yang dinotasikan dengan G = (V,E) berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G.

2.2 MACAM-MACAM GRAF

Graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung disebut graf sederhana.

Graf komplit dengan n titik, dilambangkan dengan K_n, adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berhubungan langsung.

Graf lintasan yang dinotasikan dengan Pn adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang n-1.

Graf sikel yang dinotasikan dengan Cn adalah graf terhubung dengan n titik yang mempunyai tepat satu sikel dengan panjang n.

Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik pada graf G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari graf G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Apabila setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka G disebut graf bipartit komplit yang dinotasikan dengan $K_{s,t}$ dimana s banyak titik pada A dan t banyak titik pada B .

Graf bintang yang dinotasikan dengan $K_{1,n-1}$ adalah graf bipartit komplit dengan n titik. Graf $K_{1,n-1}$

mempunyai satu titik berderajat *n*-1 yang disebut titik pusat dan *n*-1 titik berderajat satu yang disebut daun.

Gabungan graf *G* dan graf *H*, yang dinotasikan dengan $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup E(H)$.

Penjumlahan graf *G* dan graf *H*, yang dinotasikan dengan $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(u, v) | \forall u \in V(G), \forall v \in V(H)\}$.

2.3 HIMPUNAN PEMISAH

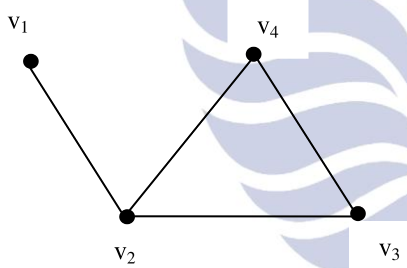
Misalkan $W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$ adalah himpunan titik pada graf *G* yang anggota-anggotanya telah ditentukan. Representasi titik $u \in V(G)$ terhadap *W* di *G* adalah *k*-tupel. Representasi titik *u* terhadap *W* $r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), \cdots, d(u, w_k))$ dengan $d(u, w_i)$ untuk *i* =1, 2, … , *k* adalah jarak dari titik *u* ke semua titik di *W*. Himpunan *W* disebut himpunan pemisah pada *G* jika untuk setiap titik *u*, *v* pada *G*, $u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|W)$.

3. PEMBAHASAN

3.1 DIMENSI METRIK PADA GRAF

Dimensi metrik pada *G*, yang dinotasikan dengan dim(*G*), adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah pada *G*.

Contoh :



G

Gambar 3.1 Graf dengan empat titik dan empat sisi

Dipilih $W_1 = \{v_1\}$, representasi setiap titik pada *G* terhadap W_1 adalah $r(v_1|W_1) = (0)$, $r(v_2|W_1) = (1)$, $r(v_3|W_1) = (2)$ dan $r(v_4|W_1) = (2)$. Karena ada v_3,$v_4 \in V(G)$ dan $v_3 \neq v_4$ tetapi $r(v_3|W_1) = r(v_4|W_1)$, maka W_1 dengan kardinalitas 1 bukan himpunan pemisah. Karena terdapat jarak yang sama untuk setiap titik pada graf G, maka *W* dengan kardinalitas 1 bukan himpunan pemisah.

Dipilih $W_3 = \{v_1, v_3\}$ representasi setiap titik pada *G* terhadap W_3 adalah $r(v_1|W_2) = (0,2)$, $r(v_2|W_2) = (1,1)$, $r(v_3|W_2) = (2,0)$ dan $r(v_4|W_2) = (2,1)$. Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$ dan $r(v|W_2) \neq r(v|W_2)$, maka W_2 dengan kardinalitas 2 adalah himpunan pemisah.

Karena tidak ada *W* dengan kardinalitas 1 yang merupakan himpunan pemisah, maka W_3 merupakan himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum pada graf *G*, sehingga dim(*G*)=2.

3.1 TEOREMA-TEOREMA

Teorema 3.1

Jika *G* graf terhubung dengan *n* titik dan diameter *d*, maka dim(*G*)≤*n*-*d*.

Bukti :

Misalkan $a, b \in V(G)$ dengan d(*a*,*b*) = *d*. Misalkan $(a = v_0, v_1, \cdots, v_d = b)$ lintasan dengan panjang *d*. Misalkan $W = V(G) - \{v_1, \cdots, v_d\}$. Karena $a \in W$dan $d(a, v_i)$ untuk $1 \leq i \leq d$, maka representasi setiap titik yang bukan anggota *W* terhadap *W* berbeda. Karena representasi setiap titik anggota *W* terhadap *W* memuat 0 pada koordinat yang berbeda, maka representasi setiap titik anggota *W* terhadap *W* berbeda. Sehingga representasi setiap titik pada graf *G* terhadap *W* berbeda. Karena $\forall u, v \in V(G), u \neq v, r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = V(G) - \{v_1, \cdots, v_d\}$ merupakan himpunan pemisah. Karena $|V(G)| = n$ dan $|\{v_1, \cdots, v_d\}| = d$, maka $|W| = n - d$. Karena dimensi metrik adalah himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum, maka dim(*G*)≤|*W*|. Sehingga dim(*G*)≤ $n - d$. ■

Teorema 3.2

Jika *G* graf terhubung dengan *n* titik, diameter *d*, dan dimensi *k*, maka $n \leq k + d^k$.

Bukti :

Misalkan *B* himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum pada *G*. Karena dim(G) = *k*, maka *B* himpunan pemisah dengan kardinalitas *k*. Karena $r(u|B)$ untuk setiap $u \in V(G)$ terdiri dari *k* tupel, maka $r(u|V(G) - B)$ untuk setiap $u \in V(G)$ terdiri dari $n - k$ tupel. Karena *B* himpunan pemisah, $\{(u|B) | \forall u \in V(G)\}$ terdiri dari *n* berbeda dengan *k*-tupel dan $\{(u|V(G) - B) | \forall u \in V(G)\}$ terdiri paling banyak *n* (*n*-*k*)-tupel berbeda. Karena diam(*G*) = *d*, maka anggota dari $r(u|B)$ dan $r(u|V(G) - B)$untuk setiap $u \in V(G)$ adalah bilangan bulat positif yang tidak lebih dari *d*. Karena anggota $r(u|V(G) - B)$ untuk setiap $u \in V(G)$ bilangan bulat positif yang tidak lebih dari *d* dan terdiri dari $n - k$ tupel, maka $n - k \leq d$. Sehingga $n \leq k + d^k$. ■

Teorema 3.1.3

G graf terhubung dengan *n* titik mempunyai dimensi 1 jika dan hanya jika *G*=*Pn*.

Bukti:

Jika *G* graf terhubung dengan *n* titik mempunyai dim(*G*) = 1, akan dibuktikan *G* = *Pn*.

Misalkan $W = \{w\}$ himpunan pemisah minimum pada *G*. Karena himpunan pemisah mempunyai kardinalitas 1, maka $r(u|W) = d(u, w)$ untuk setiap *u* anggota *V*(*G*). Karena *W* himpunan pemisah, maka $r(u|W)$ untuk setiap *u* anggota *V*(*G*) terdiri dari 1-tupel dengan anggota kurang dari *n*. Karena $r(u|W) = d(u, w)$ untuk setiap *u* anggota *V*(*G*) mempunyai representasi berbeda, ada *u* anggota *V*(*G*) dengan $d(u, w) = n - 1$. Karena terdapat $d(u, w) = n - 1$, maka ada lintasan dengan panjang $n - 1$ pada *G*. Karena terdapat satu lintasan dengan panjang $n - 1$ pada *G*, maka *G* graf lintasan (*Pn*). Sehingga terbukti jika *G* graf terhubung dengan *n* titik mempunyai dimensi 1 maka *G* = *Pn*.

Jika G graf lintasan dengan banyak titik n, akan dibuktikan dim(G) = 1.

Misalkan $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ lintasan dengan panjang $n-1$ dan v_1 titik awal pada graf G. Misalkan $W = \{v_1\}$, akan dibuktikan $W = \{v_1\}$ himpunan pemisah. Karena $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ lintasan, maka $d(v_1, v_i) = i - 1$ untuk $1 \le i \le n$. Akibatnya $\forall u, v \in V(G)$, $u \ne v$, $r(u|W) \ne r(v|W)$. Sehingga W dengan kardinalitas 1 himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = \{v_1\}$ himpuan pemisah dengan kardinalitas minimum. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari 1, maka $\{v_1\}$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti jika G graf lintasan dengan n titik maka dim(G) = 1.

Karena terbukti dari dua sisi, maka terbukti bahwa jika G graf terhubung dengan n titik mempunyai dimensi 1 jika dan hanya jika $G = Pn$. ■

Teorema 3.4

Jika G graf komplit dengan n titik dan $n \ge 3$, maka dim(G)= $n-1$.

Bukti :

Karena G graf komplit, maka d(u,v) = 1 untuk setiap $u \in V(G) - \{v\}$. Misalkan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ dan $|W| = n-1$. Akan dibuktikan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (0{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$
$$r(v_2|W) = (1{,}0{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-1}|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}0{,}1)$$
$$r(v_n|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \ne v$, $r(u|W) \ne r(v|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Misalkan ada himpunan pemisah $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ dengan $|W| = n-2$. Representasi setiap titik pada G terhadap $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ adalah

$$r(v_1|W) = (0{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$
$$r(v_2|W) = (1{,}0{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-3}|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}0{,}1)$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}0)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$
$$r(v_n|W) = (1{,}1, \cdots {,}1{,}1)$$

Karena $\exists v_{n-1}, v_n \in V(G)$, $v_{n-1} \ne v_n$, $r(v_{n-1}|W) = r(v_n|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ bukan himpunan pemisah. Karena untuk setiap dua titik pada G berhubungan langsung, maka ada dua titik pada G mempunyai representasi yang sama terhadap W, sehingga tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-1$. Akibatnya W dengan kardinalitas $n-1$ merupakan himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga dim(K_n)=$n-1$. ■

Teorema 3.5

Jika G graf sikel dengan n titik dan $n \ge 3$, maka dim(C_n) = 2.

Bukti :

Misalkan $(v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1)$ sikel dengan n titik dan $n \ge 3$ pada graf G.

Untuk sikel dengan n ganjil. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2{,}1)$$
$$r(v_2|W) = (3{,}2)$$
$$r(v_3|W) = (4{,}3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-3}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$
$$\left(v_{\frac{n-1}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$\left(v_{\frac{n+1}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$
$$\left(v_{\frac{n+3}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1{,}2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0{,}1)$$
$$r(v_n|W) = (1{,}0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \ne v$, $r(u|W) \ne r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Karena G graf sikel, berdasarkan Teorema 3.3, dim(G)≠1. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga dim(C_n) = 2 untuk n ganjil.

Untuk sikel dengan n genap. Misalkan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$, akan dibuktikan W himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (2{,}1)$$
$$r(v_2|W) = (3{,}2)$$
$$r(v_3|W) = (4{,}3)$$
$$\vdots$$
$$r\left(v_{\frac{n-2}{2}}|W\right) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}\right)$$
$$\left(v_{\frac{n}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right)$$
$$\left(v_{\frac{n+2}{2}}|W\right) = \left(\frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{n-2}|W) = (1{,}2)$$
$$r(v_{n-1}|W) = (0{,}1)$$
$$r(v_n|W) = (1{,}0)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \ne v$, $r(u|W) \ne r(v|W)$, maka $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = \{v_{n-1}, v_n\}$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Karena G graf sikel, berdasarkan Teorema 3.3, dim(G)≠1. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W dengan kardinalitas 2 merupakan himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga dim(C_n) = 2 untuk n ganjil.

Karena terbukti untuk graf sikel dengan banyak titik ganjil dan genap, maka dim(C_n) = 2. ■

Teorema 3.6

Jika G graf bintang dengan n titik dan $n \geq 3$, maka dim($K_{1,n-1}$) = $n-2$.

Bukti :

Karena G graf bintang, ada 1 titik mempunyai derajat n-1 dan n-1 titik mempunyai derajat 1. Misalkan u titik pada G berderajat n-1 dan v_i titik pada G berderajat 1 untuk $1 \leq i \leq n-1$. Misalkan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$dan $|W| = n-2$. Akan dibuktikan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(u|W) = (1,1,\cdots,1,1)$$

$$r(v_1|W) = (0,2,\cdots,2,2)$$

$$\vdots$$

$$r(v_{n-2}|W) = (2,2,\cdots,2,0)$$

$$r(v_{n-1}|W) = (2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $r(u|W) \neq r(v|W)$, makadengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Misalkan ada himpunan pemisah $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-3}\}$ dengan $|W| = n-3$. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(u|W) = (1,1,\cdots,1,1)$$

$$r(v_1|W) = (0,2,\cdots,2,2)$$

$$\vdots$$

$$r(v_{n-3}|W) = (2,2,\cdots,2,0)$$

$$r(v_{n-2}|W) = (2,2,\cdots,2,2)$$

$$r(v_{n-1}|W) = (2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\exists v_{n-2}, v_{n-1} \in V(G)$, $v_{n-2} \neq v_{n-2}$, $r(v_{n-2}|W) = r(v_{n-1}|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n-3}\}$ bukan himpunan pemisah. Karena jarak untuk setiap 2 titik berderajat 1 adalah 2, maka ada 2 titik pada G mempunyai representasi yang sama terhadap W. Karena ada 2 titik pada G mempunyai representasi yang sama terhadap W, maka tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-2$. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-2$, maka W dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga dim($K_{1,n-1}$) = $n-2$. ■

Teorema 3.7

Jika G graf bipartit komplit dengan n titik dan $n \geq 4$, maka dim(G)= $n-2$.

Bukti :

Karena G graf bipartit komplit, maka G dapat dipartisi menjadi dua bagian. Misalkan A dan B partisi dari graf G dengan $V(A) = \{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$, $V(B) = \{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ dan $n = s + t$. Misalkan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-1}\}$ dan $|W| = n-2$. Akan dibuktikan $|W| = n-2$ himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (0,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_2|W) = (2,0,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-1}|W) = (2,2,\cdots,2,0,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (2,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,0,2,\cdots,2,2)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,0)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $r(u|W) \neq r(v|W)$, makadengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Misalkan ada himpunan pemisah $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-2}\}$ dengan $|W| = n-3$. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (0,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_2|W) = (2,0,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-1}|W) = (2,2,\cdots,2,0,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (2,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,0,2,\cdots,2,2)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-2}|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,0)$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,2)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\exists u_{t-1}, u_t \in V(G)$, $u_{t-1} \neq u_t$, $r(u_{t-1}|W) = r(u_t|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-2}\}$ bukan himpunan pemisah. Karena setiap titik pada A berhubungan langsung dengan setiap titik pada B, setiap titik pada A tidak berhubungan langsung dan setiap titik pada B tidak berhubungan langsung, maka ada 2 titik pada G dan bukan anggota W mempunyai representasi yang sama terhadap W. Karena ada 2 titik pada G mempunyai representasi yang sama, maka W dengan kardinalitas kurang dari $n-2$ bukan himpunan pemisah. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-2$, maka W dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 4$, $G = K_{s,t}$ dan $s, t \geq$1, maka dim(G)= $n-2$. ■

Teorema 3.8

Jika G graf dengan n titik dan $n \geq 4$, $G = K_s + \overline{K_t}$ dan $s \geq 1$, $t \geq 2$, maka dim(G)= $n-2$.

Bukti :

Karena $G = K_s + \overline{K_t}$ dimana K_s graf komplit dengan s titik dan $\overline{K_t}$ komplemen dari graf komplit dengan t titik. Misalkan $V(K_s) = \{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$, $V(K_t) = \{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ dan $n = s + t$. Misalkan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-1}\}$ dan $|W| = n-2$. Akan dibuktikan $|W| = n-2$ himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (0,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$

$$r(v_2|W) = (1,0,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-1}|W) = (1,1,\cdots,1,0,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (1,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,0,2,\cdots,2,2)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,0)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $r(u|W) \neq r(v|W)$, makadengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Misalkan ada himpunan pemisah $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-2}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-1}\}$ dengan $|W| = n-3$. Representasi setiap titik pada *G* terhadap *W* adalah

$$r(v_1|W) = (0,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_2|W) = (1,0,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-2}|W) = (1,1,\cdots,1,0,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_{s-1}|W) = (1,1,\cdots,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (1,1,\cdots,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,0,2,\cdots,2,2)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,0)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,2,2,\cdots,2,2)$$

Karena $\exists v_{s-1}, v_s \in V(G)$, $v_{s-1} \neq v_s$, $r(v_{s-1}|W) = r(v_s|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-2}, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-1}\}$ bukan himpunan pemisah.

Karena setiap titik pada K_s berhubungan langsung dengan setiap titik pada $\overline{K_t}$, setiap titik pada K_s berhubungan langsung dan setiap titik pada $\overline{K_t}$ tidak berhubungan langsung, maka ada dua titik pada *G* dan bukan anggota *W* mempunyai representasi yang sama terhadap *W*. Karena ada dua titik pada *G* dan bukan anggota *W* mempunyai representasi yang sama terhadap *W*, maka terdapat representasi yang sama, sehingga *W* dengan kardinalitas kurang dari $n-2$ bukan himpunan pemisah. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-2$, maka *W* dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti jika *G* graf dengan *n* titik dan $n \geq 4$, $G = K_s + \overline{K_t}$ dan $s \geq 1$, $t \geq 2$, maka dim(G)= $n-2$. ∎

Teorema 3.9

Jika *G* graf terhubung dengan *n* titik dan $n \geq 4$, $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ dan $s, t \geq 1$, maka dim(G)= $n-2$.

Bukti :

Misalkan $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ dimana K_s graf komplit dengan *s* titik dan K_t graf komplit dengan *t* titik. Misalkan $V(K_s) = \{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$, $V(K_t) = \{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$, $V(K_1) = \{x\}$ dan $n = s + t + 1$. . Misalkan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, x, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{t-1}\}$ dan $|W| = n-2$. Akan dibuktikan $|W| = n-2$ himpunan pemisah. Representasi setiap titik pada *G* terhadap *W* adalah

$$r(v_1|W) = (0,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_2|W) = (1,0,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-1}|W) = (1,1,\cdots,1,0,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (1,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(x|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,0,0,\cdots,0,0)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,0,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,1,1,\cdots,1,0)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,1,1,\cdots,1,1)$$

Karena $\forall u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $r(u|W) \neq r(v|W)$, makadengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Misalkan ada himpunan pemisah $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots, u_{t-2}\}$ dengan $|W| = n-3$. Representasi setiap titik pada *G* terhadap *W* adalah

$$r(v_1|W) = (0,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_2|W) = (1,0,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(v_{s-1}|W) = (1,1,\cdots,1,0,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(v_s|W) = (1,1,\cdots,1,1,1,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(x|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,0,0,\cdots,0,0)$$
$$r(u_1|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,0,1,\cdots,1,1)$$
$$\vdots$$
$$r(u_{t-2}|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,1,1,\cdots,1,0)$$
$$r(u_{t-1}|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,1,1,\cdots,1,1)$$
$$r(u_t|W) = (1,1,\cdots,1,1,0,1,1,\cdots,1,1)$$

Karena $\exists u_{t-1}, u_t \in V(G)$, $u_{t-1} \neq u_t$, $r(u_{t-1}|W) = r(u_t|W)$, maka $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}, u_1, u_2, \cdots, u_{t-2}\}$ bukan himpunan pemisah. Karena setiap titik pada K_s berhubungan langsung dengan setiap titik pada $(K_1 \cup K_t)$, setiap titik pada K_s berhubungan langsung, setiap titik pada K_t berhubungan langsung dan setiap titik pada K_t tidak berhubungan langsung dengan K_1, maka ada 2 titik pada *G* dan bukan anggota *W* mempunyai representasi yang sama terhadap *W*. Karena ada 2 titik yang mempunyai representasi yang sama, maka *W* dengan kardinalitas kurang dari $n-2$ bukan himpunan pemisah. Karena tidak ada himpunan pemisah dengan kardinalitas kurang dari $n-2$, maka *W* dengan kardinalitas $n-2$ himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum. Sehingga terbukti jika *G* graf dengan *n* titik dan $n \geq 4$, $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ dan $s, t \geq 1$, maka dim(G)= $n-2$. ∎

4. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Misalkan *G* adalah graf. Dimensi metrik pada graf *G* yang dinotasikan dengan dim(*G*) adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah.
2. Misalkan *G* graf dengan *n* titik dan diameter *d*. Batas atas dari dimensi metrik adalah *n-d*.
3. Misalkan *G* graf terhubung. Dimensi metrik *G* adalah 1 jika dan hanya jika *G* graf lintasan.
4. Jika *Kn* graf komplit dengan *n* titikdan $n \geq 2$ maka dim(K_n) = $n-1$.

5. Jika Cn graf sikel dengan n titik dan $n \geq 3$ maka $\dim(C_n) = 2$.
6. Jika $K_{1,n\text{-}1}$ graf bintang dengan n titik dan $n \geq 3$ maka $\dim(K_{1,n\text{-}1}) = n - 1$.
7. Jika G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 4$. Dimensi metrik $G = K_{s,t}$, $G = K_s + \overline{K_t}$ dan $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ adalah $n - 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

[2] Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann.2000. *Resolvability in Graphs and The Metrik Dimension of a Graph*. Discrete Applied Mathematics 105, 99-113.

[3] Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graf and Digraph Third Edition*. California: Wadsworth, Inc.

[4] Habibi, Wildan. 2011. *Dimensi Metrik Graf Kincir* $K_1+mK_s, m \geq 2, s \geq 3; m,s \in Z^+$.Tesis. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. (Online) : (http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/chapter_ii/06510008-wildan-habibi.pdf. Diakses Tanggal 6 Februari 2013 Pukul 09.59 WIB).

[5] Harrary, F dan Melter, R.A.1976. *On The Metrik Dimension of a Graph*. Ars Combin. 2, 191-195.

[6] Harrary, F. *Graph Theory*. Filipina: Addison-wesley Publishing Company, Inc.

[7] Kumar, Hemanth. 2010. *Design and Defelopment of an Efficient Routing Algorithm for a Clustered Network*. Dept. of Electronics and Communication Engineering Manipal University. (Online) : (http://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/2505. Diakses Tanggal 6 Februari 2013 Pukul 09.30 WIB)

[8] Muzayyana, Iqlillah. 2010. *Dimensi Metrik Graf Lintasan Tak Hingga*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. (Online) : (http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/06510061-iqlillah-muzayyana-dini-f.ps. Diakses Tanggal 6 Februari 2013 Pukul 09.56 WIB).

[9] Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.