

PENGEMBANGAN MODEL MATEMATIKA DETERMINISTIK PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH

P. SIANTURI¹, A. KUSNANTO¹, H. SUMARNO¹

Abstrak

Pada tulisan ini akan dikembangkan model penyebaran penyakit demam berdarah pada populasi manusia, dan nyamuk dengan mengambil kasus Kabupaten Sukabumi di Jawa Barat. Dengan menggunakan data tersebut, maka dapat digambarkan kondisi penyebaran penyakit demam berdarah. Penyakit demam berdarah dapat menjadi kasus epidemik apabila banyaknya individu yang terinfeksi terus meningkat. Dengan melakukan analisis dan perhitungan diperoleh bilangan reproduksi dasar R_0 yang dapat memprediksi terjadinya kasus endemik. Selanjutnya dilakukan simulasi model dengan pengaruh suhu menunjukkan bahwa peningkatan suhu mengakibatkan R_0 naik sehingga penyebaran penyakit demam berdarah semakin mewabah dan semakin besar nilai rata-rata gigitan nyamuk menyebabkan penyebaran penyakit demam berdarah mewabah.

Kata kunci: demam berdarah, endemik, bilangan reproduksi dasar

1 PENDAHULUAN

Demam berdarah *dengue* atau *Dengue haemorrhagic fever* (DHF) adalah penyakit yang disebabkan oleh virus *dengue* yang ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes Aegypti* dan *Aedes albopictus*. Penyakit ini memiliki empat serotipe virus *dengue*, yaitu DEN-1, DEN-2, DEN-3 dan DEN-4 (WHO 2009). Virus *dengue* yang dibawa oleh nyamuk *Aedes Aegypti* mencari inang untuk ditempatinya. Ketika virus mendapatkan sel inang untuk melangsungkan hidupnya, virus akan bereproduksi dan menghasilkan virus-virus baru. Masa inkubasi dari infeksi virus *dengue* ini berkisar 8 sampai 10 hari, dimana masa inkubasi adalah masa mulai saat penularan penyakit masuk ke dalam tubuh sampai saat timbulnya penyakit [1].

Virus *dengue* adalah salah satu penyebab munculnya gejala demam berdarah *dengue* atau demam berdarah yang memerlukan bantuan dari nyamuk *Aedes* untuk berpindah ke tubuh manusia. Umur nyamuk *Aedes* hanya 10 hari, paling lama 2-3 minggu. Bertelur 200-400 butir. Perindukannya bukan di air kotor seperti nyamuk lain, melainkan di air jernih yang tergenang. Virus *dengue*

¹ Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

berukuran mikron dan terbagi menjadi 4 tipe. Setelah terinfeksi ke dalam tubuh manusia, virus hanya bertahan hidup tidak lebih dari 12 hari [2].

Penularan virus ini dapat dikelompokkan menjadi dua mekanisme. Mekanisme pertama, transmisi vertikal dalam tubuh nyamuk, dimana virus dapat ditularkan oleh nyamuk betina pada telurnya dan juga dapat ditularkan dari nyamuk jantan ke nyamuk betina melalui kontak seksual, tetapi tidak berlaku sebaliknya [3]. Mekanisme kedua, transmisi dari nyamuk ke dalam tubuh manusia dan sebaliknya. Penularan dari manusia kepada nyamuk hanya dapat terjadi bila nyamuk menggigit manusia yang sedang mengalami viremia, yaitu 2 hari sebelum panas sampai 5 hari setelah demam timbul. Setelah virus berada dalam tubuh nyamuk, virus yang sampai ke dalam lambung nyamuk akan berkembang biak, kemudian akan migrasi yang akhirnya akan sampai di kelenjar ludah memerlukan waktu 8-10 hari untuk menyelesaikan masa inkubasi ekstrinsik. Virus yang berada pada lokasi ini setiap saat sudah dapat ditularkan kembali kepada manusia.

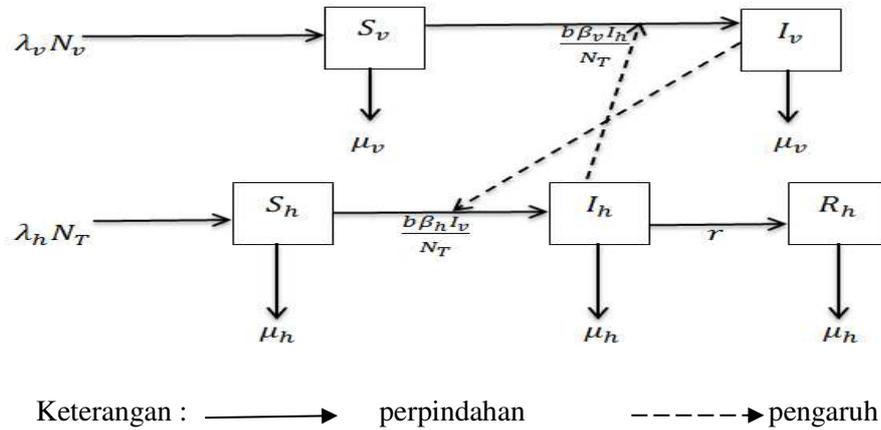
2 PEMODELAN

Populasi manusia dibagi menjadi tiga kelas, yaitu manusia yang rentan, manusia yang terkena infeksi, dan manusia yang sembuh. Manusia yang rentan adalah manusia yang bukan imun dan tidak terkena infeksi. Manusia yang terkena infeksi adalah manusia yang terkena virus demam berdarah dan dapat menularkan kepada individu lain dengan perantara nyamuk. Manusia sembuh adalah manusia yang sembuh dari penyakit dan tidak dapat tertular lagi. Populasi nyamuk dibedakan menjadi dua kelas yaitu nyamuk yang rentan dan nyamuk yang terkena infeksi. Nyamuk yang rentan adalah nyamuk yang rentan terhadap penyakit demam berdarah *dengue*. Sedangkan nyamuk terinfeksi adalah nyamuk yang terkena infeksi dan dapat menularkan kepada individu lain.

Model penyebaran virus demam berdarah dalam penelitian ini menggunakan asumsi : total populasi nyamuk dan total populasi manusia adalah konstan sehingga laju kelahiran sama dengan laju kematian, populasi manusia dan nyamuk adalah populasi yang tertutup, rata-rata gigitan nyamuk pada manusia per hari adalah konstan, dan nyamuk tidak pernah sembuh setelah terinfeksi.

Dari asumsi-asumsi tersebut, proporsi perpindahan manusia rentan (S_h) ke manusia terinfeksi (I_h) dipengaruhi oleh peluang kontak antara nyamuk terinfeksi (I_v) dengan manusia rentan (S_h), dengan nilai peluang transmisi virus dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (β_h) dengan banyaknya inang yang menjadi sumber makanan nyamuk (N_T) dikalikan dengan rata-rata gigitan nyamuk pada manusia per hari (b), dinyatakan sebagai berikut: $\frac{b\beta_h I_v}{N_T}$. manusia terinfeksi setiap hari yang meninggal secara alami sebanyak $\mu_h I_h$. Proporsi perpindahan nyamuk rentan (S_v) akibat menggigit manusia terinfeksi (I_h) per hari dipengaruhi oleh nilai peluang transmisi virus demam berdarah dari manusia ke nyamuk (β_v) dengan banyaknya inang yang menjadi sumber makanan nyamuk (N_T) dikalikan

dengan rata-rata gigitan nyamuk pada manusia per hari (b) dan banyaknya manusia yang terinfeksi (I_h), dinyatakan sebagai berikut: $\frac{b\beta_v I_h}{N_T}$. Nyamuk rentan mati secara alami sebanyak $\mu_v S_v$ per hari. Hubungan kompartemen manusia dan nyamuk, digambarkan dalam Gambar 1 berikut:



Gambar 1 Skema Penyebaran penyakit demam berdarah

Berdasarkan skema Gambar 1, dapat dimodelkan menggunakan sistem persamaan diferensial :

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{dt} &= \lambda_h N_T - \left(\frac{b\beta_h I_v}{N_T} \right) S_h - \mu_h S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{b\beta_h I_v}{N_T} S_h - (\mu_h + r) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= r I_h - \mu_h R_h \\ \frac{ds_v}{dt} &= \lambda_v N_v - \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v I_v. \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $N_T = S_h + I_h + R_h$ dan $N_v = S_v + I_v$.
 Sehingga :

$$R_h = N_T - S_h - I_h \text{ dan } S_v = N_v - I_v.$$

Dengan parameter yang digunakan adalah:

Par	Keterangan	Par	Keterangan
N_T	total populasi manusia	N_v	total populasi nyamuk
λ_h	laju kelahiran manusia (per	λ_v	laju kelahiran nyamuk

	hari),		
μ_h	laju kematian manusia	μ_v	laju kematian nyamuk
r	laju kesembuhan manusia terinfeksi (per hari).	b	rata-rata gigitan nyamuk pada manusia (per hari)
β_h	peluang transmisi virus demam berdarah dari nyamuk ke manusia	β_v	peluang transmisi virus demam berdarah dari manusia ke nyamuk

Sistem persamaan (1) dapat disederhanakan dengan pemisalan $S^h = \frac{S_h}{N_T}$, $I^h = \frac{I_h}{N_T}$, $R^h = \frac{R_h}{N_T}$, $S^v = \frac{S_v}{N_v}$, dan $I^v = \frac{I_v}{N_v}$, maka diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dS^h}{dt} &= \lambda_h - \gamma_h S^h I^v - \mu_h S^h \\ \frac{dI^h}{dt} &= \gamma_h S^h I^v - (\mu_h + r) I^h \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dI^v}{dt} = \gamma_v (1 - I^v) I^h - \mu_v I^v.$$

Di mana $\gamma_v = b\beta_v$, $\gamma_h = b\beta_h n$, dan $n = \frac{N_v}{N_T}$ dengan tiga kondisi $S^h + I^h + R^h = 1$ dan $S^v + I^v = 1$, dan $\beta_H = mab_H$, $\beta_M = ab_M$ dengan $m = \frac{N_M}{N_H}$ yaitu rasio vektor (nyamuk betina) terhadap populasi manusia atau banyaknya nyamuk betina per manusia.

Pengembangan model di atas dilakukan karena diasumsikan bahwa hanya nyamuk terinfeksi yang dapat menularkan virus pada populasi manusia. Misalkan c merupakan banyak nyamuk terinfeksi yang belum menularkan penyakit. Maka sistem persamaan penularan penyakit demam berdarah (1) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda_h N_T - \left(\frac{b\beta_h}{N_T} \right) S_h (1 - c) I_v - \mu_h S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{b\beta_h}{N_T} S_h (1 - c) I_v - (\mu_h + r) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = r I_h - \mu_h R_h$$

(3)

$$\frac{dS_v}{dt} = \lambda_v N_v - \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v I_v.$$

Variasi di dalam masa inkubasi ekstinstik disebabkan oleh perubahan-perubahan suhu, semakin rendah suhu masa inkubasi semakin lama ini adalah

penyebab pola suhu dalam penyebaran penyakit demam berdarah. Pada kasus ini pengaruh suhu masuk kedalam sistem persamaan karena bergantung pada c , sehingga fraksi nyamuk yang terinfeksi dituliskan sebagai $c = \int_0^\tau e^{-\mu_v t} dt = \frac{1 - e^{-\mu_v \tau}}{\mu_v}$, dimana τ adalah periode masa inkubasi virus di dalam nyamuk (dalam hari). Selanjutnya, substitusi ke dalam peluang transmisi penyebaran virus dari nyamuk ke manusia $\beta_h^m = \beta_h(1 - c)$. β_h^m ini dapat dinyatakan sebagai suatu variasi sinusoidal sehingga $\beta_h^m = \beta_h(1 + \varepsilon \sin \varphi t)$, dengan ε adalah ukuran pengaruh suhu pada proses transmisi [4]. Dengan demikian model matematika karena pengaruh suhu (3) dapat dinyatakan oleh persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda_h N_T - \left(\frac{b\beta_h^m}{N_T} \right) S_h I_v - \mu_h S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{b\beta_h^m}{N_T} S_h I_v - (\mu_h + r) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = r I_h - \mu_h R_h$$

(4)

$$\frac{dS_v}{dt} = \lambda_v N_v - \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{b\beta_v I_h}{N_T} S_v - \mu_v I_v.$$

Sistem persamaan (4) dapat disederhanakan dengan pemisalan $S^h = \frac{S_h}{N_T}$, $I^h = \frac{I_h}{N_T}$, $R^h = \frac{R_h}{N_T}$, $S^v = \frac{S_v}{N_v}$, dan $I^v = \frac{I_v}{N_v}$, maka diperoleh sistem persamaan:

$$\frac{dS^h}{dt} = \lambda_h - \gamma_h^m S^h I^v - \mu_h S^h$$

$$\frac{dI^h}{dt} = \gamma_h^m S^h I^v - (\mu_h + r) I^h$$

(5)

$$\frac{dI^v}{dt} = \gamma_v (1 - I^v) I^h - \mu_v I^v.$$

di mana $\gamma_v = b\beta_v$, $\gamma_h^m = b\beta_h^m n$, dan $n = \frac{N_v}{N_T}$ dengan tiga kondisi $S^h + I^h + R^h = 1$ dan $S^v + I^v = 1$.

3 PENENTUAN TITIK TETAP DAN KESTABILANNYA

Model Tanpa Pengaruh Suhu

Titik tetap yang diperoleh dari persamaan (2) adalah: (i) titik tetap bebas penyakit $T_1(S^h, I^h, I^v) = T_1(1, 0, 0)$ dan (ii) titik tetap endemik, yaitu $T_2(S_*^h, I_*^h, I_*^v)$ dengan $S_*^h = \frac{L\beta + \beta}{\beta + LA^0}$, $I_*^h = \frac{A^0 - 1}{\beta + LA^0}$ dan $I_*^v = \frac{\beta(A^0 - 1)}{A^0(L + \beta)}$. Untuk penyederhanaan, dituliskan $\beta = \frac{b\beta_v}{\mu_v}$, $L = \frac{\mu_h + r}{\mu_h}$, $A^0 = \frac{b^2\beta_h\beta_v n}{\mu_v(\mu_h + r)}$.

Dengan melakukan pelinearan terhadap sistem persamaan (3), diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h S^h \\ \gamma_h I^v & -\mu_h - r & \gamma_h S^h \\ 0 & \gamma_v(1 - I^v) & \gamma_v I^h - \mu_v \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Kestabilan dari suatu titik tetap dapat dilihat dari nilai eigennya [5]. Nilai eigen sendiri dapat dicari dari persamaan karakteristik yang merupakan determinan dari matriks Jacobi. Titik tetap $T_1(1, 0, 0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan matriks Jacobi persamaan (6), sehingga dihasilkan matriks Jacobi

$$J_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h \\ 0 & -\mu_h - r & \gamma_h \\ 0 & \gamma_v & -\mu_v \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(J_{(1,0,0)} - \lambda I) = 0$, diperoleh nilai eigen untuk matriks $J_{(1,0,0)}$, yaitu: $\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 = \frac{-\mu_h - r - \mu_v + \sqrt{(\mu_h + r + \mu_v)^2 - 4(\mu_v(\mu_h + r) - b^2\beta_h\beta_v n)}}{2}$ dan

$$\lambda_3 = \frac{-\mu_h - r - \mu_v - \sqrt{(\mu_h + r + \mu_v)^2 - 4(\mu_v(\mu_h + r) - b^2\beta_h\beta_v n)}}{2}.$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka $\lambda_1 < 0$. Nilai eigen kedua dan ketiga bergantung pada nilai $\beta_h\beta_v$ dan $\mu_v(\mu_h + r)$ dengan persamaan

$$\lambda_{2,3} = \frac{\sqrt{-\mu_v(\mu_h + r) + b^2\beta_h\beta_v n}}{2}.$$

Titik tetap bebas penyakit bersifat stabil jika $\lambda_{2,3} < 0$ sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar [6] sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{b^2\beta_h\beta_v n}{\mu_v(\mu_h + r)}}. \quad (7)$$

Dari persamaan (7), titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan bersifat takstabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Menentukan kestabilan titik tetap endemik dilakukan dengan menyubtitusikan $T_2(S_h^*, I_h^*, I_v^*)$ ke dalam matriks Jacobi, sehingga dihasilkan matriks Jacobi

$$J_{(S_h^*, I_h^*, I_v^*)} = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h \frac{L + \beta}{\beta + LA^0} \\ \gamma_h \frac{\beta(A^0 - 1)}{A^0(\beta + L)} & -\mu_h - r & \gamma_h \frac{L + \beta}{\beta + LA^0} \\ 0 & \gamma_v \left(1 - \frac{\beta(A^0 - 1)}{A^0(\beta + L)}\right) & \gamma_v \frac{A^0 - 1}{\beta + LA^0} - \mu_v \end{bmatrix}$$

Sistem akan stabil jika semua nilai eigen yang diperoleh oleh matriks Jacobi mempunyai bilangan riil negatif. Nilai eigen matriks Jacobi dapat ditentukan dengan menyelesaikan $\det(J_{T_2} - \lambda I) = 0$. Jadi dengan demikian, diperoleh persamaan karakteristik dari J_{T_2} , yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \tag{8}$$

dengan

$$a_0 = -tr(J_{T_2}), \quad a_1 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\det(J_{T_2})$$

yaitu

$$a_0 = \mu_h \frac{\beta + LA^0}{\beta + L} + \mu_h L + \mu_v A^0 \left(\frac{L + \beta}{\beta + LA^0} \right)$$

$$a_1 = \mu_h^2 L \left(\frac{\beta + LA^0}{\beta + L} \right) + \mu_h \mu_v A^0 + (A^0 - 1) \left(\frac{\mu_v \mu_h \beta L}{\beta + LA^0} \right)$$

$$a_2 = \mu_v \mu_h^2 L (A^0 - 1).$$

Nilai eigen (λ) dari persamaan (8) sulit ditentukan, maka kestabilan di di sekitar titik tetap T_2 akan diselidiki dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz kestabilan sistem pada titik tetap $T_2(S_h^*, I_h^*, I_v^*)$ akan stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut :

$$a_0 > 0, \quad \text{dan } a_2 > 0, \quad \text{dan } a_0 a_1 > a_2.$$

Berdasarkan kondisi tersebut, jika $A^0 > 1$ maka diperoleh $a_0 > 0$, dan $a_2 > 0$, dan $a_0 a_1 > a_2$. Dengan demikian kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi jika $A^0 > 1$, dengan kata lain titik tetap $T_2(S_h^*, I_h^*, I_v^*)$ stabil jika $A^0 > 1$. Nilai $\sqrt{A^0} = \mathcal{R}_0$ adalah nilai bilangan reproduksi dasar penyebaran penyakit demam berdarah.

Model Dengan Pengaruh Suhu

Dengan melakukan pelinearan terhadap sistem persamaan (5), diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h^m S^h \\ \gamma_h^m I^v & -\mu_h - r & \gamma_h^m S^h \\ 0 & \gamma_v(1 - I^v) & \gamma_v I^h - \mu_v \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Titik tetap $T_1(1,0,0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan matriks Jacobi persamaan (9), sehingga dihasilkan matriks Jacobi

$$J_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h^m \\ 0 & -\mu_h - r & \gamma_h^m \\ 0 & \gamma_v & -\mu_v \end{bmatrix}.$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(J_{(1,0,0)} - \lambda I) = 0$, diperoleh nilai eigen untuk matriks $J_{(1,0,0)}$, yaitu: $\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 =$

$$\frac{-\mu_h - r - \mu_v + \sqrt{(\mu_h + r + \mu_v)^2 - 4(\mu_v(\mu_h + r) - b^2 \beta_h^m \beta_v n)}}{2} \text{ dan}$$

$\lambda_3 = \frac{-\mu_h - r - \mu_v - \sqrt{(\mu_h + r + \mu_v)^2 - 4(\mu_v(\mu_h + r) - b^2 \beta_h^m \beta_v n)}}{2}$. Karena semua parameter bernilai positif, maka akan diperoleh bilangan reproduksi dasar sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{b^2 \beta_h^m \beta_v n}{\mu_v(\mu_h + r)}}. \quad (10)$$

Titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan bersifat takstabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Menentukan kestabilan titik tetap endemik dilakukan dengan menyubstitusikan $T_2(S_*^h, I_*^h, I_*^v)$ ke dalam matriks Jacobi, sehingga dihasilkan matriks Jacobi

$$J_{(S_*^h, I_*^h, I_*^v)} = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\gamma_h^m \frac{L+\beta}{\beta+LA_m^0} \\ \gamma_h^m \frac{\beta(A_m^0-1)}{A_m^0(\beta+L)} & -\mu_h - r & \gamma_h^m \frac{L+\beta}{\beta+LA_m^0} \\ 0 & \gamma_v \left(1 - \frac{\beta(A_m^0-1)}{A_m^0(\beta+L)}\right) & \gamma_v \frac{A_m^0-1}{\beta+LA_m^0} - \mu_v \end{bmatrix}.$$

Sistem akan stabil jika semua nilai eigen yang diperoleh oleh matriks Jacobi mempunyai bilangan riil negatif. Nilai eigen matriks Jacobi dapat ditentukan

dengan menyelesaikan $\det(J_{T_2} - \lambda I) = 0$. Jadi dengan demikian, diperoleh persamaan karakteristik dari J_{T_2} , yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \quad (11)$$

Dengan

$$a_0 = -\text{tr}(J_{T_2}), \quad a_1 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\det(J_{T_2})$$

yaitu

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_h \frac{\beta + LA_m^0}{\beta + L} + \mu_h L + \mu_v A_m^0 \left(\frac{L + \beta}{\beta + LA_m^0} \right) \\ a_1 &= \mu_h^2 L \left(\frac{\beta + LA_m^0}{\beta + L} \right) + \mu_h \mu_v A_m^0 + (A_m^0 - 1) \left(\frac{\mu_v \mu_h \beta L}{\beta + LA_m^0} \right) \\ a_2 &= \mu_v \mu_h^2 L (A_m^0 - 1). \end{aligned}$$

Nilai eigen (λ) dari persamaan (11) sulit ditentukan, maka kestabilan di di sekitar titik tetap T_2 akan diselidiki dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz kestabilan sistem pada titik tetap $T_2(S_h^*, I_h^*, I_v^*)$ akan stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut :

$$a_0 > 0, \quad \text{dan } a_2 > 0, \quad \text{dan } a_0 a_1 > a_2.$$

Berdasarkan kondisi tersebut, jika $A^0 > 1$ maka diperoleh $a_0 > 0$, dan $a_2 > 0$, dan $a_0 a_1 > a_2$. Dengan demikian kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi jika $A^0 > 1$, dengan kata lain titik tetap $T_2(S_h^*, I_h^*, I_v^*)$ stabil jika $A^0 > 1$. Nilai $\sqrt{A^0} = \mathcal{R}_0$ adalah nilai bilangan reproduksi dasar penyebaran penyakit demam berdarah.

4 SIMULASI MODEL UNTUK KASUS JAWA BARAT

Nilai-nilai parameter yang akan dimasukkan dalam simulasi adalah nilai parameter yang diambil dari Kabupaten Sukabumi pada tahun 2016. Nilai-nilai parameter yang akan dimasukkan dalam simulasi adalah μ_h yaitu laju kematian populasi manusia dengan $\mu_h = 0.0000391$ per hari. Rata-rata hidup nyamuk adalah 14 hari [4], maka laju kematian nyamuk $\mu_v = \frac{1}{14} = 0.071$ per hari. Laju kematian sama dengan laju kelahiran ($\mu_v = \lambda_v$). Nilai parameter seluruhnya ditunjukkan pada Tabel 1 berikut.

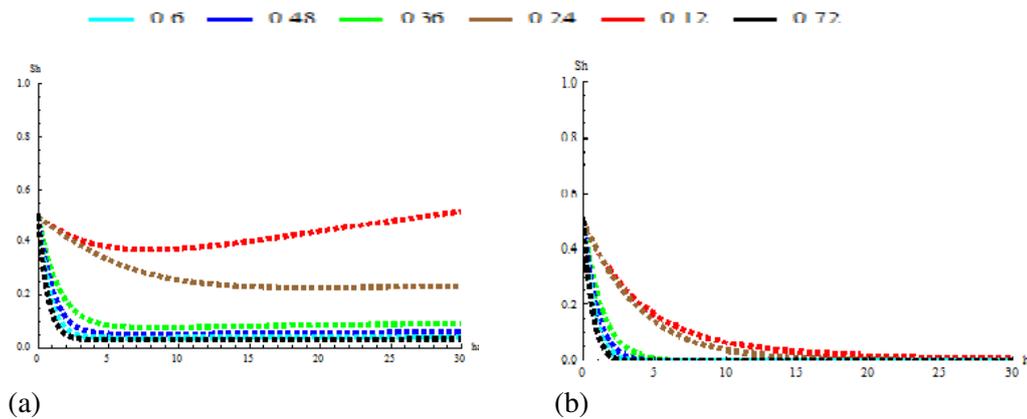
Tabel 1 Nilai-nilai Parameter

Parameter	Definisi	Nilai
λ_h	Laju kelahiran manusia per hari	0.0000391
λ_v	Laju kelahiran nyamuk per hari	0.071
μ_h	Laju kematian manusia per hari	0.0000391
μ_v	Laju kematian nyamuk per hari	0.071
β_h	peluang transmisi virus demam berdarah dari nyamuk ke manusia	0.5
β_v	peluang transmisi virus demam berdarah dari manusia ke nyamuk	0.7
b	Rata-rata gigitan nyamuk per hari	0.6* 0.07**
r	laju kesembuhan manusia terinfeksi per hari	1/3
n	Perbandingan populasi nyamuk dengan populasi manusia	10

Ket: *Nilai b untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

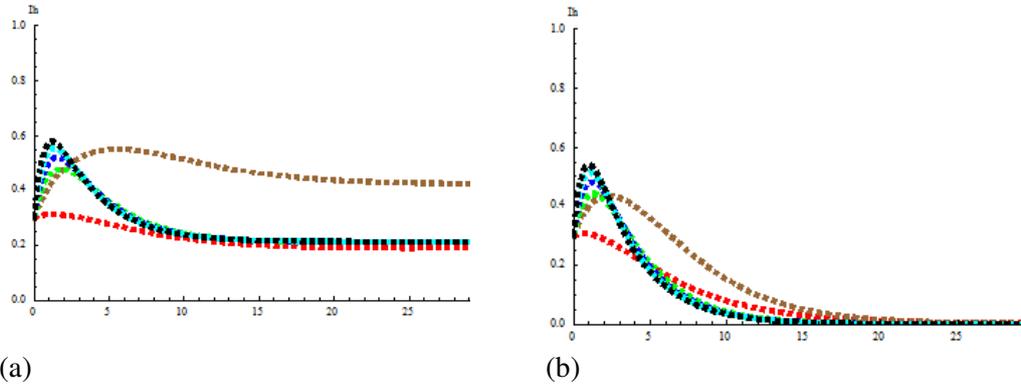
**Nilai b untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

Kasus 1 : Dinamika populasi manusia dan nyamuk dengan mengubah nilai rata-rata gigitan nyamuk (b)



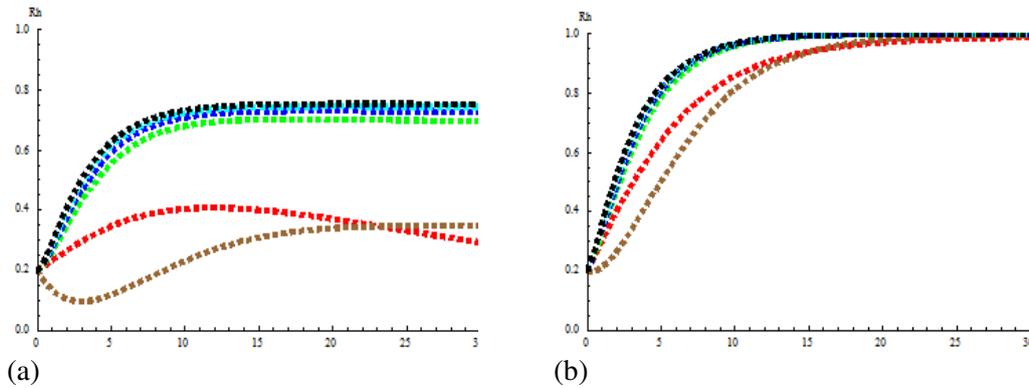
Gambar 2 Proporsi manusia rentan (S_h) pada model tanpa (a) dan dengan pengaruh suhu (b)

Pada Gambar 2 ditunjukkan bahwa dinamika populasi manusia rentan pada model tanpa dan dengan pengaruh suhu terus menurun dengan rata-rata ggigitan nyamuk terinfeksi, ini artinya makin mewabahnya penyakit maka populasi manusia rentan semakin menurun.



Gambar 3 Proporsi manusia terinfeksi (I_h) pada model tanpa (a) dan dengan pengaruh suhu (b)

Pada Gambar 3 ditunjukkan bahwa dinamika populasi manusia terinfeksi pada model tanpa dan dengan pengaruh suhu akan meningkat seiring dengan meningkatnya rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi yang artinya mewabahnya penyakit ini menyebabkan manusia terinfeksi semakin banyak.



Gambar 4 Proporsi manusia sembuh (R_h) pada model tanpa (a) dan dengan pengaruh suhu (b)

Pada Gambar 4 ditunjukkan bahwa dinamika populasi manusia sembuh pada model tanpa dan dengan pengaruh suhu akan meningkat seiring makin besarnya rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi, ini artinya mewabahnya penyakit mengakibatkan manusia menjadi sembuh menjadi banyak setelah terinfeksi. Rata-rata gigitan nyamuk (b) juga mempengaruhi nilai bilangan reproduksi dasar yang menyatakan mewabahnya penyakit, dimana semakin besar nilai rata-rata gigitan nyamuk (b) semakin mewabahnya penyakit.

5 SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat disimpulkan hasil analisis yang telah dilakukan pada model penyebaran penyakit demam berdarah tanpa dan dengan pengaruh suhu diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap tanpa penyakit $T_1(S^h, I^h, I^v) = T_1(1, 0, 0)$ dan titik tetap endemik $T_2(S_*^h, I_*^h, I_*^v)$ dengan S_*^h adalah proporsi manusia rentan, I_*^h adalah proporsi manusia terinfeksi, dan I_*^v adalah proporsi nyamuk terinfeksi. Pada titik tetap T_1 , populasi hanya terdiri dari proporsi manusia rentan saja. Sedangkan pada titik tetap T_2 , populasi terdiri dari tiga kelas. Analisis kestabilan bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 , dengan \mathcal{R}_0 adalah bilangan reproduksi dasar. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik tetap T_1 bersifat stabil. Pada titik tetap T_2 bersifat stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Bilangan reproduksi dasar ini menentukan mewabah atau tidaknya suatu penyakit. Hasil simulasi menunjukkan bahwa memberikan pengaruh suhu mengakibatkan \mathcal{R}_0 naik sehingga penyebaran penyakit demam berdarah semakin mewabah. Hasil simulasinya lainnya diperoleh bahwa meningkatkan rata-rata gigitan nyamuk memberikan pengaruh terhadap populasi manusia. Pada populasi manusia rentan akan semakin meningkat seiring dengan semakin besar rata-rata gigitan nyamuk sedangkan populasi manusia terinfeksi semakin menurun. Sementara populasi nyamuk terinfeksi akan semakin menurun apabila rata-rata gigitan nyamuk semakin kecil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai rata-rata gigitan nyamuk, penyebaran penyakit akan mewabah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nuraini N, Soewono E, Sidarto KA. 2007. A Mathematical Model of Dengue Internal Transmission Process. *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)*. 13(1): 123- 132.
- [2] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2013. Buku Saku Pengendalian Demam Berdarah Dengue untuk Pengelola Program demam berdarah Puskesmas.
- [3] Malavige GN, Fernando S, Fernando DJ, Seneviratne SL. 2004. Dengue Viral Infections. *Postgrad Med J*. 80: 588–601. doi: 10.1136/pgmj.2004.019638.
- [4] Pongsumpun P. 2006. Transmission Model for Dengue Disease with and without the Effect of Extinctic Period. *KMITL Sci. Tech. J*. 6: 74-82.
- [5] Tu PNV. 1994. *Dynamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York (US): Springer-Verlag
- [6] Van den Driessche P, Watmough J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29-48. PII: S0025-5564(02)00108-6.