PEMODELAN NILAI TUKAR RUPIAH TERHADAP $US MENGGUNAKAN DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV DUA WAKTU SEBELUMNYA

B. SETIAWATY, S. F. NIKMAH, DAN N. K. KUTHA ARDANA

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

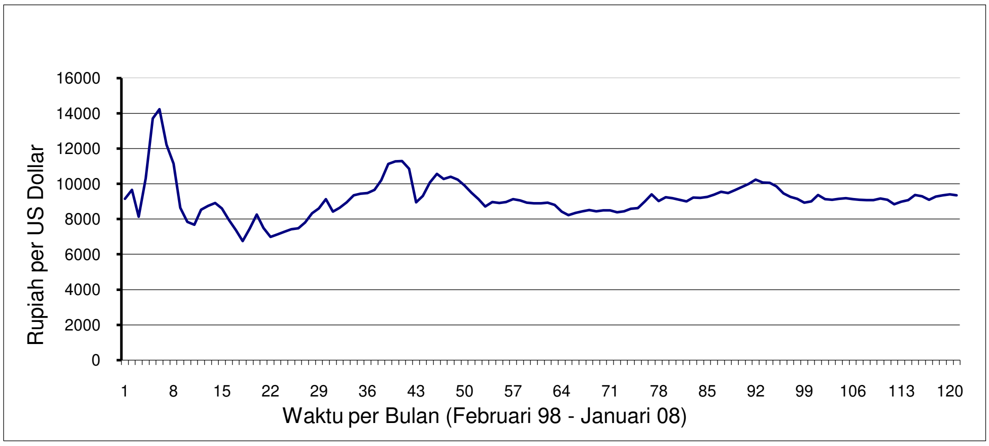
Abstrak. Perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dari tahun 1998 sampai dengan 2008 dicoba dimodelkan dengan menggunakan deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya. Pendugaan parameter model dilakukan menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization*. Hasil yang diperoleh cukup baik karena sudah menggambarkan secara umum perilaku nilai tukar Rupiah. Galat antara nilai harapan dengan nilai sebenarnya relatif cukup kecil.

Kata kunci: Rantai Markov, *Hidden* Markov, Deret waktu *Hidden* Markov, Metode *Expectation Maximization*.

1. PENDAHULUAN

Sejarah Indonesia menunjukkan bahwa nilai tukar Rupiah terhadap $US tidak saja dipengaruhi oleh faktor-faktor ekonomi, tetapi juga oleh hal-hal lain seperti, situasi politik dalam negeri, pergantian pemerintah, perubahan kebijakan pemerintah dan situasi keamanan. Perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US dari waktu ke waktu sangat tidak beraturan dengan fluktuasi yang beragam. Gambar 1.1. menunjukkan fluktuasi nilai tukar Rupiah dari Februari 1998 sampai dengan Januari 2008.

Untuk memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah tersebut, Setiawaty dan Sari (2005) menggunakan model *Hidden* Markov Elliot et. al. (1995) untuk menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US. Diasumsikan bahwa nilai tukar rupiah dibangkitkan oleh proses pengamatan yang hanya dipengaruhi oleh proses penyebab yang merupakan rantai Markov yang tidak diamati. Hasil yang diperoleh tidak cukup baik, hal ini ditunjukkan oleh galat nilai sesungguhnya dan nilai harapan yang cukup besar dan berfluktuasi.



Gambar 1.1. Rata-rata nilai Tukar Rupiah terhadap $US Tahun 1998 s/d 2008
Sumber Data: www.bankofcanada.ca (24 Januari 2008)

Setiawaty dan Hirasawa (2006) memperbaiki model Setiawaty dan Sari (2005) dengan menggunakan deret waktu *hidden* Markov. Pada model ini diasumsikan bahwa nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh proses pengamatan yang tidak hanya dipengaruhi oleh proses penyebab yang merupakan rantai Markov yang tidak diamati, tetapi juga dipengaruhi oleh nilai tukar sebelumnya, sehingga membentuk suatu deret waktu (*time series*). Hasil yang diperoleh cukup baik dan sudah menggambarkan perilaku nilai tukar Rupiah, tetapi galat yang diperoleh masih cukup besar.

Setiawaty dan Santoso (2008) mencoba memodelkan perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US menggunakan model deret waktu *hidden* Markov satu waktu sebelumnya. Pada model ini diasumsikan bahwa nilai tukar Rupiah saat ini dipengaruhi oleh proses penyebab saat ini dan satu waktu sebelumnya, serta nilai tukar sebelumnya. Hasil yang diperoleh lebih baik dibandingkan model Setiawaty dan Hirasawa (2006), tetapi kompleksitas perhitungan numeriknya meningkat.

Pada tulisan ini diperkenalkan model deret waktu *hidden* Markov dua waktu sebelumnya. Pada model ini diasumsikan bahwa nilai tukar Rupiah saat ini dipengaruhi oleh proses penyebab saat ini sampai dua waktu sebelumnya, serta nilai tukar sebelumnya.

Tulisan ini dimulai dengan pemodelan nilai tukar Rupiah menggunakan deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya. Pada bagian 3 dibahas pendugaan parameter model dan terakhir pada bagian 4 dibahas interpretasi dari model. Sebagai penutup diberikan kesimpulan.

2. MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV SATU WAKTU SEBELUMNYA

Pada bagian ini kita memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dalam kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Januari 2008 menggunakan deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya.

Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US diasumsikan sebagai *state* dari suatu rantai Markov $\{X_t\}$ yang tidak diamati. Misalkan banyaknya faktor tersebut adalah *N*. Pada setiap *state*, data nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh peubah acak Y_t yang menyebar dengan sebaran tertentu pada ruang peluang (Ω, F, P). Dalam hal ini proses $\{X_t\}$ tersembunyi (hidden) di balik proses yang diamati, yaitu $\{Y_t\}$. Sehingga pasangan proses stokastik $\{(X_t, Y_t)\}$ merupakan model *hidden* Markov.

Pada tulisan ini digunakan model *hidden* Markov yang merupakan deret waktu yang mempertimbangkan satu waktu sebelumnya dan berbentuk:

$$Y_t - \mu_{X_t^*} = \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}^*}\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}^*}\right) + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

di mana:

- $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan menyebar normal $N(0, \sigma^2)$.
- $\{Y_t\}$ adalah proses yang diamati dan bernilai skalar
- $\{X_t^*\}$ adalah rantai Markov dengan ruang *state* $S^* = \{1,2\}$ dan $P^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$ merupakan matriks peluang transisinya, dengan $p_{ji}^* = P(X_t^* = j \mid X_{t-1}^* = i)$
- $\mu(X_t^*) = \langle \mu, X_t^* \rangle = \mu_{X_t^*}$, dengan $\langle .,. \rangle$ menyatakan hasil kali dalam di R^N.
- μ_1, μ_2, ϕ_1 dan ϕ_2 adalah konstanta real.

Perhatikan bahwa model ini dicirikan oleh parameter $\theta = (\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2)$. Dengan menggunakan metode EM akan diduga parameter $\theta = (\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2)$ dari data *Y*. Dalam kasus ini Y_t tidak hanya bergantung pada X_t^* tetapi juga bergantung pada X_{t-1}^* dan X_{t-2}^* sehingga agar tetap memenuhi sifat Markov perlu didefinisikan proses baru X_t di mana

$$
\begin{aligned}
&X_t = 1, \text{ jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\
&X_t = 2, \text{ jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\
&X_t = 3, \text{ jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\
&X_t = 4, \text{ jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\
&X_t = 5, \text{ jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\
&X_t = 6, \text{ jika } X_t^* = 1,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\
&X_t = 7, \text{ jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\
&X_t = 8, \text{ jika } X_t^* = 2,\ X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Lemma 2.1:
$\{X_t\}$ merupakan rantai Markov dengan ruang state $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan matriks peluang transisi P sebagai berikut.

$$
P = \begin{bmatrix}
p_{11}^* & 0 & 0 & 0 & p_{11}^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p_{12}^* & 0 & 0 & 0 & p_{12}^* & 0 \\
p_{21}^* & 0 & 0 & 0 & p_{21}^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p_{22}^* & 0 & 0 & 0 & p_{22}^* & 0 \\
0 & p_{11}^* & 0 & 0 & 0 & p_{11}^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{12}^* & 0 & 0 & 0 & p_{12}^* \\
0 & p_{21}^* & 0 & 0 & 0 & p_{21}^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_{22}^* & 0 & 0 & 0 & p_{22}^*
\end{bmatrix} \tag{2.3}
$$

Bukti: Lihat Setiawaty (2007)

Perhatikan bahwa pasangan proses $\{(X_k, Y_k) : k \in \aleph\}$ merupakan model *hidden* Markov dengan parameter $\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2\right)$.

3. PENDUGAAN PARAMETER

Penduga $\hat{\theta}$ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log *likelihood*

$$
\mathrm{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t \middle| \mathrm{Y}_{t-1}; \theta\right)
$$

di mana Y_t adalah medan-σ yang lengkap dan dibangun oleh $Y_1, Y_2, Y_3 \cdots, Y_t$ dan

$$f\left(y_t \mid Y_{t-1};\theta\right) = \mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)$$

$$= P(X_t = 1 \mid Y_{t-1};\theta).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 2 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 3 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 4 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 5 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 6 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 7 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+P\left(X_t = 8 \mid Y_{t-1};\theta\right).\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Menurut Setiawaty dan Nikmah (2009), algoritma untuk memperoleh penduga parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut.

Langkah 1:

Input banyaknya data nilai tukar Rupiah terhadap \$US T yang akan diamati serta data nilai tukar Rupiah $\left(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_T\right)$ dan matriks transisi P.

Beri nilai awal bagi $\hat{\theta}$ yang dilambangkan dengan $\hat{\theta}^{(0)} = \left(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right)$.

Set $k = 1$

Langkah 2:

Tentukan fungsi kerapatan bersyarat bagi y_t, yaitu η_t untuk setiap $t = 1, 2, \cdots, k$.

$$h_t=\begin{bmatrix} f\left(y_t \mid X_t=1,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=2,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=3,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=4,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=5,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=6,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=7,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right)\\ f\left(y_t \mid X_t=8,\mathrm{Y}_{t-1};\theta\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_1\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_1\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_1\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\left(\left(y_t-\mu_2\right)-\phi_1\left(Y_{t-1}-\mu_2\right)-\phi_2\left(Y_{t-2}-\mu_2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{bmatrix}$$

Langkah 3:

Penarikan kesimpulan optimal dan peramalan untuk setiap waktu t pada contoh dapat diperoleh melalui iterasi:

3.1. Tentukan nilai awal $\hat{\xi}_{1|0}=\pi$ yang memenuhi $\pi=P\pi$ dan $\sum_{i=1}^{8}\pi_i=1$.

3.2. Beri nilai awal $i=1$

3.3. Untuk $t=i$, cari nilai dari

$$f\left(y_t\middle|\mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}^{(m)}\right)=\mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1}\right)\otimes\eta_t$$

$$\hat{\xi}_{t|t}=\frac{\left(\hat{\xi}_{t|t-1}\otimes\eta_t\right)}{\mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1}\otimes\eta_t\right)}$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t}=P\cdot\hat{\xi}_{t|t}$$

di mana $\hat{\xi}_{t|t-1}$ melambangkan vektor (8×1) di mana elemen ke-j pada vektor merepresentasikan $P\left\{X_t=j \mid \mathrm{Y}_{t-1};\theta\right\}$ dan $\otimes$ me-lambangkan perkalian elemen per elemen

$i=i+1$

3.4. Ulangi mulai dari langkah (3.3)

Stop jika $t = k$.

Langkah 4:

Tentukan nilai dari $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2$ yang ditentukan oleh persamaan:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ap^2 + Br^2 + Cs^2 + D\hat{\phi}_2^2 + Eq^2 + F + G\hat{\phi}_1\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[Apz + B\left(rz + r\hat{\phi}_1\hat{\mu}_2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. -C\left(sz - s\hat{\mu}_2\right) - D\left(\hat{\phi}_2 z - \hat{\phi}_2 q\hat{\mu}_2\right) + E\left(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_2\right) + F\left(z + s\hat{\mu}_2\right) - G\left(\hat{\phi}_1 z + \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_2\right)\right]\right\}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[B\hat{\phi}_1^2 + C + Dq^2 + E\hat{\phi}_2^2 + Fs^2 + Gr^2 + H\,p^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[-B\left(\hat{\phi}_1 z - \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_1\right) + C\left(z + s\hat{\mu}_1\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. +D\left(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_1\right) - E\left(\hat{\phi}_2 z - \hat{\phi}_2 q\hat{\mu}_1\right) - F\left(sz - s\hat{\mu}_1\right) + G\left(rz + \hat{\phi}_1 r\hat{\mu}_1\right) + H\left(pz\right)\right]\right\}$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ac^2 + Bd^2 + Cc^2 + Dd^2 + Ec^2 + Fd^2 + Gc^2 + H\,d^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(ac - \phi_2 ce\right) + B\left(ad - \phi_2 de\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. +C\left(bc - \phi_2 ce\right) + D\left(bd - \phi_2 de\right) + E\left(ac - \phi_2 cf\right) + F\left(ad - \phi_2 df\right) + G\left(bc - \phi_2 cf\right) + H\left(bd - \phi_2 df\right)\right]\right\}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[Ae^2 + Be^2 + Ce^2 + De^2 + Ef^2 + Ff^2 + Gf^2 + H\,f^2\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(ae - \phi_1 ce\right) + B\left(ae - \phi_1 de\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. +C\left(be - \phi_1 ce\right) + D\left(be - \phi_1 de\right) + E\left(af - \phi_1 cf\right) + F\left(af - \phi_1 df\right) + G\left(bf - \phi_1 cf\right) + H\left(bf - \phi_1 df\right)\right]\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^{T}\left[A + B + C + D + E + F + G + H\right]}\left\{\sum_{t=2}^{T}\left[A\left(a - \phi_1 c - \phi_2 e\right)^2 + B\left(a - \phi_1 d - \phi_2 e\right)^2 + C\left(b - \phi_1 c - \phi_2 e\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. +D\left(b - \phi_1 d - \phi_2 e\right)^2 + E\left(a - \phi_1 c - \phi_2 f\right)^2 + F\left(a - \phi_1 d - \phi_2 f\right)^2 + G\left(b - \phi_1 c - \phi_2 f\right)^2 + H\left(b - \phi_1 d - \phi_2 f\right)^2\right]\right\}$$

dengan:

$$a = \left(y_t - \hat{\mu}_1\right), \quad b = \left(y_t - \hat{\mu}_2\right), \quad c = \left(y_{t-1} - \hat{\mu}_1\right)$$
$$d = \left(y_{t-1} - \hat{\mu}_2\right), \quad e = \left(y_{t-2} - \hat{\mu}_1\right), \quad f = \left(y_{t-2} - \hat{\mu}_2\right)$$
$$p = \left(1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2\right), \quad r = \left(1 - \hat{\phi}_2\right), \quad q = \left(1 - \hat{\phi}_1\right)$$
$$s = \left(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2\right), \quad z = \left(y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2}\right)$$
$$A = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 1 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 1, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$
$$B = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 2 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 2, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$
$$C = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 3 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 3, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$
$$D = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 4 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 4, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$E = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 5 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 5, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$F = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 6 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 6, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$G = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 7 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 7, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)$$

$$H = \frac{1}{f\left(y_t \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right)} P\left(X_t = 8 \mid \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right) f\left(y_t \mid X_t = 8, \Upsilon_{t-1};\hat{\theta}\right).$$

Langkah 5:

Beri nama parameter yang dihasilkan pada langkah 4 dengan $\hat{\theta}^{(k+1)} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right)$

Langkah 6:

Tentukan matriks *P* yang baru menggunakan hasil Kim, C.J (1994) dan Hamilton, J. D. (1994), yaitu:

$$\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} = \hat{\xi}_{t|t}^{(j)} \otimes \left\{P'.\left[\hat{\xi}_{t+1|T}^{(j)} (\div) \hat{\xi}_{t+1|t}^{(j)}\right]\right\}$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \frac{\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} \times \hat{\xi}_{t-1|t-1}^{(i)} \times p_{ij}}{\hat{\xi}_{t|t}^{(j)}}}{\sum_{t=2}^{T} \sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} \times \hat{\xi}_{t-1|t-1}^{(i)} \times p_{ij}}{\hat{\xi}_{t|t}^{(j)}}}$$

Langkah 7:

Gunakan parameter yang sudah dihasilkan untuk menentukan dugaan bagi $\hat{Y}_k$

$$\hat{Y}_k = E\left[Y_k \mid \Upsilon_{k-1};\hat{\theta}\right] = \sum_{j=1}^{N} \hat{\xi}_{k|k-1}.E\left[Y_k \mid X_k = j, \Upsilon_{k-1};\hat{\theta}\right].$$

jika $k < T$, $k = k + 1$, ulangi langkah 2.

4. INTERPRETASI MODEL

Parameter model *hidden* Markov dua waktu sebelumnya berbentuk

$$\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2\right).$$

Menggunakan data pengamatan nilai tukar Rupiah y_t pada kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Januari 2008 dilakukan pendugaan parameter model. Proses pendugaan parameter menggunakan metode yang sudah dijelaskan pada bagian 3.

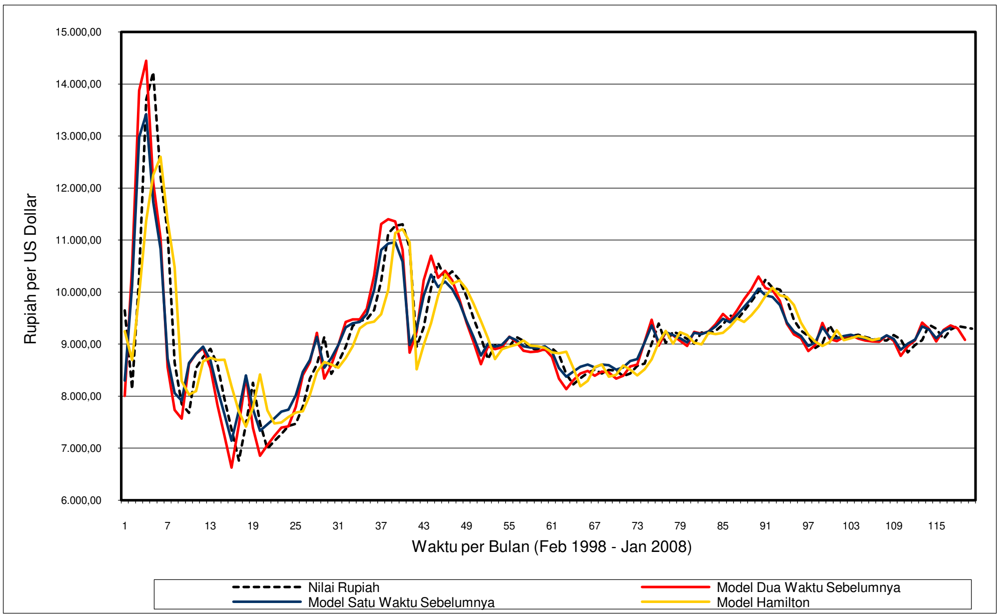
Data nilai tukar Rupiah yang diperoleh dari Bank of Canada adalah rataan nilai tukar Rupiah harian. Untuk diskretisasi waktu dan untuk mengurangi banyaknya data, diambil rataan perbulan dari data harian tersebut. Sehingga y_t menyatakan rataan nilai tukar Rupiah terhadap \$US pada bulan ke t, $t \in \mathbb{N}$, dengan $t = 0$ adalah bulan Februari 1998. Banyak data yang diperoleh adalah 120.

Menggunakan algoritma pada bagian 3 dibuat program menggunakan software *Mathematica 5.2*. Dengan nilai awal

$$\mu = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \end{pmatrix} \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0,4333 \\ 0,5000 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = 1.000.000$$

diperoleh penduga parameter

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 5170,76 \\ 6034,22 \end{pmatrix} \qquad \hat{\phi} = \begin{pmatrix} 0,481727 \\ 0,522214 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}^2 = 1.096.470$$



Gambar 4.2. Grafik nilai tukar Rupiah terhadap \$US menggunakan model Hamilton, model *hidden* Markov satu waktu sebelumnya dan model *hidden* Markov dua waktu sebelumnya

Nilai rataan galat yang diperoleh adalah 55,26 (0,59%). Nilai galat maksimum adalah 220,02 (2,32%) dan nilai galat minimum adalah 0,12 (0,0013%). Nilai dugaan model ini mendekati nilai yang sebenarnya. Hasil pendugaan model dapat dilihat pada Gambar 4.2. Dari Gambar tersebut, terlihat bahwa model deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya menduga nilai Rupiah terhadap US Dollar lebih baik daripada model *hidden* Markov Hamilton (Setiawaty dan Hirasawa, 2006) dan model deret waktu *hidden* Markov satu waktu sebelumnya (Setiawaty dan Santoso, 2008)

5. KESIMPULAN

Model deret Waktu *hidden* Markov dua waktu sebelumnya cukup baik menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap \$US. Hasil yang diperoleh lebih baik dibandingkan model *hidden* Markov Hamilton maupun model deret waktu *hidden* Markov satu waktu sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. **Hamilton, J. D.** 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.
[2]. **Kim, C. J.** 1994. Dynamic linear models with Markov switching. *Journal of Econometrics*, 60: 1 – 22.
[3]. **Setiawaty, B.** dan Sari, D. N. 2005. Pemodelan nilai tukar Rupiah terhadap $US menggunakan Hidden Markov. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 4, No 2.
[4]. **Setiawaty B.,** Adharini, Y. dan Hirasawa. 2006. Pendugaan parameter deret waktu *Hidden* Markov Hamilton. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 5, No 1.
[5]. **Setiawaty, B.** dan Santoso D. 2008. Pendugaan parameter deret waktu satu waktu sebelumnya. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 7, No 2.
[6]. **Setiawaty, B.** 2007. Laporan Hibah Penelitian A2, Departemen Matematika.
[7]. **Setiawaty, B.** dan Nikmah, S. F. 2009. Pendugaan parameter deret waktu satu waktu sebelumnya. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 9, No 1.