PEWARNAAN GRAF: POLINOMIAL KROMATIK DAN TEOREMA INVERSI MOBIUS

Nurul Miftahul Jannah, Dr. Agung Lukito, M.S.
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Jalan Ketintang Gedung C1, Surabaya 60231
email : mifta_nmj@yahoo.co.id

ABSTRAK

Misalkan G graf sederhana, dan $P(G;\ k)$ menyatakan banyaknya cara mewarnai titik-titik di G dengan k warna sedemikian hingga tidak ada dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna sama. $P(G;k)$ disebut polinomial kromatik dari G. Untuk graf kincir $K_n^{(m)}$ dan graf terpisah, polinomial kromatiknya bisa ditentukan dengan memeriksa struktur grafnya. Hubungan antara poset dan graf dapat membantu menentukan polinomial kromatik sebuah graf dengan memanfaatkan partisi himpunan titik, latis ikatan dan teorema khusus disebut Teorema Inversi *Mobius*.

Kata kunci: Polinomial kromatik, poset, latis ikatan, Inversi Mobius.

1. PENDAHULUAN

Teori pewarnaan graf merupakan salah satu objek menarik dan terkenal dalam bidang teori graf. Pewarnaan graf dibagi dalam dua bagian, yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Namun, jika tidak diberikan kualifikasinya, pewarnaan graf diartikan sebagai pewarnaan titik.

Masalah umum dalam teori graf ini adalah mewarnai titik dari graf sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Kemungkinan jumlah pewarnaan berbeda pada graf dapat dihitung dengan banyaknya warna yang diberikan. Setiap nilai-nilai ini dapat dihitung dengan menggunakan fungsi khusus yang terkait dengan masing-masing graf, yang disebut polinomial kromatik.

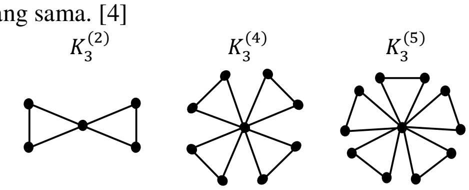
Untuk graf sederhana, polinomial kromatik bisa ditentukan dengan memeriksa struktur grafnya. Untuk graf lainnya, sangat sulit untuk menghitung fungsi dengan cara ini. Oleh karena itu, graf yang akan dibahas adalah graf sederhana.

2. PEMBAHASAN

2.1 Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari elemen-elemen yang disebut titik, dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G, dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G. [2]

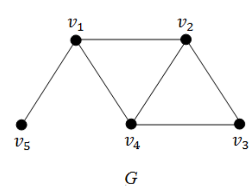
Graf kincir $K_n^{(m)}$ adalah graf yang terdiri dari m *copy* graf komplit K_n dengan tepat sebuah titik yang sama. [4]



Gambar 1. Graf kincir (*windmill graph*)

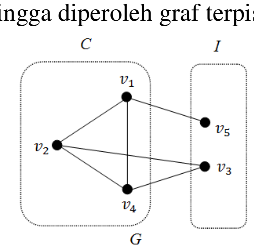
Misalkan $G = (V(G),\ E(G))$ sebuah graf. Sebuah himpunan $C \subseteq V(G)$ dikatakan komplit jika subgraf terinduksi $G(C)$ komplit, dan sebuah himpunan $I \subseteq V(G)$ dikatakan tak bergantung (*independent*) jika subgraf terinduksi $G(I)$ adalah graf nol. Graf G dikatakan terpisah (*split*) jika himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam dua himpunan komplit C dan himpunan tak bergantung (*independent*) I. Graf terpisah dinotasikan dengan $G = S(C \cup I, E(G))$. [5]

Diberikan sebuah graf G berikut



Gambar 2. Graf G

Graf G di atas merupakan graf terpisah, karena himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam dua himpunan komplit C dan himpunan tak bergantung I, dengan $C = \{v_1, v_2, v_4\}$ dan $I = \{v_3, v_5\}$. Sehingga diperoleh graf terpisah G berikut



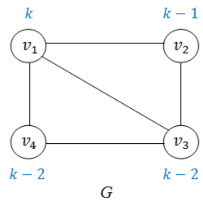
Gambar 3. Graf terpisah $G = S(C \cup I, E(G))$

2.2 Pewarnaan Graf

Misalkan G graf dengan n titik dan $[k]$ adalah himpunan k warna. Sebuah pewarnaan-k (*proper k-colorings*) dari G adalah $f: V(G) \rightarrow [k]$ sedemikian hingga untuk setiap dua titik u dan v yang berhubungan langsung, $f(u) \neq f(v)$. [6]

Misalkan G sebuah graf sederhana. $P(G;k)$ adalah banyaknya cara mewarnai titik-titik di G dengan k warna sedemikian hingga tidak ada dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna sama. Fungsi $P(G;k)$ disebut polinomial kromatik dari G. [9]

Misalkan G graf yang diberikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Graf G dan representasi perhitungan polinomial kromatiknya

Untuk graf di atas, dimulai dengan memilih titik secara acak dan titik tersebut dapat diwarnai dengan k cara, misalkan titik tersebut adalah v_1. Jika dilanjutkan bergerak dari v_1 ke titik yang lain v_2, maka titik v_2 ini hanya bisa diwarnai dengan $k-1$ cara karena titik v_2 berhubungan langsung dengan titik v_1. Titik ketiga v_3 hanya bisa diwarnai dengan $k-2$ cara di mana titik v_3 ini adalah titik yang berhubungan langsung dengan titik v_1 dan v_2. Titik v_4 dapat diwarnai dengan $k-2$ cara karena titik v_4 berhubungan langsung dengan titik v_1 dan v_3. Akibatnya, graf G dapat diwarnai dengan $k(k-1)(k-2)^2$ cara dengan k warna. Sehingga

$$\begin{aligned} P(G;k) &= k(k-1)(k-2)^2 \\ &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \end{aligned}$$

Teorema 1 (*Deleting – Contraction Recurrence*)

Misalkan G graf sederhana dan $e \in E(G)$. Jika $G - e$ diperoleh dari G dengan menghapus sisi e dan $G \cdot e$ diperoleh dari G dengan mengkontraksi sisi e($G \cdot e$ adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghapus sisi e dari G dan menyatukan kedua titik akhir sisi e), maka

$$P(G;k) = P(G - e;k) - P(G \cdot e;k)$$

Bukti: [Lihat Wilson dan Watkins, 1981: 239]

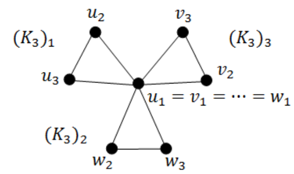
Teorema 2

Jika G adalah graf kincir $K_n^{(m)}$, maka

$$P\left(K_n^{(m)};k\right) = k\prod_{i=2}^{n}(k-i+1)^m.$$

Bukti:

Misalkan $(K_n)_i$ adalah graf komplit ke i dan $V((K_n)_i)$ adalah himpunan titik graf $(K_n)_i$, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$.



Gambar 4. Ilustrasi graf kincir $K_n^{(m)}$

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } & V((K_n)_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \\ & V((K_n)_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ & \vdots \\ & V((K_n)_m) = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi graf kincir $K_n^{(m)}$ terdapat tepat sebuah titik yang sama, misalkan $u_1 = v_1 = \cdots = w_1$. Maka titik $u_1 = v_1 = \cdots = w_1$ dapat diwarnai dengan k cara. Kemudian titik u_2 di $(K_n)_1$ dapat diwarnai dengan $k-1$ cara karena titik u_2 berhubungan langsung dengan titik u_1. Untuk mewarnai titik u_n di $(K_n)_1$, titik u_n dapat diwarnai dengan $k-n+1$ cara karena titik u_n berhubungan langsung dengan semua titik di $(K_n)_1$. Kemudian untuk mewarnai titik-titik di $(K_n)_2, (K_n)_3, \ldots, (K_n)_m$, analog dengan pewarnaan di $(K_n)_1$. Sehingga diperoleh

$$P\left(K_n^{(m)};k\right) = k[(k-1)\ldots(k-n+1)]\ldots[(k-1)\ldots(k-n+1)]$$

$$P\left(K_n^{(m)};k\right) = k\prod_{i=2}^{n}(k-i+1)^m$$

Teorema 3

Misalkan $G = S(C \cup I, E(G))$ graf terpisah dengan $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $d(u_i) = t_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $|C| = n$, maka

$$P(G;\ k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)(k-t_1)\ldots(k-t_m).$$

Bukti:

Misalkan $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Untuk menentukan polinomial kromatik dari graf terpisah G, dimulai dengan memilih titik secara acak dan titik tersebut dapat diwarnai dengan k cara. Misalkan titik tersebut adalah v_1 di $G(C)$ ($G(C)$ adalah subgraf yang diinduksi oleh G, dengan C adalah himpunan komplit). Jika dilanjutkan bergerak ke titik yang lain misalkan v_2, maka titik v_2 dapat diwarnai dengan $k-1$ cara karena titik v_2 berhubungan langsung dengan titik v_1. Untuk mewarnai titik v_n di $G(C)$, titik tersebut dapat diwarnai dengan $k-n+1$ cara karena C komplit.

Kemudian untuk mewarnai titik u_i, misalkan $d(u_i)$ adalah banyaknya titik yang terkait dengan titik u_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$. Maka titik u_i dapat diwarnai dengan $k - d(u_i)$ cara. Misalkan $d(u_i) = t_1$, maka diperoleh

$$P(G;\ k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)(k-t_1)\ldots(k-t_m).$$

Teorema 4 (Whitney [1933c])
Misalkan G graf dengan n titik. $P(G;k)$ adalah polinomial dalam k berderajat n yang koefisiennya bilangan bulat dengan tanda silih berganti positif dan negatif dan koefisien k^n adalah 1, sedangkan koefisien k^{n-1} adalah $-m$, dengan m adalah banyaknya sisi di G.

Bukti:
Teorema ini akan dibuktikan dengan induksi pada m. Jika $m = 0$, maka
$G = \overline{K}_n$, dengan $\overline{K}_n$ adalah graf yang tidak memiliki sisi dan $P(G, k) = k^n$. Karena polinomial kromatik graf $\overline{K}_n$ adalah $P(G, k) = k^n$, terlihat bahwa
$P(G, k) = k^n$ merupakan polinomial dalam k berderajat n.

Untuk langkah induksi, misalkan G graf dengan n titik dengan $m \geq 1$ dan misalkan $e = uv$ sebuah sisi di G. Berdasarkan Teorema 1,

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G \cdot e, k)$$

dengan $G - e$ adalah graf yang diperoleh dengan menghapus sisi e dan $G \cdot e$ adalah graf yang diperoleh dengan mengkontraksi sisi e, maka $G - e$ mempunyai n titik dan $m - 1$ sisi, sedangkan $G \cdot e$ mempunyai $n - 1$ titik. Dengan hipotesis induksi, ada bilangan bulat non negatif $\{a_i\}$ dan $\{b_i\}$ sedemikian hingga

$$P(G - e;\ k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, a_i k^{n-i}$$

$$P(G \cdot e;\ k) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\, b_i k^{n-1-i}$$

Maka berdasarkan Teorema 1,

$$P(G;k) = P(G - e;k) - P(G \cdot e;\ k)$$

$$= k^n - [m-1]k^{n-1} + a_2 k^{n-2} - \dots + (-1)^i a_i k^{n-i}$$

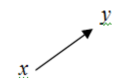
$$-(k^{n-1} - b_1 k^{n-2} + \cdots + (-1)^{i-1} b_{i-1} k^{n-i}$$

$$= k^n - mk^{n-1} + (a_2 + b_1)k^{n-2} - \cdots + (-1)^i (a_i + b_{i-1})k^{n-i}$$

$P(G;k)$ adalah polinomial dengan koefisien k^n adalah $a_0 = 1$, dan koefisien k^{n-1} adalah $-(a_1 + b_0) = -m$. Jadi, terbukti bahwa koefisien k^n adalah 1 dan koefisien k^{n-1} adalah $-m$.

2.3 Himpunan Terurut Parsial

Himpunan terurut parsial (*poset*) $P = (S, \leq)$ merupakan pasangan himpunan S dan relasi biner $\leq$ pada S yang memenuhi sifat berikut: [1]
(a) Refleksif, $x \leq x$, untuk setiap $x \in S$;
(b) Transitif, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$;
(c) Antisimetris, jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.
Catatan:
1. Jika $x \leq y$ digambarkan dalam diagram poset, maka $x \leq y$ berbentuk



Gambar 5. Diagram poset untuk $x \leq y$

2. Jika $x \leq x$ tidak refleksif, akan ada penjelasan lebih lanjut tentang sebab mengapa suatu himpunan tidak memenuhi sifat refleksif.

Jika relasi biner pada himpunan S irrefleksif, untuk setiap $x \in S, x \neq x$, antisimetris dan transitif, $P = (S, \leq)$ disebut pengurutan parsial kuat (*strict partial ordering*). [3]

Sebuah interval $[x, y] = \{t \in S \mid x \leq t \leq y\}$, untuk setiap $x, y \in S$. Suatu poset dikatakan hingga secara lokal (*locally finite*) jika untuk setiap interval $[x, y]$ memuat sejumlah hingga elemen. [1]

Misalkan P poset dan $A \subset P$. Elemen w disebut batas bawah A jika dan hanya jika $w \in P$, dan untuk setiap $a \in A, w \leq a$. Jika u adalah batas bawah A sedemikian hingga $w \leq u$, untuk setiap w batas bawah yang lain, maka u adalah batas bawah terbesar A atau infimum (A). Elemen t disebut batas atas A jika dan hanya jika $t \in P$, dan untuk setiap $a \in A, a \leq t$. Jika v adalah batas atas A sedemikian hingga $v \leq t$ untuk setiap t batas atas yang lain, maka v disebut batas atas terkecil A atau supremum (A). [8]

Sebuah poset dengan sifat bahwa setiap pasangan elemen memiliki infimum dan supremum disebut latis. [8]

Misalkan H sebuah himpunan. Sebuah partisi H adalah sebuah koleksi P yang terdiri atas himpunan bagian tak kosong di H, saling asing, dan gabungan semuanya adalah H. Setiap elemen partisi ini disebut bagian (*part*). [7]

Misalkan P dan Q dua partisi suatu himpunan. P dikatakan lebih halus (*finer*) daripada Q, dinotasikan dengan $P \prec Q$, jika setiap bagian di P adalah subhimpunan di suatu bagian di Q, dengan $P \neq Q$. Dapat dikatakan bahwa Q lebih kasar (*coarser*) daripada P. Hubungan ini disebut sebagai pengurutan penghalusan (*refinement ordering*) partisi sebuah himpunan. [3]

Sebuah ikatan (*bond*) graf G adalah sebuah partisi himpunan titik G sedemikian hingga setiap dua titik dalam bagian yang sama terhubung dalam graf (berarti bahwa titik-titik tersebut berhubungan langsung atau terdapat lintasan antara titik-titik tersebut yang termasuk dalam bagian yang sama).

Himpunan ikatan ini membentuk sebuah latis dengan relasi urutan $P \leq Q$ jika $P \prec Q$ dan disebut sebagai latis ikatan (*bond lattice*). [3]

Teorema 5
Pengurutan penghalusan (*refinement ordering*) pada partisi sebuah himpunan H adalah pengurutan parsial kuat.

Bukti:

a) Misalkan P dan Q partisi himpunan H sedemikian hingga $P \prec Q$. Berdasarkan Definisi 2.3.7, jelas bahwa $P \prec Q$ hanya jika $P \neq Q$. Oleh karena itu, $P \nprec P$.

b) Misalkan P dan Q partisi himpunan H sedemikian hingga $P \prec Q$. Sekarang andaikan bahwa $Q \prec P$. Misalkan q_1 sebuah bagian di Q. Karena $Q \prec P$, terdapat $p \in P$ sedemikian hingga $q_1 \subseteq p$. Tetapi, dari $P \prec Q$ juga terdapat $q_2 \in Q$ sedemikian hingga $p \subseteq q_2$. Dengan sifat transitif $\subseteq$, ini berarti bahwa $q_1 \subseteq q_2$. Karena Q adalah partisi, maka semua bagiannya saling asing. Fakta $q_1 \subseteq q_2$ mengakibatkan bahwa $q_1 = q_2$. $q_1 \subseteq p$ dan $p \subseteq q_1$. Ini berarti bahwa $q_1 = p$, dengan $p \in P$. Sebaliknya, dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa jika $p_1 \in P$, maka $p_1 \in Q$. Dapat simpulkan bahwa $P = Q$. Hal ini kontradiksi dengan sifat irrefleksif. Jadi, $Q \nprec P$.

c) Sekarang, misalkan P, Q, dan S adalah partisi-partisi sebuah himpunan H sedemikian hingga $P \prec Q$ dan $Q \prec S$.
$P \prec Q$, berarti $P \neq Q$ jika dan hanya jika terdapat $q_1 \in Q, q_1 \notin P$ … (*)
atau terdapat $p_1 \in P,\ p_1 \notin Q$. … (**)
$Q \prec S$, berarti $Q \neq S$ jika dan hanya jika terdapat $q_1 \in Q, q_1 \notin S$ atau terdapat $s_1 \in S$, $s_1 \notin Q$.
Akan dibuktikan $P \neq S$. Andaikan $P = S$,
Karena $Q \prec S$, terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $q_1 \subseteq s_1 \in P$. …(1)
Dari $P \prec Q$, juga terdapat $q_2 \in Q$ sedemikian hingga $s_1 \subseteq q_2$. …(2)
Dengan sifat transitif $\subseteq$, dari (1) dan (2) diperoleh $q_1 \subseteq s_1 \subseteq q_2$.
Akibatnya $q_1 = s_1 = q_2$, dengan $q_1 \in P$. Hal ini kontradiksi dengan (*).
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa jika $p_1 \in P$, maka $p_1 \in Q$. Karena $P \prec Q$, terdapat $q_1 \in Q$ sedemikian hingga $p_1 \subseteq q_1 \in Q$, dan karena $Q \prec S$, juga terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $q_1 \subseteq s_1 \in Q$. Dengan sifat transitif dari $\subseteq$, maka

$$p_1 \subseteq q_1 \subseteq s_1 \in P.$$

Akibatnya $p_1 = s_1 = q_1 \in Q$. Hal ini kontradiksi dengan (**). Jadi, $P \neq S$.
Kemudian akan dibuktikan sifat transitif bahwa $P \prec S$.
Dari $P \prec S$, Misalkan $p \in P$. Terdapat $q \in Q$ sedemikian hingga $p \subseteq q$. Akibatnya $Q \prec S$, terdapat $s \in S$ sedemikian hingga $q \subseteq s$. Dengan sifat transitif relasi $\subseteq$, maka $p \subseteq s$, dengan $P \neq S$ karena jika $P \prec Q$ dan $Q \prec P$, hal ini kontradiksi dengan sifat antisimetri. Jadi, $P \prec S$.

2.4 Inversi Mobius

Misalkan P sebuah poset. Jika $x, y \in P$, fungsi *Mobius* $\mu: P \times P \to \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai berikut [3]

$$\mu(x,\ y) = \begin{cases} 1, jika\ x = y \\ -\sum_{z:\, x \leq z < y} \mu(x, z)\ , jika\ x < y \\ 0, jika\ x \nleq y \end{cases}$$

Misalkan P latis dengan *n* elemen. Dapat ditulis sebuah matriks $n \times n$ yang memuat semua kemungkinan nilai fungsi *Mobius*. Matriks ini disebut sebagai matriks *Mobius*. [3]

Dalam matriks *Mobius*, setiap kolom dan baris dilabeli dengan nama sebuah elemen di *P*. Sebuah entri dalam matriks adalah nilai $\mu(a, b)$, dengan elemen *a* bersesuaian dengan baris entri dan elemen *b* bersesuaian dengan kolom entri tersebut. Matriks *Mobius* dikonstruksi sedemikian hingga elemen-elemen yang muncul lebih rendah dalam latis bersesuaian dengan baris yang paling dekat dengan matriks paling atas dan kolom paling jauh ke kiri.

Misalkan P poset. Fungsi $\xi: P \times P \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut: [3]

$$\xi(a,\ b) = \begin{cases} 0, jika\ a \nleq b \\ 1, jika\ a \leq b \end{cases}$$

untuk semua *a* dan *b* di *P*. Fungsi ini disebut fungsi *Zeta* poset *P*.

Misalkan P latis dengan *n* elemen. Sebuah matriks *Zeta* adalah sebuah matriks $n \times n$ yang memuat nilai *Zeta* $\xi(a,\ b)$, untuk semua *a* dan *b* di *P*. [3]

Jika *a* dan *b* elemen poset *P*, fungsi $\delta: P \times P \to \{0,1\}$, dinotasikan δ(*a,b*), didefinisikan sebagai berikut: [3]

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 0, jika\ a \neq b \\ 1, jika\ a = b \end{cases}$$

Matriks *Delta* adalah hasil kali matriks *Mobius* dan matriks *Zeta*. [3]

Jika a dan b elemen poset P, dengan $a \neq b$, fungsi $\delta: P \times P \to \{0,1\}$. Akan dibuktikan bahwa hasil kali nilai fungsi *Mobius* dan nilai fungsi *Zeta* adalah identitas.

$$(\mu\xi)(a,b) = \sum\nolimits_{a \le x \le b} \mu(a,x)\xi(x,b)$$

$$= \sum\nolimits_{a \le x < b} \mu(a,x)\xi(x,b) + \mu(a,b)\xi(b,b) \ldots\ldots (*)$$

Berdasarkan definisi fungsi *Mobius*,

$$\mu(a,b) = -\sum_{x:\, a \le x < b} \mu(a,x), \qquad untuk\ a < b$$

$$\mu(a,b) = \frac{-1}{\xi(b,b)} \sum_{x:\, a \le x < b} \mu(a,x)\xi(x,b)$$

Sehingga persamaan (*) menjadi

$$(\mu\xi)(a,b) = \sum\nolimits_{a \le x < b} \mu(a,x)\xi(x,b) + \mu(a,b)\xi(b,b)$$

$$= -\mu(a,b)\xi(b,b) + \mu(a,b)\xi(b,b)$$

$$= 0$$
$$= \delta(a,b)$$

Terlihat bahwa μ dan ξ saling invers yang jika dikalikan hasilnya adalah identitas.

Teorema 6 (*Rumus Inversi Mobius I*)

Misalkan P poset hingga secara lokal dan $f, g: P \to \mathbb{Z}$. Maka untuk setiap $x \in P$, berlaku

$$g(x) = \sum_{x \le y} f(y) \ \to\ f(x) = \sum_{x \le y} g(y)\mu(x,y).$$

Bukti:

Diketahui

$$g(x) = \sum_{x \le y} f(y)$$

dan $g(y)$ juga dapat dinyatakan dengan

$$g(y) = \sum_{y \le z} f(z)$$

$$\sum_{x \le y} g(y)\mu(x,y) = \sum_{x \le y}\left(\sum_{y \le z} f(z)\right)\mu(x,y)$$

$$= \sum_{x \le y}\left(\sum_{z} f(z)\xi(y,z)\right)\mu(x,y)$$

dengan $\xi(y,z) = 0$ untuk $y \nleq z$.

Karena P poset hingga secara lokal, maka interval $[x, z]$ memuat sejumlah hingga elemen, sehingga

$$\sum_{x \le y}\left(\sum_{z} f(z)\xi(y,z)\right)\mu(x,y) = \sum_{z} f(z) \sum_{x \le y} \mu(x,y)\,\xi(y,z)$$

Misalkan $\sum_{x \le y} \mu(x,y)\xi(y,z) = \delta(x,z)$. Jadi,

$$\sum_{z} f(z) \sum_{x \le y} \mu(x,y)\,\xi(y,z) = \sum_{z} f(z)\delta(x,z)$$

Karena $\delta(x,z) = 1$ ketika $x = z$ dan 0 untuk $x \neq z$, kita memperoleh

$$\sum_{z} f(z)\delta(x,z) = f(x)$$

Teorema 7 (*Rumus Inversi Mobius II*)

Misalkan P poset hingga secara lokal $f, g: P \to \mathbb{Z}$. Maka untuk setiap $x \in P$, berlaku

$$g(x) = \sum_{y \le x} f(y) \to f(x) = \sum_{y \le x} g(y)\mu(y,x).$$

Bukti teorema ini analog dengan pembuktian teorema Rumus Inversi Mobius I.

Teorema 8

Misalkan G sebuah graf sederhana dengan n titik. Misalkan π partisi $V(G)$ yang terdiri atas komponen-komponen graf G (blok). Misalkan $P(G;k)$ banyak pewarnaan-k di G dengan

1. semua titik dalam sebuah blok memiliki warna sama;
2. setiap dua blok yang berhubungan langsung memiliki warna berbeda (dua blok dikatakan berhubungan langsung jika terdapat lintasan yang menghubungkan kedua blok tersebut).

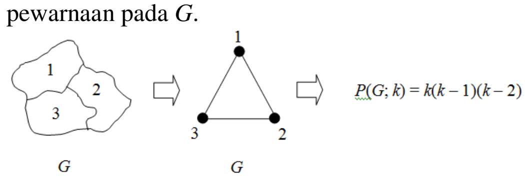
Maka

$$P(G;k) = \sum_{G \le \pi} P(\pi;k)$$

Bukti:

Misalkan G sebuah graf sederhana dengan n titik dan $P(G;k)$ banyaknya pewarnaan pada G yang diperoleh dengan menghapus sisi di G.

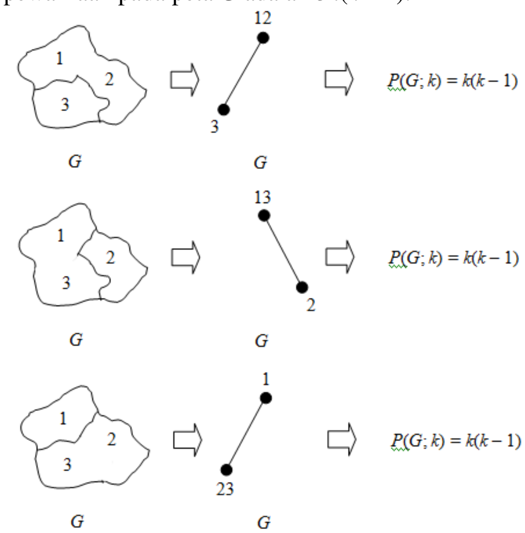
Asumsikan G sebuah peta dan $P(G;\, k)$ banyaknya pewarnaan pada G.



Gambar 6. Ilustrasi peta G, graf G, dan polinomial kromatik dari G

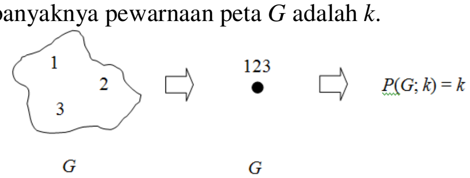
Subpeta π dari G diperoleh dengan menghapus batas-batas antara negara-negara yang berwarna sama.

Misalkan batas antara negara 1 dan 2 dihapus, maka banyaknya pewarnaan peta *G* adalah $k(k-1)$. Jika dikombinasikan batas antara dua negara dihapus, maka jumlah banyaknya pewarnaan pada peta *G* adalah $3k(k-1)$.



Gambar 7. Ilustrasi peta *G*, graf *G*, dan polinomial kromatik dari *G* yang sudah dihapus batas-batas negara-negaranya

Jika semua batas-batas negara dihapus, maka banyaknya pewarnaan peta *G* adalah *k*.



Gambar 8. Ilustrasi peta *G*, graf *G*, dan polinomial kromatik dari *G* yang sudah dihapus semua batas-batas negara-negaranya

Setiap peta dapat diwarnai dengan $k^{|G|}$ cara dengan $|G|$ banyak negara di *G*. Maka banyaknya pewarnaan pada peta *G* di atas adalah

$$k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k = k(k^2 - 3k + 2) + 3k^2 - 3k + k$$

$$= k^3 - 3k^2 + 2k + 3k^2 - 3k + k$$

$$= k^3$$

Relasi "subgraf dari" membentuk subpeta π dari *G* menjadi sebuah poset dan

$$k^{|\pi|} = \sum_{\sigma:\, \pi \leq \sigma} P(\sigma; k)$$

Misalkan $f(\pi) = P(\pi; k)$ dan $g(\sigma) = k^{|\sigma|}$.

Berdasarkan Teorema 6 (Rumus Inversi *Mobius* I),

$$P(\pi; k) = \sum_{\sigma:\, \pi \leq \sigma} \mu(\pi, \sigma)\, k^{|\sigma|} \qquad \ldots \ldots (*)$$

Karena π adalah partisi di *G*, maka

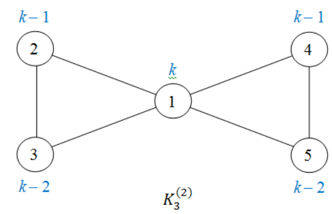
$$P(G; k) = \sum_{G \leq \pi} P(\pi; k) \qquad \ldots \ldots (**)$$

Dari persamaan (*) dan (**) diperoleh

$$P(G; k) = \sum_{\sigma:\, \pi \leq \sigma} \mu(\pi, \sigma)\, k^{|\sigma|}$$

Contoh

Misalkan diketahui graf kincir $K_3^{(2)}$ yang diberikan pada Gambar 9.



Gambar 9. Graf kincir $K_3^{(2)}$ dan representasi perhitungan polinomial kromatiknya

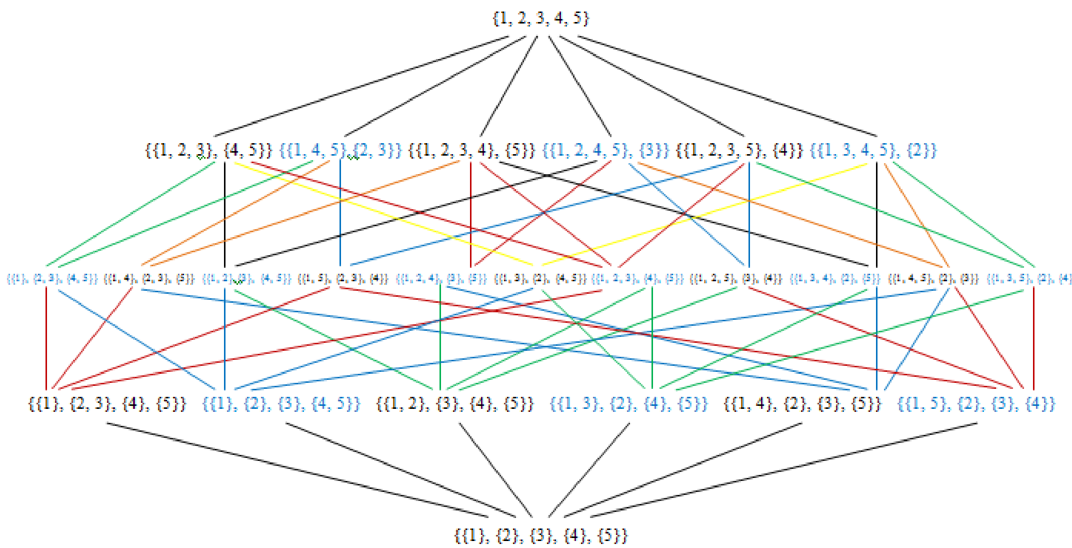
Berdasarkan gambar di atas, perhatikan bahwa polinomial kromatik graf kincir $K_3^{(2)}$ adalah

$$P\left(K_3^{(2)}; k\right) = k(k-1)^2(k-2)^2$$

$$= k^5 - 6k^4 + 13k^3 - 12k^2 + 4k$$

Hasil ini seharusnya sama dengan yang dihasilkan oleh polinomial kromatik dengan teorema inversi *Mobius*.

Supaya diperoleh hasil tersebut dibutuhkan latis ikatan dari graf kincir $K_3^{(2)}$, sedemikian hingga diperoleh urutan pada ikatan dari titik-titik graf kincir $K_3^{(2)}$, dengan $V\left(K_3^{(2)}\right) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Latis ikatan diberikan pada Gambar 10. Dalam membuat latis ikatan tetap memperhatikan keterhubungan grafnya.



Gambar 10. Latis ikatan graf kincir $K_3^{(2)}$

Latis ikatan diberikan pada Gambar 10 untuk mendefinisikan fungsi *f* dan *g* untuk setiap ikatan *b*. Fungsi $f(b)$ merepresentasikan banyaknya pewarnaan pada graf kincir $K_3^{(2)}$ yang memiliki tepat *b* sebagai representasi ikatannya. Fungsi $g(b)$ merepresentasikan banyaknya pewarnaan graf kincir $K_3^{(2)}$ yang memiliki paling sedikit *b* sebagai ikatannya. Untuk setiap ikatan *b* dan banyaknya warna *k*

$$g(b) = k^{|b|}$$

dengan $|b|$ banyaknya blok dalam ikatan *b*. Semua titik dalam blok yang sama mendapat warna yang sama dan titik-titik dalam blok yang berbeda mendapat warna berbeda. Hasilnya ada *k* cara untuk mewarnai setiap blok dalam ikatan dan terdapat $k^{|b|}$ cara untuk mewarnai sebuah ikatan dengan $|b|$ blok.

Untuk menghitung polinomial kromatik dari *G*, diperlukan menghitung

$$f(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\})$$

dengan ikatan $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ merepresentasikan semua pewarnaan dimana tidak ada dua titik berhubungan langsung mendapat warna sama.

Misalkan ikatan $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ dinotasikan dengan π. Maka dengan teorema inversi *Mobius*,

$$f(\pi) = \sum_{\sigma:\, \pi \le \sigma} \mu(\pi, \sigma) g(\sigma)$$

untuk semua ikatan σ. Diperlukan juga menghitung $\mu(\pi, \sigma)$.

Semua ikatan pada tingkat yang sama dalam latis memiliki banyak blok yang sama. Untuk setiap ikatan σ pada tingkat yang sama,

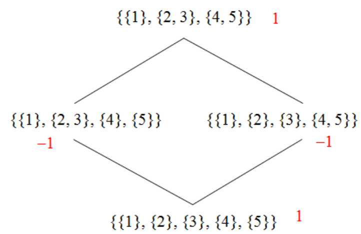
$$g(\sigma) = k^{|\sigma|}$$

dengan $|\sigma|$ banyaknya blok dalam ikatan.

Ikatan pada tingkat pertama adalah ikatan yang paling halus, maka ikatan pada tingkat petama selalu memiliki nilai fungsi *Mobius* 1. Sementara ikatan pada tingkat kedua masing-masing bernilai -1. Banyaknya ikatan pada tingkat kedua adalah jumlah sisi pada graf. Untuk menghitung nilai fungsi *Mobius* ikatan pada tingkat ketiga, keempat, dan kelima dibuat latis kecil untuk setiap ikatan.

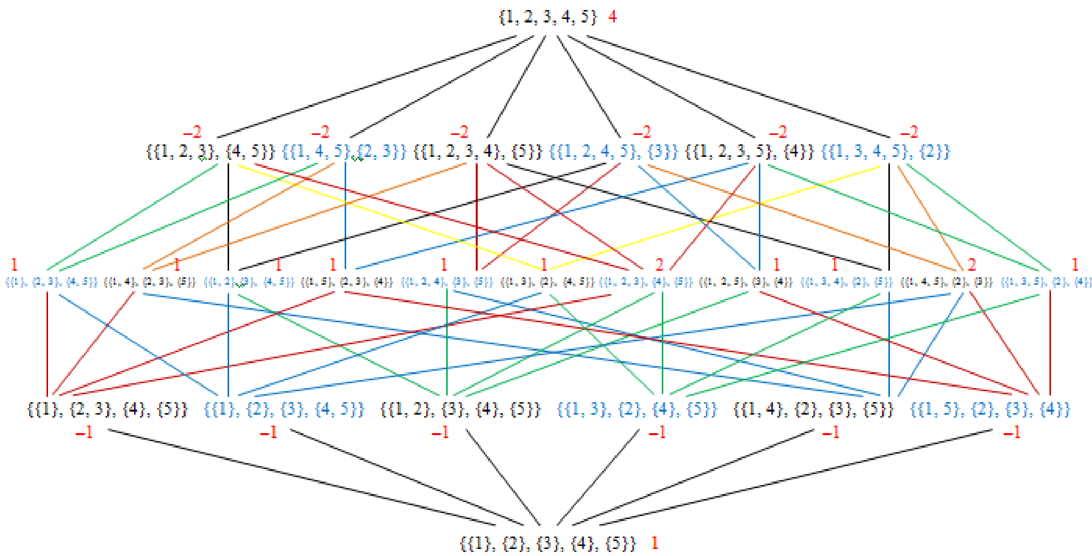
Sebagai contoh, ikatan $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$, dapat dibentuk latis kecil yang diberikan pada Gambar 11. Latis ini memuat semua ikatan yang lebih halus dari $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Dengan menggunakan fungsi *Mobius*, ditemukan bahwa

$$\mu(\pi, \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}) = 1$$



Gambar 11. Latis kecil untuk ikatan {{1}, {2, 3}, {4, 5}}

Nilai fungsi *Mobius* untuk ikatan-ikatan yang lain dapat dihitung dengan cara yang sama seperti yang dilakukan pada ikatan {{1}, {2, 3}, {4, 5}}. Sehingga diperoleh latis ikatan pada Gambar 12.



Gambar 12. Latis ikatan dari graf kincir $K_3^{(2)}$ beserta nilai fungsi *Mobius*nya

Untuk menemukan nilai fungsi ikatan paling kasar {1, 2, 3, 4, 5} hanya dengan menjumlah nilai-nilai fungsi *Mobius* untuk setiap ikatan lainnya, kemudian menentukan invers aditif dari jumlah nilai fungsi *Mobius* ikatan ini. Jadi, jika semua nilai fungsi *Mobius* dijumlahkan, akan ditemukan jumlahnya sama dengan –4. Akibatnya,

$$\mu(\pi, \{1,2,3,4,5\}) = 4.$$

Terlihat bahwa setiap ikatan pada tingkat sama pada latis memiliki jumlah bagian yang sama. Jadi, untuk setiap ikatan σ pada tingkat sama, $g(\sigma) = k^{|\sigma|}$, dengan $|\sigma|$ banyaknya bagian. Kemudian, jumlahkan nilai fungsi *Mobius* untuk semua ikatan pada setiap tingkat dan gunakan nilai hasil penjumlahan ini sebagai koefisien dari $k^{|\sigma|}$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \sum_{\sigma:\,\pi\leq\sigma} \mu(\pi,\sigma)g(\sigma) \\ &= k^5 - 6k^4 + 13k^3 - 12k^2 + 4k \end{aligned}$$

untuk semua ikatan σ, dengan $f(\pi) = P(K_3^{(2)}; k)$.

Untuk n yang besar akan kesulitan untuk membentuk latis ikatannya, sehingga cara ini tidak efektif untuk menetukan polinomial kromatik suatu graf.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bender E. A., dan J. R. Goldman. 1975. *Mobius Inversion In Combinatorial Analysis: On The Applications of Mobius Inversion In Combinatorial Analysis*.

[2] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

[3] Fouts, Cody. *The Chromatic Polynomial*. (http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2009/fouts.pdf, diakses Jumat, 06 April 2012)

[4] Galian, J. A. 2011. *A Dynamic Survey of Graph Labelling. The Electronic Journal of Combinatorics*.

[5] Hammer, P. T. and Simeone. 1980. *The Splittance of a Graph*. Canada: University of Waterloo, Ont.

[6] Helleloid, Geir T. 2008. *Algebraic Combinatorics*. (http://www.ma.utexas.edu/users/geir/teaching/m390c/lecturenotes.pdf, diakses Minggu, 08 April 2012).

[7] Loehr, Nicholas A. 2011. *Bijective Combinatorics*. New York: Crc Press.

[8] Stanley, Richard P. 2011. *Enumerative Combinatorics Volume 1*. New York: Cambridge University Press.

[9] Wilson, Robin J. and John J. Watkins. 1981. *Graph and Introductory Approach*. New York: John Wiley and Sons, inc.