

ANALISIS KESTABILAN MODEL EKOEPIDEMIOLOGI DENGAN PEMANENAN SEBAGAI KONTROL PENYEBARAN PENYAKIT

Choirotul Ummah¹, Abadi¹

¹Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, 60231

Email: choirotul92@yahoo.co.id , abadi4@yahoo.com

ABSTRAK

Dalam artikel ini, direkonstruksi suatu model ekoepidemiologi dengan pemanenan yang menggambarkan interaksi antara populasi ikan tilapia rentan, ikan tilapia terinfeksi oleh bakteri, dan populasi burung pelikan yang berada di Laut Salton, California, yang dipengaruhi adanya pemanenan pada populasi ikan tilapia. Selanjutnya model tersebut dilinierisasi, sehingga diperoleh 4 titik kritis yang memenuhi dari 8 titik kritis yang diperoleh, di mana kestabilannya dianalisis berdasarkan nilai eigen dan salah satu titik kritisnya dianalisis berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Untuk menganalisis keberadaan titik bifurkasi dan jenis bifurkasinya, menggunakan metode manifold pusat, sehingga diperoleh bidang vektor di manifold pusat yang menunjukkan adanya suatu bifurkasi yang menarik yaitu bifurkasi transkritikal dan bifurkasi *Hopf*. Untuk menggambar orbit kestabilan dan diagram bifurkasi, menggunakan *software MatCont*. Dari hasil analisis kestabilan dan bifurkasi tersebut, dilakukan interpretasi biologi tentang peran usaha pemanenan dalam mengontrol penyebaran penyakit dan pengaruhnya terhadap pertumbuhan populasi ikan tilapia dan burung pelikan.

Kata kunci: model ekoepidemiologi dengan pemanenan, kestabilan lokal, bifurkasi, manifold pusat

PENDAHULUAN

Proses pemangsaan terjadi antara mangsa dan pemangsa, sebab tanpa adanya mangsa, populasi pemangsa tidak dapat hidup. Salah satu faktor yang mempengaruhi proses pemangsaan tersebut adalah adanya penyakit. Apabila suatu spesies mangsa terserang penyakit, hal ini akan mengubah perilaku mangsa, sehingga lebih mudah untuk dipredasi

Fenomena alam yang menggambarkan interaksi mangsa pemangsa, di mana populasi mangsa terserang penyakit, dijelaskan oleh Chattopadhyay dan Bairagi (2001), yaitu interaksi antara populasi burung pelikan dan ikan tilapia di Laut Salton, California. Ikan tilapia tersebut terinfeksi bakteri *Avian botulism*. Bakteri

tersebut membuat beberapa bagian tubuh ikan tilapia mengalami kekosongan oksigen. Sehingga, mengubah perilaku ikan tilapia yang terinfeksi yaitu mereka akan berenang menuju permukaan air dan menjadi rentan dipredasi oleh burung pelikan. Apabila burung pelikan memakan ikan tilapia terinfeksi yang masih hidup, maka mereka akan mengalami keracunan dan mati, karena di dalam jaringan tubuh ikan tilapia terinfeksi masih terdapat racun *botulism* yang dihasilkan oleh bakteri *Avian botulism*. Berdasarkan fenomena tersebut, Chattopadhyay dan Bairagi (2001) membuat model ekoepidemiologi, yang terdiri dari populasi ikan ikan tilapia rentan, ikan tilapia yang terinfeksi oleh bakteri dan populasi burung pelikan. Dalam hal ini diasumsikan, burung pelikan hanya memangsa ikan tilapia terinfeksi.

Pengembangan model ekoepidemiologi tersebut dilakukan oleh Bairagi, *et.al* (2009) dengan mengasumsikan adanya pemanenan pada populasi ikan tilapia. Pemanenan bertujuan untuk mengurangi banyaknya ikan tilapia, sehingga penyebaran penyakit antara ikan tilapia rentan dan terinfeksi dapat dikontrol.

Pada artikel ini akan dibahas rekonstruksi model ekoepidemiologi dengan pemanenan yang dimodelkan oleh Bairagi, *et.al* (2009). Selanjutnya akan ditentukan titik kritis, identifikasi kestabilan lokal, jenis titik kritis dan identifikasi adanya bifurkasi dengan menetapkan parameter usaha pemanenan sebagai parameter bifurkasi. Sehingga dapat diketahui bagaimana peran pemanenan sebagai kontrol penyebaran penyakit pada populasi ikan tilapia dan pengaruhnya terhadap pertumbuhan populasi ikan tilapia dan burung pelikan.

Pengembangan yang dilakukan dalam penulisan ini adalah menentukan jenis bifurkasi menggunakan metode manifold pusat. Untuk menggambar orbit kestabilan dan diagram bifurkasi menggunakan *software MatCont*.

PEMBAHASAN

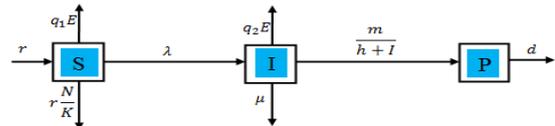
Rekonstruksi Model Ekoepidemiologi Dengan Pemanenan

Dengan adanya penyakit karena infeksi bakteri *Avian0 botulism*, jumlah populasi ikan tilapia di Laut Salton adalah $N(t) = S(t) + I(t)$, di mana S adalah banyaknya ikan tilapia rentan dan I adalah banyaknya ikan tilapia terinfeksi. Banyaknya ikan tilapia rentan menjadi ikan tilapia terinfeksi adalah λIS , di mana λ adalah laju penyebaran penyakit. Infeksi bakteri hanya terjadi apabila terjadi kontak langsung antara ikan tilapia terinfeksi terhadap ikan tilapia rentan. Ikan tilapia yang terinfeksi bakteri tersebut, akan mati dalam beberapa hari dan cenderung berenang ke permukaan air. Pertumbuhan populasi ikan tilapia mengikuti model logistik, yang dinyatakan dengan $rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, dengan $N = S + I$. Karena ikan tilapia terinfeksi akan mati dalam beberapa hari, maka suku $rI\left(1 - \frac{S+I}{K}\right)$ diasumsikan bernilai nol, sehingga pertumbuhan populasi ikan tilapia adalah $rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right)$, artinya pertumbuhan populasi ikan tilapia dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian ikan tilapia rentan baik kematian alami maupun kematian karena penyakit. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi ikan tilapia rentan akan dipengaruhi oleh komponen $r\frac{N}{K}$.

Diasumsikan burung pelikan hanya memakan ikan tilapia yang telah mati, karena burung pelikan akan mengalami keracunan apabila memakan ikan tilapia terinfeksi yang masih hidup. Banyaknya ikan tilapia terinfeksi yang dimakan mengikuti respon fungsional Holling tipe II yaitu $\frac{mIP}{h+I}$. Kelahiran populasi burung pelikan bergantung pada jumlah maksimum mangsa yang dimakan, maka banyaknya burung pelikan yang lahir adalah $\frac{\theta mIP}{h+I}$, di mana θ adalah efisiensi pemangsaan. Jika laju kematian alami ikan tilapia terinfeksi adalah μ , maka banyaknya ikan tilapia terinfeksi yang mati secara alami karena penyakit adalah μI . banyaknya burung pelikan yang mati secara alami adalah dP , dengan laju kematian alami dinyatakan dengan $d = \eta + \rho$ yaitu laju kematian burung pelikan karena tidak ada makanan ditambah kematian karena keracunan akibat mamakan ikan tilapia terinfeksi yang masih hidup.

Pemanenan hanya dilakukan terhadap populasi ikan tilapia yang dilakukan secara non selektif oleh nelayan, di mana laju penangkapan ikan tilapia terinfeksi lebih besar daripada ikan tilapia rentan. Banyaknya ikan tilapia rentan yang ditangkap oleh nelayan adalah $q_1 ES$ dan banyaknya ikan tilapia terinfeksi yang ditangkap oleh nelayan adalah $q_2 EI$.

Berikut diberikan model kompartemen dari model ekoepidemiologi dengan pemanenan berdasarkan asumsi di atas.



Gambar 1. Model Kompartemen dari Model Ekoepidemiologi Dengan Pemanenan

Keterangan :

- S = banyaknya ikan tilapia rentan per satuan area
- I = banyaknya ikan tilapia terinfeksi per satuan area
- P = banyaknya burung pelikan per satuan area
- r = laju pertumbuhan intrinsik yang berhubungan dengan kelahiran dan kematian alami ikan tilapia rentan
- K = kapasitas maksimum ikan tilapia yang ada di Laut Salton
- λ = laju penyebaran penyakit
- m = laju pemangsaan ikan tilapia terinfeksi oleh pemangsa
- h = banyaknya ikan tilapia terinfeksi, saat laju pemangsaan burung pelikan sama dengan setengah dari laju pemangsaan maksimalnya
- θ = efisiensi pemangsaan yaitu kemudahan pemangsa untuk mendapatkan ikan tilapia terinfeksi
- μ = laju kematian alami ikan tilapia terinfeksi
- d = laju kematian alami burung pelikan
- q_1 = laju penangkapan ikan tilapia rentan
- q_2 = laju penangkapan ikan tilapia terinfeksi
- E = usaha pemanenan yang dilakukan oleh nelayan

Dari asumsi dan diagram kompartemen tersebut, diperoleh model ekoepidemiologi dengan pemanenan yang menggambarkan interaksi antara ikan tilapia dan burung pelikan di Laut Salton, yang dipengaruhi oleh infeksi bakteri dan pemanenan pada populasi ikan tilapia, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \lambda IS - q_1 ES \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda IS - \frac{mIP}{h+I} - \mu I - q_2 EI \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\theta mIP}{h+I} - dP \end{aligned} \quad (1)$$

Penentuan Titik Kritis

Dengan menolkan ruas kanan pada model (1) terdapat 4 titik kritis yang memenuhi dari 8 titik kritis yang diperoleh yaitu

$$T_0 = (0, 0, 0), T_1 = \left(K \left(1 - \frac{q_1 E}{r} \right), 0, 0 \right),$$

$$T_2 = \left(\frac{\mu + q_2 E}{\lambda}, \frac{r(\lambda K - q_2 E - \mu) - q_1 E \lambda K}{\lambda(\lambda K + r)}, 0 \right) \text{ dan}$$

$$T_3 = \left(K - \frac{hd(r + \lambda K)}{r(m\theta - d)} - \frac{q_1 EK}{r}, \frac{hd}{m\theta - d}, \frac{h + I^*}{m} (\lambda S^* - \mu - q_2 E) \right).$$

Kestabilan Titik Kritis

Model (1) dilinierisasi di sekitar titik kritisnya diperoleh matriks Jacobi A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} r \left(\frac{K - 2S^* - I}{K} \right) - \lambda I^* - q_1 E & -\frac{S^*(r + \lambda K)}{K} & 0 \\ \lambda I^* & -\frac{hmP^*}{(h + I^*)^2} + \lambda S^* - \mu - q_2 E & -\frac{mI^*}{(h + I^*)} \\ 0 & \frac{hm\theta P^*}{(h + I^*)^2} & \frac{m\theta I^*}{h + I^*} - d \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusi titik kritis di matriks Jacobi A, secara analitik diperoleh kestabilannya sebagai berikut :

1. Kestabilan titik kritis T_0

Dengan menyelesaikan $\det(A_0 - \psi_1 I) = 0$, di mana A_0 adalah matriks Jacobi di sekitar titik kritis T_0 , I adalah matriks identitas ordo 3×3 dan ψ_1 adalah nilai eigen di titik kritis T_0 . Nilai eigennya adalah

$\psi_{11} = r - q_1 E$, $\psi_{12} = -\mu - q_2 E$ dan $\psi_{13} = -d$. Dari nilai eigen tersebut, diperoleh kestabilan titik kritis yaitu, titik kritis T_0 stabil jika batas parameter

usaha pemanenan $E > \frac{r}{q_1}$ dan titik kritis T_0 tak stabil

jika $0 < E < \frac{r}{q_1}$.

2. Kestabilan titik kritis T_1

Dengan menyelesaikan $\det(A_1 - \psi_2 I) = 0$, di mana A_1 adalah matriks Jacobi di sekitar titik kritis T_1 , I adalah matriks identitas ordo 3×3 dan ψ_2 adalah nilai eigen di titik kritis T_1 . Nilai eigennya adalah

$$\psi_{21} = -r + q_1 E,$$

$$\psi_{22} = K\lambda - \frac{Kq_1 E \lambda}{r} - \mu - q_2 E \text{ dan } \psi_{23} = -d. \text{ Dari}$$

nilai eigen tersebut, diperoleh kestabilan titik kritis

yaitu, titik kritis T_1 stabil jika batas parameter usaha pemanenan $E < \frac{r}{q_1}$ dan $E > \frac{r(K\lambda - \mu)}{Kq_1\lambda + rq_2}$. Dan titik

kritis T_1 tak stabil jika $E > \frac{r}{q_1}$ dan

$$E < \frac{r(K\lambda - \mu)}{Kq_1\lambda + rq_2} \text{ dengan } \lambda > \frac{\mu}{K}.$$

3. Kestabilan titik kritis T_2

Dengan menyelesaikan $\det(A_2 - \psi_3 I) = 0$, di mana A_2 adalah matriks Jacobi di sekitar titik kritis T_2 , I adalah matriks identitas ordo 3×3 dan ψ_3 adalah nilai eigen di titik kritis T_2 . Nilai eigennya adalah $\psi_{31} = -a + b$, $\psi_{32} = -a - b$ dan

$$\psi_{33} = \frac{m\theta(r(K\lambda - \mu - q_2 E) - EK\lambda q_1)}{h\lambda^2 K + h\lambda r + r(K\lambda - \mu - q_2 E) - EK\lambda q_1} - d,$$

di mana $a = \frac{r(\mu + Eq_2)}{2\lambda K}$ dan

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^2(\mu + Eq_2)^2}{\lambda^2 K^2} - 4 \frac{(r(K\lambda - \mu - Eq_2) - EK\lambda q_1)(\mu + Eq_2)}{\lambda K}}.$$

Dari nilai eigen tersebut, kestabilan titik kritis yaitu, titik kritis T_2 stabil jika batas parameter usaha pemanenan

$$E < \frac{r(\lambda K - \mu)}{\lambda K q_1 + r q_2}, E > \frac{r(\lambda K - \mu)}{\lambda K q_1 + r q_2} \text{ dan}$$

$$E > \frac{r(\lambda K - \mu)}{\lambda K q_1 + r q_2} - \frac{hd\lambda(r + \lambda K)}{(\lambda K q_1 + r q_2)(m\theta - d)}. \text{ Dan titik kritis}$$

T_2 tak stabil jika $E > \frac{r(\lambda K - \mu)}{\lambda K q_1 + r q_2}$ dan

$$E < \frac{r(\lambda K - \mu)}{\lambda K q_1 + r q_2} - \frac{hd\lambda(r + \lambda K)}{(\lambda K q_1 + r q_2)(m\theta - d)} \text{ dengan}$$

$$m > \frac{d}{\theta} + \frac{hd\lambda(r + \lambda K)}{\theta r(\lambda K - \mu)} \text{ dan } \lambda > \frac{\mu}{K}.$$

4. Kestabilan titik kritis T_3

Dengan menyelesaikan $\det(A_3 - \psi_4 I) = 0$, di mana A_3 adalah matriks Jacobi di sekitar titik kritis T_3 , I adalah matriks identitas ordo 3×3 dan ψ_4 adalah nilai eigen di titik kritis T_1 . Diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\psi_4) = \psi_4^3 + a_1 \psi_4^2 + a_2 \psi_4 + a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = \frac{rS^*}{K} - \frac{mI^*P^*}{(h+I^*)^2}$$

$$a_2 = \frac{mhdP^*}{(h+I^*)^2} + \frac{r\lambda I^*S^*}{K} + \lambda^2 I^*S^* - \frac{rmS^*I^*P^*}{K(h+I^*)^2}$$

$$a_3 = \frac{rmdhS^*P^*}{K(h+I^*)^2}$$

Kestabilan titik kritis T_3 dianalisis menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, sehingga titik kritis T_3 stabil jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$. Penentuan batas parameter usaha pemanenan dilakukan secara numerik menggunakan software *Maple* yang akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

Analisis Numerik Bifurkasi Titik Kritis dan Interpretasinya

Untuk memudahkan analisis bifurkasi titik kritis, diberikan nilai parameter berupa data sekunder yang diperoleh dari artikel penelitian Bairagi *et al* (2007) sebagai berikut. Dalam menentukan nilai parameter laju penyebaran penyakit (λ) dan laju pemangsaan (m) harus disesuaikan dengan analisis yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya,

Tabel 1 Notasi untuk variabel dan parameter beserta nilainya

Variabel dan parameter	Unit	Nilai yang ditentukan
S	Jumlah per satuan area	Variabel
I	Jumlah per satuan area	Variabel
P	Jumlah per satuan area	Variabel
r	Per hari	3
K	Jumlah per satuan area	45
λ	Per hari	0.03
m	Per hari	0.9
h	Jumlah per satuan area	15
μ	Per hari	0.24
θ	Per hari	0.4
d	Per hari	0.09
q_1	Per hari	0.2
q_2	Per hari	0.5
E	Per hari	Parameter yang diubah-ubah

1. Analisis bifurkasi titik kritis T_0

Secara numerik diperoleh kestabilan titik kritis T_0 sebagai berikut, titik kritis T_0 stabil jika batas nilai parameter usaha pemanenan $E > 15$ dan titik kritis T_0 tak stabil jika $0 < E < 15$. Jadi, saat $E = 15$ terjadi bifurkasi. Untuk mengetahui jenis bifurkasi di $E = 15$, menggunakan metode manifold pusat sebagai berikut:

Dari sistem (1), dipilih invarian manifold di $P = 0$ sehingga diperoleh

$$\dot{S} = 3S \left(1 - \frac{S+I}{45} \right) - 0.03IS - 0.2EI \quad (2)$$

$$\dot{I} = 0.03IS - 0.24I - 0.5EI$$

Karena sistem \dot{S} memiliki nilai eigen bernilai nol, sedangkan sistem \dot{I} dan \dot{P} memiliki nilai eigen negatif saat $E = 15$. Sehingga terdapat manifold pusat di sistem (2).

Salah satu titik kritis pada sistem (2) adalah $\bar{T}_0 = (S^*, I^*) = (0, 0)$. Karena invarian manifold (2) bersinggungan dengan manifold pusat di $(0, 0)$, maka titik kritis \bar{T}_0 ditranslasi ke $(0, 0)$ diperoleh sistem hasil translasi sebagai berikut

$$\dot{\bar{S}} = (3 - 0.2E)\bar{S} - \frac{\bar{S}^2}{15} - 0.15\bar{I} \quad (3)$$

$$\dot{\bar{I}} = (-0.24 - 0.5E)\bar{I} + 0.03\bar{S}$$

Karena sistem (3) bergantung pada parameter E, maka dengan memasukkan parameter E sebagai variabel tak bebas baru, sistem (3) menjadi

$$\dot{\bar{S}} = (3 - 0.2E)\bar{S} - \frac{\bar{S}^2}{15} - 0.15\bar{I} \quad (4)$$

$$\dot{E} = 0$$

$$\dot{\bar{I}} = (-0.24 - 0.5E)\bar{I} + 0.03\bar{S}$$

Setelah dilinierisasi, sistem (3) memiliki nilai eigen bernilai nol dan negatif jika $E = 15$, maka terdapat manifold pusat pada sistem (3) di $(0, 0)$, yang didefinisikan sebagai

$$W^c(0) = \{(\bar{S}, E, \bar{I}) \in \mathbf{R}^3 \mid \bar{I} = \mathcal{H}(\bar{S}, E), \mathcal{H}(0, 0) = 0, D\mathcal{H}(0, 0)\}$$

untuk \bar{S} dan E sangat kecil.

Untuk menentukan bidang vektor di manifold pusat, dengan mensubstitusikan sistem (4) ke turunan parsial $\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{S}, E)$ terhadap \bar{S} , kemudian mensubstitusikan aproksimasi

$$\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{S}, E) = \alpha_1 \bar{S}^2 + \alpha_2 \bar{S}E + \alpha_3 E^2 + \dots \text{ dan menyamakan}$$

koefisien koefisien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ di pangkat tertinggi variabelnya, diperoleh hasil aproksimasi manifold pusat $\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{S}, E) = 0 + h.o.t$, dengan *h.o.t* adalah *high order terms*. Kemudian mensubstitusikan $\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{S}, E) = 0$

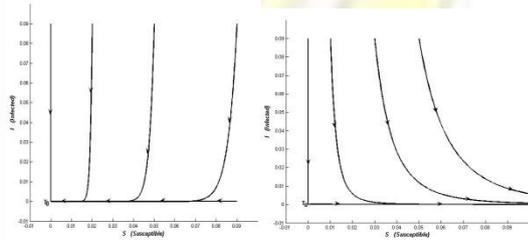
ke $\dot{\bar{S}} = (3 - 0.2E)\bar{S} - \frac{\bar{S}^2}{15} - 0.15\bar{I}$, dan mengubah variabel \bar{S}

menjadi u . Sehingga diperoleh bidang vektor di manifold pusat sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (3-0.2E)u - \frac{1}{15}u^2 \\ \dot{E} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem (5) menunjukkan bahwa jenis bifurkasi saat $E=15$ adalah bifurkasi transkritikal.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_0 yang menggambarkan perubahan kestabilan titik kritis T_0 akibat berubahnya nilai parameter usaha pemanenan yaitu saat $E > 15$ dan $0 < E < 15$.



Grafik 1a. Orbit Kestabilan Saat $E = 17$ Proyeksi di Bidang S-I

Grafik 1b. Orbit Kestabilan Saat $E = 9$ Proyeksi di Bidang S-I

Interpretasi biologi dari analisis di atas adalah sebagai berikut, jika frekuensi usaha pemanenan yang dilakukan oleh manusia tidak dapat dikendalikan yaitu lebih dari 15 kali per hari, maka populasi ikan tilapia akan punah. Akibatnya tidak akan terjadi penyebaran penyakit karena tidak adanya populasi ikan tilapia. Dalam hal ini, usaha pemanenan tidak memiliki peran dalam mengontrol penyebaran penyakit. Dampak dari punahnya populasi ikan tilapia adalah punahnya populasi burung pelikan, akibat tidak adanya makanan utamanya yaitu ikan tilapia terinfeksi.

2. Analisis bifurkasi titik kritis T_1

Secara numerik diperoleh kestabilan titik kritis T_1 sebagai berikut, titik kritis T_1 stabil jika batas nilai parameter usaha pemanenan $1.88 < E < 15$ dan titik kritis T_1 tak stabil jika $E > 15$ dan $E < 1.88$. Jadi, saat $E=1.88$ terjadi bifurkasi. Untuk mengetahui jenis bifurkasi di $E=1.88$, menggunakan metode manifold pusat sebagai berikut:

Dari sistem (2), dipilih invarian manifold di $P=0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{S} &= 3S \left(1 - \frac{S+I}{45}\right) - 0.03IS - 0.2EI \\ \dot{I} &= 0.03IS - 0.24I - 0.5EI \end{aligned} \quad (6)$$

Karena sistem \dot{I} memiliki nilai eigen bernilai nol, sedangkan sistem \dot{S} dan \dot{P} memiliki nilai eigen negatif saat $E=1.88$. Sehingga terdapat manifold pusat di sistem (6).

Salah satu titik kritis pada sistem (6) adalah $\bar{T}_1 = (S^*, I^*) = (45-3E, 0)$. Karena invarian

manifold (6) bersinggungan dengan manifold pusat di $(0,0)$, maka titik kritis \bar{T}_1 ditranslasi ke $(0,0)$ diperoleh sistem hasil translasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}} &= (-3+0.2E)\bar{S} - (4.35-0.29E)\bar{I} - \frac{1}{15}\bar{S}^2 - 0.1\bar{S}\bar{I} \\ \dot{\bar{I}} &= (1.11-0.59E)\bar{I} + 0.03\bar{S}\bar{I} \end{aligned} \quad (7)$$

Karena sistem (7) bergantung pada parameter E, maka dengan memasukkan parameter E sebagai variabel tak bebas baru, sistem (7) menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}} &= (3-0.2E)\bar{S} - \frac{\bar{S}^2}{15} - 0.1\bar{S}\bar{I} \\ \dot{E} &= 0 \\ \dot{\bar{I}} &= (-0.24-0.5E)\bar{I} + 0.03\bar{S}\bar{I} \end{aligned} \quad (8)$$

Setelah dilinierisasi, sistem (7) memiliki nilai eigen bernilai nol dan negatif jika $E=1.88$, maka terdapat manifold pusat pada sistem (7) di $(0,0)$, yang didefinisikan sebagai

$$W^c(0) = \{(\bar{S}, E, \bar{I}) \in \mathbf{R}^3 \mid \bar{S} = \mathcal{H}(\bar{I}, E), \mathcal{H}(0,0) = 0, D\mathcal{H}(0,0)\}$$

untuk \bar{I} dan E sangat kecil.

Untuk menentukan bidang vektor di manifold pusat, dengan mensubstitusi sistem (8) ke turunan parsial $\bar{S} = \mathcal{H}(\bar{I}, E)$ terhadap t, kemudian mensubstitusi aproksimasi

$$\bar{S} = \mathcal{H}(\bar{I}, E) = \beta_1 \bar{I}^2 + \beta_2 \bar{I}E + \beta_3 E^2 + \dots \text{ dan menyamakan}$$

koefisien koefisien $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ di pangkat tertinggi variabelnya, diperoleh hasil aproksimasi manifold pusat $\bar{S} = \mathcal{H}(\bar{I}, E) = 0.07E\bar{I}$. Kemudian mensubstitusi

$$\bar{S} = \mathcal{H}(\bar{I}, E) = 0.07E\bar{I} + h.o.t \text{ ke}$$

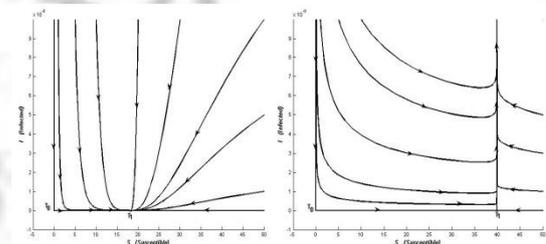
$$\dot{\bar{I}} = (1.11-0.59E)\bar{I} + 0.03\bar{S}\bar{I}, \text{ dan mengubah}$$

variabel \bar{I} menjadi u. Sehingga diperoleh bidang vektor di manifold pusat sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (1.11-0.59E)u + 0.002Eu^2 \\ \dot{E} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Sistem (9) menunjukkan bahwa jenis bifurkasi saat $E=1.88$ adalah bifurkasi transkritikal.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_1 yang menggambarkan perubahan kestabilan titik kritis T_1 akibat berubahnya nilai parameter usaha pemanenan yaitu saat $1.88 < E < 15$ dan $E < 1.88$.



Grafik 2a. Orbit Kestabilan Saat $E = 9$ Proyeksi di Bidang S-I

Grafik 2b. Orbit Kestabilan Saat $E = 1.7$ Proyeksi di Bidang S-I

Interpretasi secara biologi dari analisis di atas adalah sebagai berikut, jika frekuensi usaha pemanenan ikan tilapia yang dilakukan oleh nelayan sekitar 15 sampai 2 kali per hari, di mana penangkapan ikan tilapia terinfeksi lebih besar daripada ikan tilapia rentan. Dan laju kematian ikan tilapia terinfeksi lebih besar dari laju pertumbuhan maksimum ikan tilapia terinfeksi yang secara matematis dinyatakan sebagai $\mu > K\lambda - \frac{Kq_1 E \lambda}{r} - q_2 E$.

Maka populasi ikan tilapia terinfeksi akan punah dan hanya populasi ikan tilapia rentan yang masih dapat bertahan hidup karena diasumsikan laju pertumbuhannya tinggi akibat salinitas air laut yang tinggi yang menyebabkan reproduksinya juga tinggi. Dampak dari punahnya populasi ikan tilapia terinfeksi adalah punahnya populasi burung pelikan,

3. Analisis bifurkasi titik kritis T_2

Secara numerik diperoleh kestabilan titik kritis T_2 sebagai berikut, titik kritis T_2 stabil jika batas nilai parameter usaha pemanenan $1.51 < E \leq 1.88$ dan titik kritis T_2 tak stabil jika $E > 1.88$ dan $E < 1.51$. Jadi, saat $E = 1.51$ terjadi bifurkasi. Untuk mengetahui jenis bifurkasi di $E = 1.51$, menggunakan metode manifold pusat sebagai berikut:

Dari sistem (2), dipilih invarian manifold di $S = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{0.9IP}{15+I} - 0.24I - 0.5EI & (10) \\ \dot{P} &= \frac{0.36IP}{15+I} - 0.09P \end{aligned}$$

Karena sistem \dot{P} memiliki nilai eigen bernilai nol, sedangkan sistem \dot{I} dan \dot{I} memiliki nilai eigen negatif saat $E = 1.51$. Sehingga terdapat manifold pusat di sistem (10).

Salah satu titik kritis pada sistem (10) adalah $\bar{T}_2 = (I^*, P^*) = (25.52 - 13.56E, 0)$. Karena invarian manifold (10) bersinggungan dengan manifold pusat di $(0,0)$, maka titik kritis \bar{T}_2 ditranslasi ke $(0,0)$ diperoleh sistem hasil translasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\bar{I}} &= (-0.24 - 0.5E)\bar{I} - \frac{0.9\bar{I}P + 22.97\bar{P} - 12.2E\bar{P}}{\bar{I} + 40.52 - 13.56E} - 6.78E^2 - 9.51E - 6.1 & (11) \\ \dot{\bar{P}} &= \frac{0.36\bar{I}P + 9.2\bar{P} - 4.88E\bar{P}}{\bar{I} + 40.52 - 13.56E} - 0.09\bar{P} \end{aligned}$$

Karena sistem (11) bergantung pada parameter E, maka dengan memasukkan parameter E sebagai variabel tak bebas baru, sistem (11) menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\bar{I}} &= (-0.24 - 0.5E)\bar{I} - \frac{0.9\bar{I}P + 22.97\bar{P} - 12.2E\bar{P}}{\bar{I} + 40.52 - 13.56E} - 6.78E^2 - 9.51E - 6.1 \\ \dot{E} &= 0 \\ \dot{\bar{P}} &= \frac{0.36\bar{I}P + 9.2\bar{P} - 4.88E\bar{P}}{\bar{I} + 40.52 - 13.56E} - 0.09\bar{P} \end{aligned} \quad (12)$$

Setelah dilinierisasi, sistem (11) memiliki nilai eigen bernilai nol dan negatif jika $E = 1.51$, maka terdapat manifold pusat pada sistem (11) di $(0,0)$, yang didefinisikan sebagai

$$W^c(0) = \{(\bar{I}, E, \bar{P}) \in \mathbf{R}^3 \mid \bar{I} = \mathcal{H}(\bar{P}, E), \mathcal{H}(0,0) = 0, D\mathcal{H}(0,0)\}$$

untuk \bar{P} dan E sangat kecil.

Untuk menentukan bidang vektor di manifold pusat, dengan mensubstitusi sistem (11) ke turunan parsial $\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{P}, E)$ terhadap t, kemudian mensubstitusi aproksimasi

$$\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{P}, E) = \gamma_1 \bar{P}^2 + \gamma_2 \bar{P}E + \gamma_3 E^2 + \dots \text{ dan menyamakan}$$

koefisien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ di pangkat tertinggi variabelnya, diperoleh hasil aproksimasi manifold pusat $\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{P}, E) = 2E\bar{P} + h.o.t$. Kemudian mensubstitusi

$$\bar{I} = \mathcal{H}(\bar{P}, E) = 2E\bar{P}$$

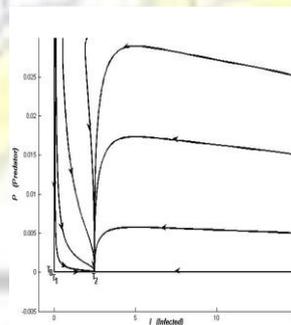
ke $\dot{\bar{P}} = \frac{0.36\bar{I}P + 9.2\bar{P} - 4.88E\bar{P}}{\bar{I} + 40.52 - 13.56E} - 0.09\bar{P}$, dan mengubah

variabel \bar{P} menjadi u. Sehingga diperoleh bidang vektor di manifold pusat sebagai berikut

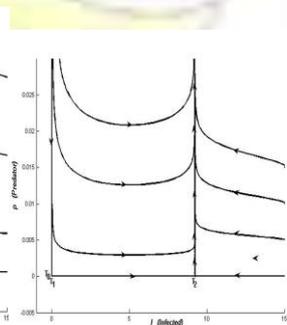
$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{5.55 - 3.66E}{40.52 - 13.56E}u + \frac{0.72E}{40.52 - 13.56E}u^2 \\ \dot{E} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Sistem (13) menunjukkan bahwa jenis bifurkasi saat $E = 1.51$ adalah bifurkasi transkritikal.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis T_2 yang menggambarkan perubahan kestabilan titik kritis T_2 akibat berubahnya nilai parameter usaha pemanenan yaitu saat $1.51 < E < 1.88$ dan $E < 1.51$.



Grafik 3a. Orbit Kestabilan Saat $E = 1.7$ Proyeksi di Bidang I-P



Grafik 3b. Orbit Kestabilan Saat $E = 1.2$ Proyeksi di Bidang I-P

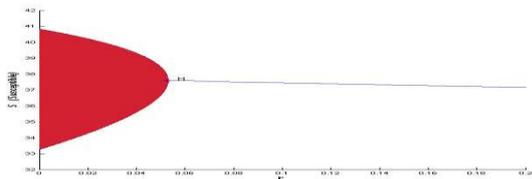
Interpretasi biologi dari analisis di atas adalah sebagai berikut, penyebaran penyakit dari ikan tilapia terinfeksi ke ikan tilapia rentan diasumsikan tinggi, akibatnya populasi ikan tilapia terinfeksi bertambah karena munculnya individu baru dari individu ikan tilapia rentan yang tertular penyakit akibat bakteri *Avian botulism*. Untuk mengatasi hal tersebut, maka frekuensi usaha

pemanenan yang seharusnya dilakukan oleh nelayan adalah sebanyak 2 kali per hari, agar populasi ikan terinfeksi dapat dikurangi, sehingga penyebaran penyakit dapat dikontrol, di mana penangkapan ikan tilapia terinfeksi lebih besar dari ikan tilapia rentan. Namun hal ini dapat mengakibatkan punahnya populasi pelikan karena keterbatasan makanan utamanya yaitu ikan tilapia terinfeksi. Akibat keterbatasan makanan tersebut, apabila burung pelikan memakan ikan tilapia terinfeksi yang masih hidup, akan mengakibatkan burung pelikan mengalami keracunan dan mati.

4. Analisis bifurkasi titik kritis T_3

Khusus titik kritis T_3 , untuk menganalisis kestabilan dan mengetahui jenis bifurkasinya dilakukan secara numerik menggunakan *software Maple* dan *MatCont*, karena secara analitik membutuhkan proses yang sangat rumit. Dari hasil analisis numerik tersebut, diperoleh batas nilai parameter usaha pemanenan yang memenuhi agar titik kritis T_3 stabil yaitu $0.05 < E \leq 1.51$ dan batas nilai parameter usaha pemanenan yang memenuhi agar titik kritis T_3 tak stabil yaitu $E < 0.05$.

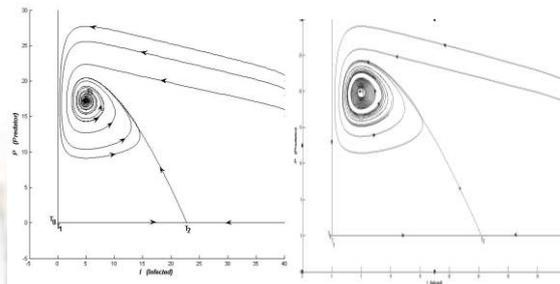
Untuk menentukan keberadaan titik bifurkasi dan jenis bifurkasinya di titik kritis T_3 , dianalisis secara numerik menggunakan *software Matcont*, diperoleh diagram bifurkasi sebagai berikut.



Grafik 4. Diagram bifurkasi Hopf proyeksi di bidang E-S

Dari Grafik 4, area berwarna merah menunjukkan adanya *limit cycle* dan terdapat titik H saat $E = 0.05$ yang menunjukkan bahwa saat nilai parameter usaha pemanenan $E = 0.05$ terjadi bifurkasi dan jenis bifurkasinya adalah bifurkasi Hopf.

Berikut diberikan orbit kestabilan titik kritis $T_3 = (37.75 - 3E, 5, 19.83 - 13.11E)$ yang menggambarkan perubahan kestabilan akibat berubahnya nilai parameter usaha pemanenan yaitu saat $0.05 < E \leq 1.51$ dan $E < 0.05$.



Grafik 5a. Orbit Kestabilan Saat $E = 0.2$ Proyeksi di Bidang I-P

Grafik 5b. Orbit Kestabilan Saat $E = 0.002$ Proyeksi di Bidang I-P

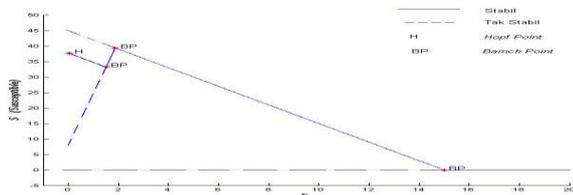
Interpretasi biologi dari analisis di atas adalah sebagai berikut, penyebaran penyakit dari ikan tilapia terinfeksi ke ikan tilapia rentan diasumsikan tinggi, akibatnya populasi ikan tilapia terinfeksi bertambah karena munculnya individu baru dari individu ikan tilapia rentan yang tertular penyakit akibat bakteri *Avian botulism*. Jika frekuensi usaha pemanenan yang dilakukan oleh nelayan sangat rendah yaitu kurang dari atau sama dengan 1 kali per hari, dengan penangkapan ikan tilapia terinfeksi lebih besar dari ikan tilapia rentan, maka populasi ikan tilapia terinfeksi tidak dapat dikurangi secara maksimal. Sehingga penyebaran penyakit, juga tidak dapat dikontrol dengan maksimal.

Hal ini berdampak negatif terhadap pertumbuhan populasi ikan tilapia rentan, namun berdampak positif bagi pertumbuhan populasi ikan tilapia terinfeksi dan suatu saat banyaknya populasi ikan tilapia akan konstan. Hal ini juga perlu diingat, bahwa ikan tilapia rentan masih dapat bertahan hidup karena laju pertumbuhan ikan tilapia yang diasumsikan tinggi.

Efek dari usaha pemanenan dan penyebaran penyakit tersebut, berakibat laju pemangsaan yang dilakukan oleh burung pelikan terhadap populasi ikan tilapia terinfeksi yang mati juga sangat tinggi. Selain itu juga, karena laju pemangsaan pemangsa bergantung pada respon fungsional Holling tipe II, akibatnya laju pemangsaan oleh burung pelikan meningkat terhadap kepadatan populasi ikan tilapia terinfeksi yang meningkat, namun pada akhirnya laju pemangsaan menurun secara asimtotik di mana laju konsumsi tetap konstan terlepas dari peningkatan kepadatan populasi ikan tilapia terinfeksi. Sehingga populasi ikan tilapia terinfeksi berkontribusi dalam pertumbuhan populasi burung pelikan.

Diagram Bifurkasi

Berikut diberikan diagram bifurkasi yang menggambarkan keseluruhan analisis bifurkasi di atas, yang diperoleh dari simulasi menggunakan *software MatCont*.



Grafik 6. Diagram bifurkasi Proyeksi di Bidang E-S

Grafik 6 di atas, secara numerik mendeskripsikan keseluruhan perubahan kestabilan titik kritis akibat perubahan nilai parameter usaha pemanenan E . Dan terlihat saat melewati nilai parameter usaha $E = 15$, $E = 1.88$ dan $E = 1.51$, jenis bifurkasinya adalah bifurkasi transkritikal karena saat melewati nilai parameter usaha tersebut, terdapat dua titik kritis, yang keduanya mengalami perubahan kestabilan. Dan terdapat bifurkasi Hopf, saat karena saat melewati nilai parameter usaha $E = 0.05$.

SIMPULAN

Model ekoepidemiologi dengan pemanenan disajikan dalam bentuk tiga persamaan diferensial biasa tak linier seperti pada sistem (1), yang menggambarkan interaksi antara populasi ikan tilapia rentan, ikan tilapia terinfeksi dan burung pelikan di Laut Salton, California, yang dipengaruhi adanya pemanenan pada ikan tilapia rentan dan ikan tilapia terinfeksi.

Secara umum, peran pemanenan dalam mengontrol penyebaran penyakit akan berbeda-beda, sesuai dengan batas-batas usaha pemanenan yang ada. Apabila frekuensi usaha pemanenan semakin lama semakin tinggi, maka penyebaran penyakit dapat dikontrol secara maksimal, karena semakin lama populasi ikan tilapia terinfeksi dapat dikurangi. Meskipun suatu saat berdampak punahnya populasi ikan tilapia dan burung pelikan, akibat frekuensi usaha pemanenan ikan yang berlebihan yaitu lebih dari 15 kali per hari. Apabila frekuensi usaha pemanenan semakin lama semakin berkurang, yaitu hanya satu kali per hari, maka kontrol penyebaran penyakit tidak maksimal, karena populasi ikan tilapia terinfeksi semakin bertambah. Meskipun suatu saat kepadatan populasi ikan tilapia terinfeksi akan konstan, akibatnya terjadi interaksi secara terus menerus antara populasi ikan tilapia dan populasi burung pelikan, yang ditunjukkan adanya limit *cycle* pada sistem. Hal ini berdampak buruk bagi kelangsungan hidup populasi ikan tilapia dan burung pelikan di Laut Salton, California, karena ledakan epidemi ikan tilapia tidak dapat dikontrol dan berakibat punahnya burung pelikan.

SARAN

Analisis kestabilan secara analitik dengan manifold pusat dan secara numerik dengan *software Matcont* hanya dilakukan pada titik kritis T_0, T_1 dan T_2 , sedangkan titik kritis T_3 hanya dilakukan secara numerik menggunakan *software Maple* dan *Matcont*. Diharapkan ada pengkajian lebih lanjut dalam menganalisis titik kritis T_3 secara analitik. Selain itu, bagi pembaca dapat mengembangkan model ekoepidemiologi dengan pemanenan ini, dengan menerapkan suatu kebijakan pemanenan optimal berdasarkan prinsip *maximum sustainable yield*, sehingga dapat memajemen populasi ikan yang dipanen agar tidak mengalami kepunahan dan memberikan keuntungan maksimum bagi nelayan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bairagi, N, Chaudhuri, S, Chattopadhyay, J. (2009) Harvesting as a Disease Control Measure in an Eco-epidemiological System – A theoretical study. *Mathematical Biosciences*. 217:134-144.
- [2] Bairagi, N, Roy, P.K, Chattopadhyay, J. (2007) Role of Infection on The Stability of a Predator-Prey System with Several Respon Functions – A comperative study. *Journal of Theoretical Biology*. 248:10-25.
- [3] J. Chattopadhyay, N. Bairagi. (2001) Pelicans at Risk in Salton Sea – An Eco-epidemiological Study. *Ecological Modelling*. 136:103-112.
- [4] Kuznetsov, Yu A. (2009) Tutorial II: One-parameter bifurcation analysis of equilibria with MatCont. [Online]. Diakses di <http://www.staff.science.uu.nl/~kouzn101/NBA/LAB2.pdf>. [Diakses: 22 Oktober 2012].
- [5] Shone, R. (2002) *Economic Dynamics Phase Diagrams and their Economic Application*. Second Edition. United States of America: Cambridge University Press.
- [6] Tu, P.N.V. (1994) *Dynamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Second Revision ann enlarged edition. New York: Springer-Verlag.
- [7] Verhulst, F. (1990) *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag
- [8] Wiggins, S. (1990) *Introduction to Applied Nonlinier Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag