

# POLINOMIAL KARAKTERISTIK BEBERAPA KELAS GRAF BERARAH

Nuri Wardani<sup>1</sup>, I Ketut Budayasa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Surabaya, 60931

<sup>2</sup>Jurusan Matematika, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Surabaya, 60931

email : [nurjubex@gmail.com](mailto:nurjubex@gmail.com)<sup>1</sup>, [ketutbudayasa@yahoo.com](mailto:ketutbudayasa@yahoo.com)<sup>2</sup>

## ABSTRAK

Persamaan figuratif adalah metode untuk mengkonstruksi polinomial karakteristik graf berarah  $D$  dengan  $n$  titik ( $X(D)$ ) tanpa menggunakan matrik berhubungan langsung. Pada skripsi ini akan dipelajari bagaimana persamaan figuratif digunakan dalam mengkaji formula untuk menghitung setiap koefisien  $t_i$  dengan  $1 \leq i \leq n$  dari suatu  $X(D) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \dots + t_{n-1}x + t_n$ . Graf linier, graf siklik dan graf tangga adalah tiga graf kompleks yang akan dikaji polinomial karakteristiknya. Akan dibuktikan bahwa setiap koefisien  $t_i$  untuk  $i$  ganjil pada graf linier dengan  $n$  titik adalah sama dengan nol, dan

$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$  untuk  $i$  genap. Pada graf siklik dengan  $n$  titik juga akan dibuktikan bahwa koefisien  $t_i = 0$  jika  $i$  ganjil dan  $i < n$ , sedangkan koefisien  $t_i$  untuk  $i$  genap dan  $i < n$  adalah

$(-1)^{\frac{i}{2}} \frac{n}{n-\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ . Koefisien ganjil pada graf

tangga dengan  $n$  titik adalah nol sedangkan untuk

setiap  $l_i$  dengan  $i$  genap,  $l_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$ .

**Kata kunci :** graf linier, graf siklik, graftangga, polinomial karakteristik, persamaan figuratif

## PENDAHULUAN

Graf berarah (*digraph*) adalah salah satu kajian dalam teori graf yang merupakan pasangan berurutan dari dua himpunan  $V(D)$  yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan  $\tau(D)$  yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur, sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dari dua titik di  $V(D)$ . Setiap graf berarah dengan jumlah titik berhingga dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar (diagram) dan dalam bentuk matrik, salah satunya adalah

matrik berhubungan langsung (*adjacency matrix*) yang merupakan matrik persegi berordo  $n \times n$ .

Polinomial karakteristik adalah suatu persamaan polinom (suku banyak) yang didapat dari suatu matrik persegi dengan mencari nilai eigen dari matrik tersebut. Jika diberikan suatu matrik persegi berordo  $n \times n$  dapat dikonstruksi polinomial karakteristiknya dengan pangkat tertinggi  $n$ .

Polinomial karakteristik dari suatu graf berarah dengan jumlah titik berhingga dapat dikonstruksi dengan mencari nilai eigen matrik berhubungan langsungnya. Persamaan figuratif (*Figure Equation*) adalah metode yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi polinomial karakteristik suatu graf tanpa menggunakan matrik berhubungan langsung (*adjacency matrix*) tetapi dengan menghitung setiap koefisien dari polinomial karakteristik secara umum.

Polinomial karakteristik dari sebarang graf berarah  $D$  dengan  $n$  titik adalah  $X(D) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n$ , setiap koefisien  $c_i$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dapat dihitung dengan memeriksa  $\mathcal{L}_i$  yaitu himpunan subgraf berarah dengan panjang  $i$ . Untuk beberapa kelas graf berarah yang lebih kompleks dan memiliki banyak titik, konstruksi polinomial karakteristik dengan menggunakan definisi persamaan figuratif cukup sulit dilakukan. Oleh karena itu dapat diturunkan suatu formula untuk menghitung koefisien dari beberapa kelas graf berarah dengan menggunakan dasar definisi persamaan figuratif.

## KAJIAN TEORI

### 2.1 Graf

#### Definisi 2.1

Sebuah graf  $G$  berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  dari obyek-obyek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong)  $E(G)$  yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di  $V(G)$ . Himpunan  $V(G)$

disebut himpunan titik  $G$  dan himpunan  $E(G)$  disebut himpunan sisi  $G$ .

**Definisi 2.2**

Graf berarah  $D$  adalah suatu pasangan berurutan dari dua himpunan  $V(D)$  yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan  $\tau(D)$  yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dari dua titik di  $V(D)$ . Jika  $v_1$  dan  $v_2$  adalah dua titik pada graf berarah  $D$  dan  $e = (v_1, v_2)$  sebuah busur  $D$ , maka  $e$  disebut busur-keluar (*outdegree*) dari titik  $v_1$  dan  $e$  disebut busur – menuju (*indegree*) titik  $v_2$ .

**Definisi 2.3**

Matrik berhubungan langsung dari sebuah graf berarah  $D$  adalah  $A(D)$  yaitu sebuah matrik bilangan bulat berordo  $n \times n$  dimana banyaknya baris dan kolom sama dengan banyaknya titik dari graf berarah  $D$ , matrik  $e-uv$  sama dengan 1 jika terdapat busur dari titik  $u$  ke  $v$  dan 0 jika tidak terdapat busur dari titik  $u$  ke  $v$ .

**Definisi 2.4**

Sebuah graf  $H$  dikatakan sub graf berarah dari graf berarah  $D$  dinotasikan dengan  $H \subseteq D$  jika  $V(H) \subseteq V(D)$  dan  $\tau(H) \subseteq \tau(D)$ .

**Definisi 2.5**

Sub graf berarah linier dari suatu graf berarah  $D$  adalah suatu graf baru  $K$  dengan  $V(K) \subseteq V(D)$  dan  $\tau(K) \subseteq \tau(D)$  sedemikian hingga setiap titik pada graf berarah  $K$  memiliki *indegree* dan *outdegree* sama dengan 1.

Sub graf berarah linier dengan panjang  $i$  terdiri dari  $i$  titik dan  $i$  sisi sedemikian hingga setiap titik memiliki *indegree* dan *outdegree* sama dengan 1.

**2.2 Grup**

**Definisi 2.7**

Diketahui himpunan takkosong  $B$  dengan operasi  $*$ . Himpunan  $B$  disebut grup terhadap operasi  $*$  jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- ✚ Memenuhi sifat ketertutupan ( $\forall a, b \in B$  berlaku  $a * b \in B$ )
- ✚ Asosiatif ( $\forall a, b, c \in B$  berlaku  $(a * b) * c = a * (b * c)$ )
- ✚ Memuat elemen identitas ( $\exists e \in B, \forall a \in B$  berlaku  $e * a = a * e = a$ )
- ✚ Setiap elemen  $B$  memiliki Invers ( $\forall a \in B, \exists a^{-1} \in B$  sedemikian hingga  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ )

**Definisi 2.8**

Suatu grup  $(B, *)$  disebut grup siklik jika terdapat  $b \in B$  sedemikian hingga untuk setiap  $a \in B$  dapat dinyatakan sebagai  $a = b^n$  untuk suatu  $n \in \mathbb{Z}$ .  $b$  disebut elemen pembangun atau generator dari  $B$  dan  $B$  merupakan grup siklik yang dibangun oleh  $b$ , dapat dinotasikan  $B = \langle b \rangle$ , dapat juga dinyatakan sebagai  $\langle b \rangle = \{b^n | n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definisi 2.9**

Sebuah subset  $(S, *)$  dari suatu grup  $(B, *)$  disebut himpunan generator (*generating set*) jika hanya jika setiap elemen di  $B$  dapat dinyatakan sebagai hasil operasi elemen-elemen  $S$  dan inversnya.

**2.3 Graf Cayley**

**Definisi 2.10 :**

Misalkan  $(B, *)$  adalah grup berhingga dan  $S$  adalah himpunan generator maka graf cayley dari  $(B, *)$  dengan himpunan generator  $S$  dapat ditulis  $C(B, S)$  adalah graf sedemikian hingga :

- Setiap elemen di  $(B, *)$  merupakan titik di graf cayley  $C(B, S)$  sehingga order dari grup  $B$  (banyaknya elemen  $B$ ) sama dengan banyaknya titik pada graf cayley  $C(B, S)$ .
- $(a, b)$  merupakan busur graf cayley jika dan hanya jika  $a * s = b$ , dari  $a$  ke  $b$  untuk  $s \in S$ .

**2.4 Polinomial Karakteristik**

**Definisi 2.11**

Misalkan diketahui sebuah matrik persegi  $A$  berordo  $n \times n$ , nilai eigen dari matrik  $A$  adalah sebuah skalar  $x$  dimana terdapat matrik tak nol  $W$  berordo  $n \times 1$  sedemikian hingga  $AW = xW \dots (1)$ . Matrik kolom  $W$  disebut vector eigen yang bersesuaian dengan  $x$ . Nilai eigen juga disebut sebagai nilai asli atau karakteristik.

Untuk mendapatkan nilai eigen  $x$  dari matrik  $A$  persamaan (1) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\begin{aligned} xW - AW &= 0 \\ (x - A)W &= 0 \\ (xI - A)W &= 0 \end{aligned}$$

$I$  adalah matrik identitas berordo  $n \times n$ .  $W$  adalah vektor tak nol, agar  $x$  menjadi nilai eigen harus terdapat solusi tak nol dari persamaan  $(xI - A)W = 0$ . Solusi tak nol diperoleh jika  $\det(xI - A) = 0$ , persamaan tersebut berupa suatu persamaan polinom dengan pangkat tertinggi  $n$  dan disebut **polynomial karakteristik** dari matrik  $A$ .

## 2.5 Polinomial Karakteristik Graf Berarah

### Definisi 2.12

Suatu graf berarah  $D$  dengan  $n$  titik dapat direpresentasikan ke dalam suatu matrik berhubungan langsung  $A(D)$  yang merupakan matrik persegi berordo  $n \times n$ . Berdasarkan Definisi 2.11 nilai eigen  $x$  dari matrik  $A(D)$  diperoleh dari persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$(xI - A(D))W = 0$$

$W$  adalah suatu vektor tak nol, agar  $x$  menjadi nilai eigen maka :

$$\det(xI - A(D)) = 0$$

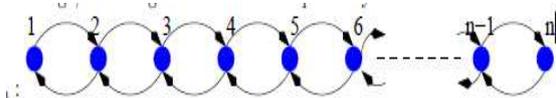
Ruas kiri dari persamaan diatas merupakan polinomial karakteristik berderajat  $n$  dari suatu graf berarah  $D$  dengan  $n$  titik. Secara umum direpresentasikan sebagai berikut :

$$X(D) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \dots + t_{n-1}x + t_n$$

## 2.6 Graf Komplek

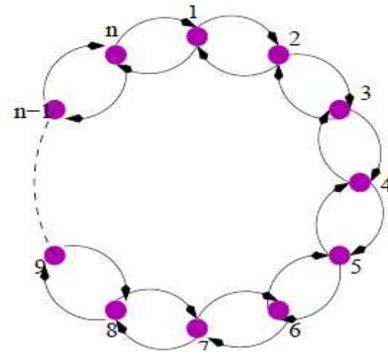
### Definisi 2.13

Graf linier ( $T_n$ ) adalah graf berarah dengan  $n$  titik sehingga setiap titik  $v_i \in$  adalah sumber (*source*) dari busur dengan tujuan  $v_{i-1}$  dan  $v_{i+1}$  sedangkan  $v_1$  dan  $v_n$  adalah sumber (*source*) dari sebuah busur secara berturut-turut dengan target  $v_2$  dan  $v_{n-1}$ .



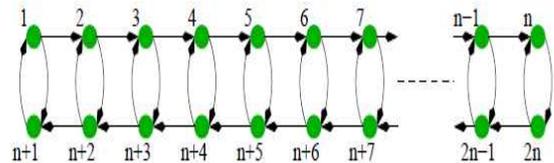
### Definisi 2.14

Graf Siklik adalah graf Cayley dari sebuah grup siklik dengan order  $n$  dan himpunan generator  $\{1, -1\}$  atau dapat ditulis  $C(Z_n, \{1, -1\})$ . Graf siklik juga dapat dibentuk dari sebuah graf linier dengan  $n$  titik dengan menghubungkan titik  $v_1$  dan  $v_n$ . Pelabelan titik pada graf siklik adalah dengan mengkorespondensikan  $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  dengan  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .



### Definisi 2.15

Graf tangga ( $R_{2n}$ ) adalah graf berarah dengan himpunan titik  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ , untuk setiap  $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  adalah sumber (*source*) dari sebuah busur dengan tujuan  $v_{i+1}$ , dan untuk setiap  $v_j \in \{v_{n+2}, v_{n+3}, \dots, v_{2n}\}$  adalah sumber dari sebuah busur dengan tujuan  $v_{j-1}$ .



## 2.7 Persamaan Figuratif (Figure Equation)

### Teorema 2.1

Polinomial karakteristik sebarang graf berarah  $D$  dengan  $n$  titik secara umum adalah :

$$X(D) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \dots + t_{n-1}x + t_n$$

Koefisien  $t_i$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dapat dihitung dengan menggunakan persamaan figuratif sebagai berikut :

$$t_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)}$$

$\mathcal{L}_i$  adalah himpunan semua sugraf berarah linier  $L$  dari graf berarah  $D$  dengan tepat  $i$  titik, sedangkan  $P(L)$  adalah banyaknya kompondari  $L$  (banyaknya siklus berarah linier).

## PEMBAHASAN

### 3.1 Polinomial Karakteristik Graf Linier

#### Lemma 3.1

Jika  $X(T_n) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \dots + t_{n-1}x + t_n$  adalah polinomial karakteristik dari graf linier dengan  $n$  titik maka koefisien  $t_i = 0$  untuk  $i$  ganjil dan  $i \leq n$ .

Bukti :

Langkah pertama untuk membuktikan Lemma diatas adalah dengan menunjukkan bahwa, setiap  $L \in \mathcal{L}_i$  terdiri dari  $\frac{i}{2}$  sikel berbeda dengan panjang dua.

Diketahui sebuah graf  $T_n$  dengan  $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , misal diambil sebarang titik  $v_k$  dimana  $k$  adalah indek titik terkecil pada  $L \in \mathcal{L}_i$  untuk  $1 \leq k \leq n$ , artinya jika  $v_k \in L$  maka  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \notin L$ , karena  $L$  subgraf berarah linier maka berdasarkan Definisi 2.5 dan Definisi 2.13, Diperoleh :

$$v_k \in L \rightarrow v_{k+1} \in L$$

Titik  $v_{k+1}$  memiliki sebuah busur yang berasal dan menuju titik  $v_k$  sehingga titik  $v_k$  dan  $v_{k+1}$  membentuk subgraf berarah linier dengan panjang dua, akibatnya  $v_{k+1}$  tidak terhubung dengan  $v_{k+2}$  pada  $L$ .

Dengan langkah yang sama, dapat diambil sebarang titik terdekat dengan  $v_{k+1}$  misal titik  $v_s \in L \in \mathcal{L}_i$  untuk setiap  $k+1 \leq s \leq n$ . Karena  $L$  subgraf berarah linier maka berdasarkan Definisi 2.5 dan Definisi 2.13, diperoleh :

$$v_s \in L \rightarrow v_{s+1} \in L$$

Titik  $v_{s+1}$  memiliki sebuah busur yang berasal dan menuju titik  $v_s$ , akibatnya  $v_{s+1}$  tidak terhubung dengan titik  $v_{s+2}$  pada  $L$ , sehingga  $v_s$  dan  $v_{s+1}$  membentuk subgraf berarah linier dengan panjang dua. Hal ini menunjukkan bahwa, setiap titik  $v_i \in L$  hanya memiliki sebuah busur yang berasal dan menuju ke tepat satu titik yang terhubung langsung, yaitu  $v_{i+1} \in L$  sehingga membentuk subgraf berarah linier dengan panjang 2 atau dengan kata lain setiap  $L \in \mathcal{L}_i$  terdiri dari  $\frac{i}{2}$  sikel berbeda dengan panjang dua.

Langkah selanjutnya adalah menghitung koefisien  $t_{2j+1}$  untuk setiap  $0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$  dengan memeriksa  $\mathcal{L}_{2j+1}$ . Berdasarkan langkah pembuktian diatas, diperoleh bahwa setiap  $L \in \mathcal{L}_{2j+1}$  terdiri dari  $\frac{2j+1}{2}$  sikel berbeda dengan panjang dua. Karena  $\frac{2j+1}{2}$  bukan bilangan bulat maka  $\mathcal{L}_{2j+1} = \emptyset$ . Sehingga berdasarkan Teorema 2.1,  $t_{2j+1} = \sum_{L \in \mathcal{L}_{2j+1}} (-1)^{p(L)} = 0$  untuk setiap  $0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$ . ■

**Lemma 3.2 :**

Jika  $X(T_n) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \dots + t_{n-1} x + t_n$  adalah polinomial karakteristik dari graf linier dengan  $n$  titik maka koefisien  $t_i$  adalah :  $t_i = t_{2m} = (-1)^m \binom{n-m}{m}$  untuk  $i$  genap dan  $i \leq n$ .

Bukti :

Untuk menghitung setiap koefisien  $t_i$  dengan  $i$  genap dapat dilakukan dengan mencari kardinalitas  $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{2m}(|\mathcal{L}_{2m}|)$  untuk  $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$  terlebih dahulu. Langkah pertama adalah melabel subgraf berarah dengan panjang dua dengan indek titik terendahnya. Setiap  $L \in \mathcal{L}_{2m}$  dengan  $2m$  titik, terdiri dari  $\frac{2m}{2}$  sikel berbeda dengan panjang dua, sehingganya  $|\mathcal{L}_{2m}| =$  banyaknya cara menempatkan  $m$  pias yang tidak berurutan dari sebanyak  $n-1$  pias yang tersedia.  $|\mathcal{L}_{2m}|$  ekuivalen dengan banyaknya cara memilih  $m$  bilangan dari  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  sedemikian hingga tidak ada dua bilangan yang berurutan.

Misal bilangan-bilangan tersebut adalah  $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$  Sedemikian hingga  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_m \leq m-1$ .

Misal :

$x_1 = n_1 \geq 1$ ,  $x_2 = n_2 - n_1 > 2$  karena  $n_1$  tidak berdekatan dengan  $n_2$ .  $x_3 = n_3 - n_2 > 2$  karena  $n_3$  tidak berdekatan dengan  $n_2$ , terdapat sebanyak  $m$ , sehingga  $x_m = n_{m+1} - n_m > 2$  karena  $n_m$  tidak berdekatan dengan  $n_{m+1}$  dan  $x_{m+1} = n - 1 - n_m \geq 0$  .....(\*)  
 Karenater dapat sebanyak  $n-1$  bilangan, maka berakibat :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1} = n - 1 \dots \dots \dots (**)$$

Penjelasan diatas ekuivalen dengan permasalahan mencari banyaknya solusi bulat dari persamaan (\*\*) dengan syarat-syarat yang diberikan pada persamaan (\*), dengan fungsi pembangkit sebagai berikut :

$$P(x) = (x + x^2 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)^{m-1}(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$P(x) = x^{2m-1} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{m+1}$$

$$P(x) = x^{2m-1} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{m+1+t-1}{t} x^t$$

$$P(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{m+t}{t} x^{t+2m-1}$$

Misal  $t + 2m - 1 = k$ , maka :

$$P(x) = \sum_{k=2m-1}^{\infty} \binom{m+k-2m+1}{k-2m+1} x^k$$

Koefisiendarix<sup>n-1</sup> adalah  $a_{n-1}$  dimana  $k = n - 1$ , maka :

$$a_{n-1} = \binom{m + (n-1) - 2m + 1}{(n-m) - 2m + 1} = \binom{n-m}{n-2m}$$

$$a_{n-1} = \binom{n-m}{m}$$

Sehingga  $|\mathcal{L}_{2m}| = a_{n-1} = \binom{n-m}{m}$ .

Setiap  $L \in \mathcal{L}_{2m}$  dibentuk oleh  $m$  sikel berarah dengan panjang dua, sehingga  $P(L) = 2$ .

Berdasarkan Teorema 2.1 didapat koefisien  $t_i$  untuk  $i = 2m$  sebagai berikut.

$$t_i = t_{2m} = \sum_{L \in \mathcal{L}_{2m}} (-1)^{P(L)} = (-1)^m |\mathcal{L}_{2m}| \\ = (-1)^m \binom{n-m}{m} \blacksquare$$

**Teorema 3.1**

Misalkan diberikan graf linier dengan  $n$  titik dengan polinomial karakteristik,

$$X(T_n) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \dots + t_{n-1} x + t_n$$

maka koefisien  $t_i$  dari graf linier dengan  $n$  titik adalah sebagai berikut :

$$t_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n \\ t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan } i \leq n$$

**3.2 Polinomial Karakteristik Graf Siklik**

**Lemma 3.3**

Jika  $X(C(Z_n, \{1, -1\})) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \dots + t_{n-1} x + t_n$  adalah polinomial karakteristik graf siklik dengan order  $n$ , maka koefisien  $t_i = 0$  untuk  $i$  ganjil dan  $i \leq n$ .

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.14 yang merupakan definisi dari graf siklik, serta dengan membandingkan struktur graf linier dengan graf siklik dapat diketahui bahwa untuk  $i$  ganjil dan  $i < n$ ,  $\mathcal{L}_i = \emptyset$ . Dengan menggunakan Teorema 2.1, diperoleh,  $t_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{P(L)} = 0 \blacksquare$

**Lemma 3.4**

Jika  $X(C(Z_n, \{1, -1\})) = x^n + t_1 x^{n-1} + t_2 x^{n-2} + \dots + t_{n-1} x + t_n$  adalah polinomial karakteristik graf siklik dengan order  $n$ , maka koefisien

$$t_i = t_{2m} = (-1)^m \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} \text{ untuk } i \text{ genap dan } i < n.$$

Bukti :

Menghitung koefisien  $t_{2m}$  untuk  $2 \leq 2m < n$  dapat dilakukan dengan mencari  $|\mathcal{L}_{2m}|$ . Pada graf siklik  $\mathcal{L}_{2m}$  dapat dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu himpunan  $A$  dan  $B$ .  $A$  adalah himpunan bagian dari  $\mathcal{L}_{2m}$  tanpa menggunakan sikeldengan panjang dua misal  $l(v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_1), v_1)$  atau dapat ditulis  $(1 \leftrightarrow 2)$ .  $B$  adalah himpunan bagian dari  $\mathcal{L}_{2m}$  yang memuat sikeldengan panjang dua misal  $l(v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_1), v_1)$  atau dapat ditulis  $(1 \leftrightarrow 2)$ .  $\mathcal{L}_{2m} = A \cup B$  sehingga  $|\mathcal{L}_{2m}| = |A| + |B| \dots \dots \dots (*)$

$C(Z_n, \{1, -1\})$  dengan menghapus busur dari sikeldengan panjang dua misal  $l(v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_1), v_1)$  atau dapat ditulis  $(1 \leftrightarrow 2)$  merupakan graf linier dengan  $n$  titik ( $T_n$ ) sehingga,

$$|A| = |\mathcal{L}_{2m}| \text{ pada graf } T_n = \binom{n-m}{m} \dots \dots \dots (**)$$

$B$  adalah himpunan bagian dari  $\mathcal{L}_{2m}$  yang memuat sikeldengan panjang dua misal  $l(v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_1), v_1)$  atau dapat ditulis  $(1 \leftrightarrow 2)$  maka  $|B|$  adalah banyaknya cara memilih  $m-1$  sikeldengan panjang dua pada graf  $C(Z_n, \{1, -1\}) - (1 \leftrightarrow 2)$  dengan menghapus titik-titik pada sikeld tersebut, dengan kata lain  $|B|$  adalah banyaknya cara memilih  $m-1$  sikeldberbeda dengan panjang dua pada graf  $T_{n-2}$ . Analog dengan pembuktian Lemma 3.2,

$$|B| = \binom{n-2-(m-1)}{m-1}$$

$$|B| = \binom{n-m-1}{m-1} \dots \dots \dots (***)$$

Berdasarkan persamaan (\*), (\*\*), dan (\*\*\*) didapat :

$$|\mathcal{L}_{2m}| = |A| + |B| \\ |\mathcal{L}_{2m}| = \binom{n-m}{m} + \binom{n-m-1}{m-1} \\ |\mathcal{L}_{2m}| = \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m}$$

Selanjutnya untuk setiap  $L \in \mathcal{L}_{2m}$   $P(L) = m$  untuk  $2 \leq 2m < n$ , sehingga berdasarkan Teorema 2.1, didapat :

$$t_i = t_{2m} = \sum_{L \in \mathcal{L}_{2m}} (-1)^{P(L)} = (-1)^m |\mathcal{L}_{2m}| \\ = (-1)^m \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m}$$

untuk  $i < n$ .  $\blacksquare$

**Lemma 3.5 :**

Jika  $X(C(Z_n, \{1, -1\}))$  adalah polinomial karakteristik graf siklik dengan order  $n$  maka koefisien  $t_i$  untuk  $i = n$  adalah :

$$t_i = -2 \text{ untuk } n \text{ ganjil dan } t_n = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Bukti :

Pada graf  $C(Z_n, \{1, -1\})$  terdapat dua sikeldengan panjang  $n$ , yaitu sikeldengan arah positif dan sikeldengan arah negatif. Sehingga berdasarkan Teorema 2.1, untuk  $n$  ganjil didapat :

$$t_n = \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{P(L)} = (-1)^1 + (-1)^1 = -2$$

Untuk  $n$  genap, Berdasarkan Teorema 2.1, didapat :

$$t_n = \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{P(L)} = (-1)^1 + (-1)^1 + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$t_n = -2 + (-1)^{\frac{n}{2}} \blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 3.3 dan Lemma 3.4 didapat Teorema sebagai berikut :

**Teorema 3.2**

Jika  $C(Z_n, \{1, -1\})$  adalah sebuah graf siklik yang memiliki order  $n$  dengan polinomial karakteristik,

$$X(C(Z_n, \{1, -1\})) = x^n + t_1x^{n-1} + t_2x^{n-2} + \dots + t_{n-1}x + t_n$$

Maka koefisien  $t_i$  adalah sebagai berikut :

$$t_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i < n$$

$$t_i = -2 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i = n$$

$$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \frac{n}{n-\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan } i < n$$

$$t_i = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan } i = n$$

**3.4 Polinomial Karakteristik Graf Tangga**

**Definisi 3.4**

Secara umum polinomial karakteristik dari  $R_{2n}$  dengan  $2n$  titik adalah :

$$X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1x^{2n-1} + l_2x^{2n-2} + \dots + l_{2n-1}x + l_{2n}$$

**Lemma 3.6**

Misal diberikan  $R_{2n}$  dengan  $2n$  titik, dengan polinomial karakteristik,  $X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1x^{2n-1} + l_2x^{2n-2} + \dots + l_{2n-1}x + l_{2n} = 0$  maka koefisien  $l_{2j+1} = 0$  untuk setiap  $j \leq \frac{2n-1}{2}$ .

Bukti :

Untuk membuktikan Lemma diatas, terlebih dahulu harus ditunjukkan bahwa untuk setiap  $L \in \mathcal{L}_j$  dari graf  $R_{2n}$ , dan  $C_k$  adalah sebarang sikel berarah linier dengan panjang  $k$  sedemikian hingga  $C_k \subseteq L$  maka  $k$  selalu genap.

Misal diambil titik  $v_a \in C_k \subseteq L \in \mathcal{L}_j$  sebagai titik dengan indek terkecil dari  $2n$  dan termasuk titik dalam  $C_k$ , sehingga  $1 \leq a \leq n$  dan  $v_{a-1} \notin C_k$ . Sebuah busur dengan sumber titik  $v_a$  hanya memiliki sebuah titik tujuannya yaitu  $v_{n-a}$ , tapi hal ini kontradiksi dengan  $v_a$  sebagai titik dengan indek terkecil, Begitu juga dengan  $v_b$  untuk  $n+1 \leq b \leq 2n$ .

Setiap titik dalam  $C_k$  pasti memiliki *indegree* dan *outdegree* sama dengan satu, karena  $v_{a-1} \notin C_k$ , sebuah busur yang menuju titik  $v_a$  hanya memiliki sebuah titik sumber yaitu  $v_{n+a}$  Sehingga :

$$v_a \in C_k \Leftrightarrow v_{n+a} \in C_k$$

Sebuah busur yang menuju titik  $v_{n+a}$  hanya memiliki sebuah titik sumber yaitu  $v_a$ . Akibatnya  $C_k$  adalah sebuah sikel berarah yang memiliki panjang dua.

Sejalan dengan langkah diatas, sebuah busur dengan titik sumber  $v_a$  memiliki titik tujuan  $v_{a+1} \in C_k$  dan busur dengan tujuan  $v_{n+a}$  harus memiliki titik sumber  $v_{n+a+1}$ , maka

$$v_{a+1} \in C_k \Leftrightarrow v_{n+a+1} \in C_k$$

Sehingga  $\{v_a, v_{a+1}, v_{n+a}, v_{n+a+1}\} \subseteq C_k$ , jika sebuah busur dengan titik sumber  $v_{a+1}$  dan titik tujuan  $v_{n+a+1}$ , akan membentuk sikel dengan panjang empat ( $C_4$ ).

Begitu juga dengan busur yang memiliki titik tujuan  $v_{a+2} \in C_k$  dan sebuah busur dengan titik tujuan  $v_{n+a+1}$  memiliki titik sumber  $v_{n+a+2}$ . Sehingga,

$$v_{a+2} \in C_k \Leftrightarrow v_{n+a+2} \in C_k$$

Analog dengan langkah diatas dapat ditunjukkan bahwa

$$v_c \in C_k \Leftrightarrow v_{n+c} \in C_k$$

Sikel tersebut akan berhenti di titik  $v_b$ , sebuah busur dengan sumber titik  $v_b$  hanya memiliki sebuah titik target yaitu titik  $v_{b-n}$ , dimana  $v_b$  adalah titik dengan indek terbesar pada sikel tersebut. Sehingga  $C_k$  terdiri dari himpunan pasangan berurutan titik  $(v_c, v_{n+c})$  sehingga  $k$  genap.

Karena setiap  $C_k$  pada graf  $R_{2n}$  merupakan sikel dengan panjang genap maka  $L \in \mathcal{L}_{2j+1}$  merupakan penjumlahan sikel-sikel dengan panjang genap. Sehingga  $\mathcal{L}_{2j+1} = \emptyset$ , berdasarkan Teorema 2.1,  $l_{2j+1} = 0$  untuk setiap  $j \leq \frac{2n-1}{2}$ . ■

Koefisien  $l_{2m}$  diperoleh dengan memeriksa himpunan  $\mathcal{L}_{2m}$  dengan memperhatikan  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$  dimana,

$$\mathcal{A} = \{L \in \mathcal{L}_{2m} \mid L \text{ terdiri dari } m \text{ sikel berbeda dengan panjang dua}\}$$

Untuk setiap  $0 \leq c \leq m$ ,  $L_c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$  terdiri dari sebuah rantai dari sikel dengan panjang dua yang berhubungan langsung dan  $m-c$  sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung. Dapat didefinisikan sikel dengan panjang dua  $(v_i \leftrightarrow v_{n+i})$  berhubungan langsung dengan sikel yang memiliki panjang dua yaitu  $(v_{i-1} \leftrightarrow v_{n+i-1})$  dan  $(v_{i+1} \leftrightarrow v_{n+i+1})$ . Sebuah rantai dari  $c$  sikel berbeda dengan panjang dua yang berhubungan langsung adalah  $\{(v_i \leftrightarrow v_{n+i}), (v_{i+1} \leftrightarrow v_{n+i+1}), \dots, (v_{i+c-1} \leftrightarrow v_{n+i+c-1})\}$

Selanjutnya adalah memeriksa himpunan  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$  dimana,  $\mathcal{B} = \{L \in \mathcal{L}_{2m} \mid L \text{ menggunakan } 2m \text{ titik yang sama dengan } L_c\}$

**Lemma 3.7**

$\mathcal{B} = \{L \in \mathcal{L}_{2m} \mid L \text{ menggunakan } 2m \text{ titik yang sama dengan } L_c\}$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$  maka,  $\sum_{L \in \mathcal{B}} (-1)^{P(L)} = 0$

Untuk membuktikan Lemma diatas, yang harus diperhatikan adalah  $P(L)$  untuk setiap  $L \in \mathcal{B}$ . Sebagai contoh misal  $c = 2$ , maka  $\mathcal{B}$  memiliki dua elemen, yang pertama adalah terdiri dari  $m$  pias, menggunakan  $m$  sikel sikel berbeda dengan panjang dua, dan yang kedua adalah  $m-1$  pias

menggunakan  $m - 2$  sikel berbeda dengan panjang dua serta sebuah sikel dengan panjang empat.

Untuk setiap  $L \in \mathcal{B}$ ,  $m - c$  yang merupakan sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung dan selalu menghasilkan  $m - c$  pias. Dengan memperhatikan himpunan  $C \subseteq L$  yang merupakan rantai dari pasangan titik yang berdekatan dimana  $1 \leq P(C) \leq c$ . Misal diandaikan terdapat  $\binom{c-1}{k-1}$  cara berbeda untuk menggambar  $C$  dalam  $k$  pias. Pengandaian tersebut akan dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika.

- ✚ Untuk  $P(C) = 1$ , hanya terdapat sebuah pilihan yaitu sikel dengan panjang  $2c$ .  
 $1 = \binom{c-1}{0}$ .
- ✚ Untuk  $P(C) = 2$ , dapat dilakukan dengan menetapkan sebuah pilihan untuk menjadi sikel yang pertama dan menjadikan sisa titik menjadi sikel yang kedua. Sehingga terdapat  $\binom{c-1}{1}$  pilihan.
- ✚ Untuk  $P(C) = k - 1$ , diasumsikan terdapat  $\binom{c-1}{k-2}$  cara untuk membentuk  $2c$  titik menjadi  $k - 1$  sikel berbeda.
- ✚ Maka untuk  $P(C) = k$ , dapat dipilih sikel yang pertama dan menjumlahkan setiap cara untuk membentuk titik-titik yang tersisa menjadi  $k - 2$  sikel berbeda. Jumlah dari kemungkinan-kemungkinan tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \binom{c-1-1}{k-2} + \binom{c-1-2}{k-2} + \binom{c-1-3}{k-2} + \dots \\ & \quad + \binom{c-1-(c-k+1)}{k-2} \\ & = \binom{c-1}{k-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat  $\binom{c-1}{k-1}$  cara berbeda untuk menggambar  $C$  dalam  $k$  pias. Sehingga untuk  $L \in \mathcal{L}_B$ ,  
 $P(L) = k + (m + c)$ , dan

$$\sum_{L \in \mathcal{B}} (-1)^{P(L)} = (-1)^{m-c} \sum_{k=1}^c (-1)^k \binom{c-1}{k-1}$$

$$\sum_{L \in \mathcal{B}} (-1)^{P(L)} = 0. \blacksquare$$

Pada Lemma di atas  $L_c$  memiliki sebuah rantai dari sikel dengan panjang dua yang berhubungan langsung, tetapi  $\mathbb{A}$  memuat elemen-elemen dengan rantai yang lebih dari satu. Dengan mempertimbangkan  $L_{\{c\}} \in \mathbb{A}$  dengan  $\{c\} = \{c_1, c_2, \dots, c_i\}$  yang

merupakan himpunan rantai dengan panjang  $i$ , dan  $m - \{c\}$  adalah sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung.

$C = \{L \in \mathcal{L}_{2m} \mid L \text{ menggunakan } 2m \text{ titik yang sama dengan } L_{\{c\}}\}$ ,  $C$  dapat dipartisi menjadi penjumlahan dari jumlah masing-masing-rantainya, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \sum_{L \in C} (-1)^{P(L)} \\ & = (-1)^{m-c} \sum (-1)^{P(C_1)} \sum \dots \sum (-1)^{P(C_i)} \end{aligned}$$

Berdasarkan Lemma 3.7 setiap piastan dapat dirangsang dengan nol, sehingga hasil penjumlahannya juga sama dengan nol. Oleh karena elemen-elemen dari  $\mathcal{L}_{2m}$  hanya dibangun oleh sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung.

Misal  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_{2m}$  adalah himpunan semua sikel dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung,  $l_{2m} = \sum_{L \in \mathcal{R}_{2m}} (-1)^{P(L)}$ ,  $P(L) = m$  sehingga  $l_{2m} = (-1)^m |\mathcal{R}_{2m}|$ .

### Lemma 3.8

Misal diberikan graftang dengan  $2n$  titik, dengan polinomial karakteristik  $X(\mathcal{R}_{2n}) = x^{2n} + l_1 x^{2n-1} + l_2 x^{2n-2} + \dots + l_{2n-1} x + l_{2n}$  maka koefisien  $l_{2m} = (-1)^m \binom{n+1-m}{m}$  untuk  $1 \leq m \leq n$ .

Bukti :

Untuk membuktikan Lemma di atas, langkah yang harus dilakukan adalah mencari kardinalitas dari  $\mathcal{R}_{2m}$ . Setiap sikel dengan panjang dua pada  $\mathcal{R}_{2m}$  dapat dilabel dengan indek titik terendahnya misal sebuah sikel  $(v_i, (v_i, v_{n+i}), v_{n+i})$  atau dapat ditulis  $(v_i \leftrightarrow v_{n+i})$  dilabel dengan  $i$ .  $|\mathcal{R}_{2m}|$  merupakan banyaknya cara menempatkan  $m$  sikel berbeda dengan panjang dua yang tidak berhubungan langsung hal ini ekuivalen dengan banyaknya cara memilih  $m$  bilangan dari  $\{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian hingga tidak ada dua bilangan yang berurutan. Analog dengan langkah pembuktian pada Lemma 3.2 didapat  $|\mathcal{R}_{2m}| = \binom{n+1-m}{m}$ .

Setiap  $L \in \mathcal{R}_{2m}$  terdiri dari  $m$  sikel berbeda dengan panjang dua sehingga  $P(L) = m$ , berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh :

$$\begin{aligned} l_{2m} & = \sum_{L \in \mathcal{R}_{2m}} (-1)^{P(L)} = (-1)^m \\ |\mathcal{R}_{2m}| & = (-1)^m \binom{n+1-m}{m} \end{aligned}$$

untuk  $1 \leq m \leq n$ .  $\blacksquare$

Berdasarkan Lemma 3.7 dan Lemma 3.8 diperoleh teorema berikut,

### Teorema 3.3

Misal diberikan graf tangga dengan  $2n$  titik, jika polinomial karakteristik graf  $R_{2n}$  adalah  $X(R_{2n}) = x^{2n} + l_1x^{2n-1} + l_2x^{2n-2} + \dots + l_{2n-1}x + l_{2n}$  maka koefisien  $l_i$  adalah sebagai berikut:

$$l_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n$$

$$l_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n$$

## KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada BAB III dan sejalan dengan rumusan masalah pada BAB I dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf linier adalah :

$$t_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n$$

$$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n$$

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf siklik adalah :

$$t_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i < n$$

$$t_i = -2 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i = n$$

$$t_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \frac{n}{n-\frac{i}{2}} \binom{n-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan}$$

$$i < n$$

$$t_i = -2 + 2(-1)^{\frac{n}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan } i = n$$

- Dengan menggunakan persamaan figuratif, setiap koefisien dari graf tangga adalah :

$$l_i = 0 \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n$$

$$l_i = (-1)^{\frac{i}{2}} \binom{n+1-\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} \text{ untuk } i \text{ genap dan}$$

$$i \leq n$$

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya:University Press UNESA.
- [2] Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs* [third editions]. USA: Chapman & Hall/CRC.
- [3] Cvetkovic, M Dragos, Doob Michael dan Sachs,Horst. 1979. *Spectra of graphs*. New York : Academic Press,Inc.
- [4] Diestel,Reinhard. 2000. *Graph Teory Electronic Edition 2000*. New York : Springer-Verlag,inc.
- [5] Godsil,Chris dan Royle,Gordon.2001.*Algebraic Graph Theory*. New York : Springer-Verlag,inc.
- [6] Gross, L. Jonathan dan Tucker, W. Thomas.1987. *Topological Graph Theory*. United States of America.
- [7] Gallian, A, Joseph. 2010. *Contemporary Abstact Algebra Seventh Edition*. United States of America : Brooks/Cole, Cengage Learning.
- [8] Coon, E. Taylor.2006.*Combinatoric of The Figure Equation on Directed Graph*.