PELABELAN SISI AJAIB DAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF KIPAS, GRAF TANGGA, GRAF PRISMA, GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL, DAN GRAF BUKU

Anina Tikasari [1], Budi Rahadjeng, S.Si, M.Si.[2] ,

[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60321
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60321
email : aninatika@yahoo.com [1], rahajeng13@yahoo.com [2]

ABSTRAK

Pelabelan graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen graf seperti titik, sisi, titik dan sisi. Suatu pelabelan sisi ajaib pada graf G dengan *p* titik dan q sisi adalah suatu fungsi $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sedemikian hingga $\lambda(u) + \lambda(v) + \lambda(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan *k* konstanta.

Selanjutnya λ dikatakan sebuah pelabelan sisi ajaib super dari G jika $\lambda : V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p\}$.Yang dibahas pada skripsi ini tentang pelabelan sisi ajaib super. Jika suatu graf memenuhi pelabelan sisi ajaib, maka graf tersebut juga memenuhi pelabelan sisi ajaib super. Dalam hal ini ada beberapa graf yang memenuhi pelabelan sisi ajaib super yaitu graf kipas, graf tangga, graf prisma, graf lintasan, graf sikel dan graf buku (B_2).

Kata Kunci : Pelabelan sisi ajaib dan Pelabelan sisi ajaib super, graf kipas, graf tangga, graf prisma, graf lintasan, graf sikel dan graf buku (B_2).

1 PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan Konigsberg di atas sungai Pregel di Kaliningrad, Rusia dalam sekali waktu.

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang perkembangannya sangat pesat, ini disebabkan karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun berbagai ilmu yang lainnya. Misal dalam hal menentukan lintasan terpendek, menghubungkan suatu jaringan, dan lain sebagainya.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Pada prinsipnya, pelabelan graf merupakan pemberian nilai (label) pada titik, sisi, atau keduanya. Pelabelan graf sudah banyak dikaji sejak 1960-an. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1967).

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu fungsi/pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi atau keduanya) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non-negatif). Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib dan pelabelan sisi ajaib super.

Salah satu pelabelan yang menarik yang dilabelkan dengan bilangan adalah pelabelan sisi ajaib super. Pelabelan sisi ajaib super adalah pelabelan pada suatu graf yang dilabelkan dengan bilangan, dimana label setiap titik dan sisi yang terkait (*incident*) jika dijumlahkan menghasilkan bilangan bulat yang sama.

2 KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini, akan diuraikan beberapa definisi dasar dan beberapa teorema yang berkaitan dengan pembahasan mengenai pelabelan graceful sisi pada bab berikutnya.

2.1 TEORI DASAR GRAF

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong V(G) yang elemen – elemennya disebut titik dan himpunan berhingga yang mungkin kosong E(G) yang elemen – elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam E(G) merupakan pasangan tak berurutan dari titik – titik di V(G). V(G) disebut himpunan titik dari graf dan E(G) disebut himpunan sisi dari graf G. Jika G tidak memiliki sisi maka G disebut *graf kosong*.

2.2 MACAM-MACAM GRAF

Sebuah graf komplit dengan n titik, dilambangkan dengan K_n, adalah graf sederhana di mana untuk setiap dua titik berbeda pada graf dihubungkan oleh tepat satu sisi. Graf lintasan P_n adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lingkaran C_n (*Cycle Graph*) merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua.

Untuk $n \geq 2$, Graf kipas F_n adalah graf yang diperoleh dari penjumlahan graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n, yaitu $F_n=K_1+P_n$.

Untuk $n \geq 3$, Graf prisma (*Prism Graph*) R_n adalah graf hasil kali kartesius P_2 x C_n dimana P_2 adalah sebuah lintasan dengan 2 titik dan C_n adalah graf sikel/lingkaran dengan *n* titik.

Graf tangga L_n merupakan hasil kali kartesius graf lintasan$P_2\ x\ P_1$.

Graf G disebut pohon jika G adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel.

Graf bintang (Star) S_n merupakan pohon pada *n* titik yang mempunyai satu titik berderajat *n-1* dan *n-1* titik berderajat satu. Banyak sisi pada suatu graf bintang yang terdiri dari *n* buah titik adalah *n-1*.

Untuk $n \geq 3$, *Graf buku (book graph)* B_n adalah graf hasil kali kartesius S_{n+1} x P_2, dimana S_{n+1} adalah graf bintang dengan n+1 titik dan P_2 adalah graf lintasan dengan 2 titik. Banyak titik pada graf buku B_n adalah 2(n+1) dan banyak sisi adalah 3n+1.

2.3 PELABELAN

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (vertex labeling). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (edge labeling). Dan jika domain dari fungsi adalah himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (total labeling).

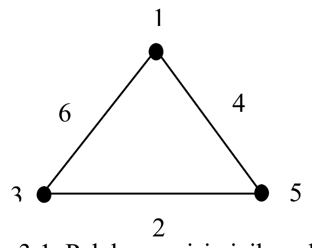
3 PEMBAHASAN

3.1 PELABELAN SISI AJAIB SUPER

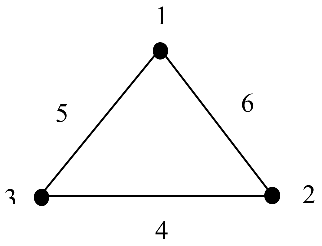
Misalkan graf G adalah graf berhingga dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Suatu pelabelan sisi ajaib pada graf G dengan p titik dan q sisi adalah suatu fungsi bijektif $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sedemikian hingga $\lambda(u) + \lambda(v) + \lambda(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan *k* konstanta.

Selanjutnya λ dikatakan sebuah pelabelan sisi ajaib super dari G jika $\lambda: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p\}$.

Contoh :



Gambar 3.1 Pelabelan sisi ajaib pada K_3



Gambar 3.2 Pelabelan sisi ajaib super pada K_3

3.2 TEOREMA-TEOREMA :

A. Graf – Graf Sisi Ajaib Super

Graf K_3 pada gambar 3.2 adalah pelabelan sisi ajaib super dengan banyak titik 3 dan banyak sisi 3. Misalkan banyak titik dinyatakan dengan p dan banyak sisi dinyatakan dengan q, maka pada graf K_3 nilai k = 9. Karena jumlah label dua titik dan satu sisi yang terkait pada dua titik tersebut adalah sama, yaitu 9, maka graf K_3 merupakan pelabelan sisi ajaib super.

- **Teorema 3.1**

Graf *G* merupakan sisi ajaib super jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif $\lambda: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p\}$ sedemikian sehingga himpunan

$$S = \{\lambda(u) + \lambda(v): uv \in E(G)\}$$

terdiri dari *q* bilangan bulat berurutan.

Dalam hal ini λ dapat diperluas menjadi suatu pelabelan sisi ajaib super *G* dengan bilangan ajaib $k = p + q + s$ dengan s = min(S) dan

$S = \{k-(p+1), k-(p+2), \ldots, k-(p+q)\}$.

dimana: S merupakan hasil penjumlahan dua label titik yang berbeda.

s merupakan minimum dari S.

Bukti :

($\leftarrow$)

Asumsikan bahwa fungsi λ ada dan misalkan $s = \min(S)$

λ dapat diperluas dengan domain $V(G) \cup E(G)$

Misal$\lambda(uv) = |V(G)| + |E(G)| + s - (\lambda(u) + \lambda(v))$ untuk setiap $uv \in E(G)$.

$S = \{\lambda(u) + \lambda(v); uv \in E(G)\}$ terdiri dari $|E(G)|$ bilangan bulat berurutan,($|E(G)|$ merupakan

banyak sisi pada graf G dengan min(S) = s dan terus bertambah satu hingga $s + (|E(G)| - 1)$.
Untuk $\lambda(u) + \lambda(v) = s$, maka label titik $\lambda(uv) = |V(G)| + |E(G)|$
Untuk $\lambda(u) + \lambda(v) = s + 1$, maka label titik $\lambda(uv) = |V(G)| + |E(G)| - 1$
Untuk $\lambda(u) + \lambda(v) = s + 2$, maka label titik $\lambda(uv) = |V(G)| + |E(G)| - 2$
Untuk $\lambda(u) + \lambda(v) = s + (|E(G)| - 2)$, maka label titik $\lambda(uv) = |V(G)| + 2$
Untuk $\lambda(u) + \lambda(v) = s + (|E(G)| - 1)$, maka label titik $\lambda(uv) = |V(G)| + 1$
Sehingga himpunan label sisinya adalah $\{|V(G)| + 1,\ |V(G)| + 2, |V(G)| + 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$
Karena titik pada graf G memiliki label $\{1,2,3, \ldots, |V(G)|\}$ dan sisinya mempunyai label $\{|V(G)| + 1,\ |V(G)| + 2, |V(G)| + 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ Sedemikian hingga jumlah label dua titik dan satu sisi yang terkait pada dua titik tersebut adalah sama, maka graf G merupakan pelabelan sisi ajaib super. Sehingga graf G adalah sisi ajaib super.
$(\rightarrow)$
Karena G adalah graf sisi ajaib super dengan λ adalah pelabelan yang bersesuaian, maka terdapat bilangan ajaib k yaitu :
$k = \lambda(u) + \lambda(v) + \lambda(uv)$
atau k dapat ditulis dengan,
$k - \lambda(uv) = \lambda(u) + \lambda(v)$
maka $S = \{k - \lambda(uv); uv \in E(G)\}$
karena pelabelannya memenuhi pelabelan sisi ajaib super dengan himpunan label sisi $\lambda(uv)$ adalah $\{|V(G)| + 1,\ |V(G)| + 2, |V(G)| + 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ untuk setiap $uv \in E(G)$.
Sehingga
$S = \{k - (|V(G)| + 1), k - (|V(G)| + 2), k - (|V(G)| + 3), \ldots, k - (|V(G)| + |E(G)|)\}$

B. Graf Kipas

Teorema 3.2

Graf kipas f_n memenuhi pelabelan sisi ajaib untuk setiap bilangan bulat positif n.

Bukti :

Misal graf kipas f_n dengan :
$V(f_n) = \{u\} \cup \{v_i : 1 \le i \le n\}$
Dimana : u titik pada K_1 dan v_i titik pada P_n.
$E(f_n) = \{uv_i : 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \le i \le n - 1\}$;
Label titik-titik dan sisi-sisi pada graf f_n dengan :

$f(x) = 1, x = u$

$$f(x) = \frac{1 - 5(-1)^i + 6i}{4}, x = v_i, 1 \le i \le n$$

$$f(x) = \frac{12n + 7 + 5(-1)^i - 6i}{4}\ ; x = uv_i, 1 \le i \le n$$

$f(x) = 3n - 3i + 1\ ; x = v_i v_{i+1}, 1 \le i \le n - 1$

Semua label titik dan sisi pada graf f_n berbeda semua.

- Label titik v_j untuk j ganjil, $0 \le j \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai $3k : 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
- Label titik v_j untuk j genap, $1 < j < \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai $3k + 2 : 0 \le k \le \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$.
- Label sisi uv_j untuk j ganjil, $0 \le j \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai $3k + 2 : \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 \le k \le n - 1$.
- Label sisi uv_j untuk j genap, $1 < j < \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai $3k : \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \le k \le n$.
- Label sisi $v_j v_{j+1}$, $1 \le j \le n - 1$ adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai $3k + 1 : 1 \le k \le n - 1$.
- Label $f(u) = 1$.

Maka f_n memenuhi pelabelan sisi ajaib dengan nilai $k = 3n + 3$.

Teorema 3.3

Graf Kipas f_n adalah graf sisi ajaib super jika dan hanya jika $1 \le n \le 6$

Bukti :

$\{\Leftarrow\}$Akan ditunjukkan bahwa graf kipas f_n dengan $1 \le n \le 6$ memenuhi pelabelan sisi ajaib super.
Untuk n = 1 bersesusaian dengan K_2, untuk n = 2 bersesusaian dengan K_3 dan untuk n = 3,4,5 dan 6, beri label K_1=4 dan P_n dengan 3-1-2, 5-3-1-2, 6-5-3-1-2 dan 6-7-5-3-1-2.

$\{\Rightarrow\}$ Akan ditunjukkan bahwa graf kipas f_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super maka $1 \le n \le 6$.
Graf kipas f_n adalah graf sisi ajaib super. Andaikan $n \ge 7$. Pada f_n, $|V(f_n)| = n + 1$, $|E(f_n)| = 2n - 1$ dan $V(f_n) = \{v_i : g(v_i) = i; i = 1,2,3, \ldots, p\}$. Karena f_n sisi ajaib super, berdasarkan teorema 1, $S = \{g(u) + g(v) : uv \in E(f_n)\}$, maka $S = \{3,4,5, \ldots, 2p - 1\}$. Karena $n \ge 7$, maka titik pada graf f_n dapat dinyatakan sebagai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_{p-3}, v_{p-2}, v_{p-1}, v_p$ merupakan semua titik yang berbeda.

$3, 4, 2p-2, 2p-1$ adalah anggota S yang dapat dinyatakan tunggal dari penjumlahan dua label titik yang berbeda , maka

$3 = 1 + 2$ $\quad$ $2p - 2 = p + (p - 2)$

$4 = 1 + 3$ $\quad$ $2p - 1 = p + (p - 1)$

Sehingga terdapat himpunan sisi $\{v_1v_2, v_1v_3, v_pv_{p-2}, v_pv_{p-1}\} \subseteq E(f_n)$.

Akan tetapi ada anggota S yang tidak dapat dinyatakan tunggal sebagai penjumlahan dua label titik yang berbeda, misalnya:

$5 = 1 + 4 = 2 + 3$

$2p - 3 = p + (p - 3) = (p - 2) + (p - 1)$

Sehingga terdapat 4 kemungkinan sisi yang terjadi yaitu :

$\{v_1v_4, v_pv_{p-3}\}, \{v_1v_4, v_{p-2}v_{p-1}\}, \{v_2v_3, v_pv_{p-3}\}$ atau $\{v_2v_3, v_{p-2}v_{p-1}\} \subseteq E(f_n)$

Karena terdapat anggota S yang tidak dapat dinyatakan secara tunggal, maka tidak memenuhi fungsi bijektif. Sehingga untuk $f_n, n \geq 7$ tidak ada pelabelan sisi ajaib super yang memenuhi.

C. Graf Tangga

Teorema 3.4.

Graf Tangga L_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super, untuk n adalah ganjil.

Bukti :

Misal L_n adalah graf tangga dengan :

$V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$

$E(L_n) = \{u_iu_{i+1}, v_iv_{i+1}, u_jv_j : 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n\}$

Label titik-titik pada graf L_n dengan:

$f(x) = \frac{i+1}{2}$; $x = u_i$, i ganjil dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = \frac{n+i+1}{2}$; $x = u_i$, i genap dan $1 < i < n$

$f(x) = \frac{3n+i}{2}$; $x = v_i$, i ganjil dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = \frac{2n+i}{2}$; $x = v_i$, i genap dan $1 < i < n$

Sedangkan label sisi-sisi L_n dengan :

$g(x) = 4n - i$; $x = u_iv_i, 1 \leq i \leq n$

$g(x) = 3n - i$; $x = v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n$

$g(x) = 5n - i - 1$; $x = u_iu_{i+1}, 1 \leq i \leq n$

Maka L_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = \frac{11n+1}{2}$.

D. Graf Prisma

Teorema 3.5

Jika m adalah ganjil maka graf prisma $C_m \times P_2$ adalah sisi ajaib super.

Bukti :

Misal graf prisma $C_m \times P_2$ dengan :

$V(G) = \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2\}$

$E(G) = \{v_{i,j}v_{i+1,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} : 1 \leq i \leq m, j = 1\}$

Label titik-titik pada graf $C_m \times P_2$ dengan :

$f(x) = \frac{i+1}{2}$; $x = v_{i,j}$, i ganjil, $1 \leq i \leq m$ dan $j = 1$

$f(x) = \frac{i+m+1}{2}$; $x = v_{i,j}$, i genap, $1 < i < m$ dan $j = 1$

$f(x) = \frac{i+2m}{2}$; $x = v_{i,j}$, i genap, $1 < i < m$ dan $j = 2$

$f(x) = \frac{i+3m}{2}$; $x = v_{i,j}$, i ganjil, $1 \leq i \leq m$ dan $j = 2$

Sedangkan label sisi-sisi $C_m \times P_2$ dengan :

$g(x) = 5m - i$; $x = v_{i,j}v_{i+1,j}$, $1 \leq i < m$ dan $j = 1$

$g(x) = 5m$; $x = v_{i,j}v_{i+1(mod\ m),j}$, $i = m$ dan $j = 1$

$g(x) = 3m - i + 1$; $x = v_{i,j}v_{i+1,j}$, $1 \leq i \leq m$ dan $j = 1$

$g(x) = 4m - i + 1$; $x = v_{i,j}v_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq m$

Maka $C_m \times P_2$ memenuhi pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = \frac{11m+3}{2}$.

E. Graf Lintasan

Teorema 3.6

Graf lintasan P_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super untuk setiap bilangan bulat positif n.

Bukti :

Misal graf lintasan P_n dengan :

$V(P_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$

$E(P_n) = \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$

Labeli titik dan sisi pada graf P_n dengan :

a. Untuk n genap

$f(x) = \frac{i+1}{2}$; $x = v_i$, i ganjil dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = \frac{n+i}{2}$; $x = v_i$, i genap dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = 2n - i$; $x = v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$

b. Untuk n ganjil

$f(x) = \frac{i+1}{2}$; $x = v_i$, i ganjil dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = \frac{n+i+1}{2}$; $x = v_i$, i genap dan $1 \leq i \leq n$

$f(x) = 2n - i$; $x = v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$

Maka P_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = \frac{5n+2}{2}$ dan $k = \frac{5n+3}{2}$

F. Graf Sikel

Teorema 3.7

Graf sikel C_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super, dimana n adalah ganjil.

Bukti :

$V(C_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$

$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$

Label titik dan sisi pada graf C_n dengan :

$f(x) = \frac{i+1}{2}$; $x = v_i, i\ ganjil\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = \frac{n+i+1}{2}$; $x = v_i, i\ ganjil\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = 2n - i$; $x = v_i v_{i+1,} 1 \leq i \leq n-1$

$f(x) = 3n - i$; $x = v_i v_{i+1(mod\, n),} i = n$

Maka C_n memenuhi pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = \frac{5n+3}{2}$.

G. Graf Buku

Teorema 3.8

Graf Buku B_n adalah sisi ajaib untuk setiap bilangan bulat positif n.

Bukti :

Misal graf buku B_n dengan:

$V(B_n) = \{u, v\} \cup \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$

Dimana :

- u dan v adalah titik yang berderajat $n+1$
- u_i dan $v_i$adalah titik yang berderajat 2

$E(B_n) = \{uv\} \cup \{uu_i, vv_i, v_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$

Labeli titik dan sisi pada graf B_n dengan :

$f(x) = 1$; $x = u$

$f(x) = 5n + 3$; $x = v$

$f(x) = 2n + 2$; $x = uv$

$f(x) = 2n + i + 2$; $x = u_i\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = 2n - 2i + 2$; $x = v_i\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = 5n - i + 3$; $x = uu_i\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = 3n + i + 2$; $x = u_i v_i\ dan\ 1 \leq i \leq n$

$f(x) = 2i + 1$; $x = vv_i\ dan\ 1 \leq i \leq n$

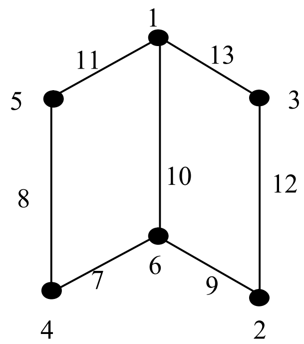
Maka B_n memenuhi pelabelan sisi ajaib dengan nilai $k = 7n + 6$

Teorema 3.9

Graf buku B_2 memenuhi pelabelan sisi ajaib super.

Bukti :

akan ditunjukkan bahwa B_2 memenuhi pelabelan sisi ajaib super.



Karena pelabelan diatas memenuhi pelabelan sisi ajaib super, maka graf buku B_2 merupakan pelabelan sisi ajaib super dengan nilai $k = 17$.

4. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan: Graf kipas, graf tangga, graf prisma, graf lintasan, graf sikel dan graf buku (B_2) merupakan pelabelan sisi ajaib super.

5 DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa,Ketut. 2003. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

[2] Galian, Joseph. 2010. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. dalam jurnal the electronic journal of combinatoric 17. No.DS6.

[3] Hikoe, Enomoto. 1998. *Super edge-magic graph*. Dalam SUT Journal of Mathematics Vol 34, No. 2 (1998), 105-109. http://web.thu.edu.tw/wang/www/SEM_98.pdf diakses pada tanggal 10 Juli 2012

[4] Indah, Marta Rosa. 2013. *Pelabelan total sisi ajaib titik terurut pada graf*. Universitas Negeri Surabaya.

[5] Jamila. 2009. *Pelabelan total sisi ajaib kuat graph sikel dengan sebuah chord dan graph* $(C_n + A_p)$. Universitas Negeri Surabaya.

[6] R.M. Figueroa, Centeno. 2001. *The place of super edge-magic labelings among otherclasses of labelings.* Dalam jurnal Discrete Mathematics 231 (2001) 153–168.http://web.thu.edu.tw/wang/www/SEM_among.pdfdiakses pada tanggal 10 Juli 2012.

[7] Sukiman,.2005. *Pengantar Aljabar Abstrak Malang* : UM. Press

[8] Sutomo, Heri,dkk.2005. *Matematika Diskrit Malang* :UM.Press