RUANG VEKTOR MATRIKS FUZZY

Siti Robiatul Adawiyah[1], Raden Sulaiman[2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email: robby_adaw@yahoo.com[1], sulaimanraden@yahoo.com[2]

ABSTRAK

Terdapat perbedaan antara operasi penjumlahan dan perkalian pada ruang vektor umum dan ruang vektor dari matriks fuzzy. Yang dimaksud dengan matriks fuzzy adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan bilangan fuzzy, yakni bilangan antara 0 sampai 1. Semua matriks fuzzy merupakan matriks, namun sebarang matriks belum tentu matriks fuzzy.

Pada ruang vektor fuzzy, operasi penjumlahan merupakan supremum dari elemen-elemen pada matriks yang bersesuaian. Hal ini berbeda dengan penjumlahan pada ruang vektor umum. Dari perbedaan tersebut, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui konsep ruang vektor matriks fuzzy pada ruang vektor matriks fuzzy dan diperkenalkan beberapa sifat pada ruang vektor matriks fuzzy.

Berdasarkan pada pembuktian dari operasi penjumlahan dan perkalian dari matriks fuzzy, maka diperoleh kesimpulan bahwa dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks fuzzy maka merupakan ruang vektor fuzzy yang hanya memenuhi 9 teorema-teorema pada ruang vektor umum.

Kata kunci: operasi penjumlahan dan perkalian, matriks fuzzy, ruang vektor fuzzy, hasil kali dalam, norm .

PENDAHULUAN

Pada tahun 2010 seorang ahli matematika memperkenalkan tentang ruang vektor fuzzy dari matriks fuzzy. Himpunan fuzzy merupakan himpunan yang anggota-anggotanya dalam selang interval [0,1]. Pada ruang vektor dari matriks fuzzy, penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks fuzzy dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks fuzzy. Penjumlahan matriks fuzzy tidak seperti penjumlahan pada matriks pada umumnya.

Misalkan *A* dan *B* adalah matriks fuzzy m x n, maka $A+B$ didefinisikan sebagai maksimum dari elemen-elemen yang bersesuaian dari matriks *A* dan matriks *B*. Sedangkan pada ruang vektor umum, penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks. Dari penjelasan mengenai perbedaan mengenai operasi penjumlahan dan perkalian pada ruang matriks umum dan matriks fuzzy tersebut, maka pada makalah ini akan dibahas tentang**" Ruang Vektor Matriks Fuzzy".**

KAJIAN TEORI

2.1 Matrik

Definisi 2.1.1 Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom.
(Howard Anton, 1987)

Matriks disajikan sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left(a_{ij}\right), i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n$$

Setiap matriks yang memiliki baris dan kolom sama disebut matriks persegi (*square matrice*).

Definisi 2.1.2 Misalkan $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ merupakan dua matriks berukuran $m \times n$. Jumlah matriks A dan B ditulis $A+B$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan elemennya merupakan jumlah elemen yang seletak dari kedua matriks, dengan

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan.
(Wono Setya Budhi,1995)

Definisi 2.1.3 Jika B adalah sebarang matriks, maka $-B$ akan menyatakan hasil kali $(-1)B$. Jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ didefinisikan dengan $A - B = A + (-B)$
(Wono Setya Budhi,1995)

Definisi 2.1.4 Jika A adalah sebuah matriks dan k adalah suatu skalar, maka hasil kali *(product)* kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing- masing elemen dari A oleh k.
(Howard Anton, 1987)

Definisi 2.1.5 Misalkan matriks $A = (a_{ij})$ yang berukuran $m \times p$ dan matriks $B = (b_{ij})$ yang berukuran $r \times n$. Hasil perkalian matriks $C=AB$ terdefinisi jika $p = r$ dan matriks $C = (c_{ij})$berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1,2, \ldots, n$.
(Howard Anton, 1987)

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 Misalkan V himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi jumlah dan perkalian skalar (bilangan real) dengan anggota V. Artinya, diberikan dua elemen $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di V dan bilangan real s, kemudian jumlah $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dan perkalian skalar $s\boldsymbol{u}$ didefinisikan dan terletak di V juga.

Kemudian V dengan kedua operasi ini disebut ruang vektor jika kedua operasi tersebut memenuhi sifat:
Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ dan $k, l \in R$

1. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor pada V, maka $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in V$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
4. $\exists\, \boldsymbol{0} \in V \ni \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$
5. $\forall\, \boldsymbol{u} \in V, \exists -\boldsymbol{u} \in V \ni \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
6. Jika k adalah sebarang skalar dan $\boldsymbol{u} \in V$, maka $k\boldsymbol{u} \in V$
7. $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
8. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$
9. $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

(Wono Setya Budhi, 1995)

Definisi 2.2.2 Misalkan V suatu ruang vektor real. Suatu hasil kali dalam di V adalah suatu pemetaan dari $V \times V$ ke bilangan real, biasanya dilambangkan sebagai $\langle \quad , \quad \rangle$, yang memenuhi:

i. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.
ii. $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ dan $k \in R$.
iii. $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.
iv. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ untuk setiap $\boldsymbol{u} \in V$ dan $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{u} = 0$.

(Wono Setya Budhi, 1995)

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Definisi 2.2.3 Suatu norm di sebuah ruang vektor real V adalah pemetaan dari V ke himpunan bilangan real, biasanya dilambangkan dengan $\|\cdot\|$ yang memenuhi,

i. $\|v\| \geq 0$ untuk setiap $v \in V$, dan $\|v\| = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$
ii. $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$ untuk setiap skalar k dan $v \in V$
iii. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk setiap $u, v \in V$.

(Howard Anton, 1987)

Definisi 2.2.4 Jika $F: V \rightarrow W$ adalah sebuah pemetaan dari ruang vector V ke ruang vector W, maka F disebut transformasi linier (*linear transformation*) jika:
a. $F(u+v) = F(u) + F(v), \forall \quad u, v \in V$
b. $F(ku) = kF(u), \forall u \in V, \forall k \in R$.
(Howard Anton, 1987)
Jika $W = V$ maka F disebut Operator Linier

2.3 Himpunan

Definisi 2.3.1 Himpunan (himpunan klasik) adalah kumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas. Artinya jika kita menunjuk suatu objek, maka dapat ditentukan apakah objek itu masuk pada kumpulan tersebut atau tidak.
(Masriyah, 2007)

2.4 Himpunan Fuzzy

Definisi 2.5.1 Misalkan X adalah himpunan semesta(himpunan klasik), himpunan fuzzy $A \coloneqq \{(x, f_{(x)}: x \in X)\}$ dengan $0 \leq f_{(x)} \leq 1$.
(Setiadji, 2009)

PEMBAHASAN

3.1 Matriks Fuzzy

Definisi 3.1.1 Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in R$ adalah matriks orde $m \times n$. Jika $a_{ij} \in [0,1], \ \forall \ i \in \{1,2,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,...,n\}$ maka A disebut matriks fuzzy.

(V. Kandasamy, 2007)

Definisi 3.1.2 Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \ x \ n$, untuk sebarang dua anggota $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij}) \in V_{m \times n}$,

$A + B = (sup\{a_{ij}, b_{ij}\}) = \underset{i,j}{\vee}(a_{ij}, b_{ij}) \forall i \in \{1,2, \dots, m\}, j \in \{1,2, \dots, n\}$.
(V. Kandasamy, 2007)
Pada operasi penjumlahan matriks memenuhi beberapa sifat,

a) Komutatif

Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \ x \ n$, untuk sebarang anggota $A, B \in V_{mxn}$ maka

$$A + B = B + A$$

Bukti:

$$A + B = \begin{bmatrix} \sup\{a_{11}, b_{11}\} & \sup\{a_{12}, b_{12}\} & \cdots & \sup\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \sup\{a_{21}, b_{21}\} & \sup\{a_{22}, b_{22}\} & \cdots & \sup\{a_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sup\{a_{m1}, b_{m1}\} & \sup\{a_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \sup\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{b_{11}, a_{11}\} & \sup\{b_{12}, a_{12}\} & \cdots & \sup\{b_{1n}, a_{1n}\} \\ \sup\{b_{21}, a_{21}\} & \sup\{b_{22}, a_{22}\} & \cdots & \sup\{b_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sup\{b_{m1}, a_{m1}\} & \sup\{b_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \sup\{b_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$= B + A$ ■

Jadi pada operasi penjumlahan matriks fuzzy memenuhi sifat komutatif.

b) Asosiatif

Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \times n$, untuk sebarang anggota $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in V_{mxn}$, maka

$(A + B) + C = A + (B + C)$, dimana $\forall \ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in [0,1]$.

Bukti:

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} \sup\{\sup\{a_{11}, b_{11}\}, c_{11}\} & \sup\{\sup\{a_{12}, b_{12}\}, c_{12}\} & \cdots & \sup\{\sup\{a_{1n}, b_{1n}\}, c_{1n}\} \\ \sup\{\sup\{a_{21}, b_{21}\}, c_{21}\} & \sup\{\sup\{a_{22}, b_{22}\}, c_{22}\} & \cdots & \sup\{\sup\{a_{2n}, b_{2n}\}, c_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sup\{\sup\{a_{m1}, b_{m1}\}, c_{m1}\} & \sup\{\sup\{a_{m2}, b_{m2}\}, c_{m2}\} & \cdots & \sup\{\sup\{a_{mn}, b_{mn}\}, c_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sup\{a_{11}, \sup\{b_{11}, c_{11}\}\} & \sup\{a_{12}, \sup\{b_{12}, c_{12}\}\} & \cdots & \sup\{a_{1n}, \sup\{b_{1n}, c_{1n}\}\} \\ \sup\{a_{21}, \sup\{b_{21}, c_{21}\}\} & \sup\{a_{22}, \sup\{b_{22}, c_{22}\}\} & \cdots & \sup\{a_{2n}, \sup\{b_{2n}, c_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sup\{a_{m1}, \sup\{b_{m1}, c_{m1}\}\} & \sup\{a_{m2}, \sup\{b_{m2}, c_{m2}\}\} & \cdots & \sup\{a_{mn}, \sup\{b_{mn}, c_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$= A + (B + C)$ ■

Jadi pada operasi penjumlahan matriks fuzzy memenuhi sifat asosiatif.

Definisi 3.1.3 Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \ x \ n$, untuk sebarang anggota $A = (a_{ij}) \in V_{mxn}$ dan suatu skalar $k \in [0,1], kA = (\inf\{k, a_{ij}\}) = \underset{i,j}{\wedge}(k, a_{ij})$ dimana $\forall a_{ij} \in [0,1]$

(S. Panayappan, 2010)

Pada perkalian skalar dua matriks berlaku sifat distributif

$$k(A + B) = kA + kB$$

Bukti pernyataan di atas adalah sebagai berikut:

Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \ x \ n$, untuk sebarang anggota $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V_{mxn}$ dan suatu skalar · $k \in [0,1], kA = (\inf\{k, a_{ij}\}) = \underset{i,j}{\wedge}(k, a_{ij})$ dimana $\forall a_{ij}, b_{ij} \in [0,1]$

Akan dibuktikan bahwa $k(A + B) = kA + kB$

Bukti:

$$k(A+B) = \begin{bmatrix} \inf\{k, \sup\{a_{11}, b_{11}\}\} & \inf\{k, \sup\{a_{12}, b_{12}\}\} & \cdots & \inf\{k, \sup\{a_{1n}, b_{1n}\}\} \\ \inf\{k, \sup\{a_{21}, b_{21}\}\} & \inf\{k, \sup\{a_{22}, b_{22}\}\} & \cdots & \inf\{k, \sup\{a_{2n}, b_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{k, \sup\{a_{m1}, b_{m1}\}\} & \inf\{k, \sup\{a_{m2}, b_{m2}\}\} & \cdots & \inf\{k, \sup\{a_{mn}, b_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{k, (a_{11} + b_{11})\} & \inf\{k, (a_{12} + b_{12})\} & \cdots & \inf\{k, (a_{1n} + b_{1n})\} \\ \inf\{k, (a_{21} + b_{21})\} & \inf\{k, (a_{22} + b_{22})\} & \cdots & \inf\{k, (a_{2n} + b_{2n})\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{k, (a_{m1} + b_{m1})\} & \inf\{k, (a_{m2} + b_{m2})\} & \cdots & \inf\{k, (a_{mn} + b_{mn})\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{\inf\{k, a_{11}\} + \inf\{k, b_{11}\}\} & \{\inf\{k, a_{12}\} + \inf\{k, b_{12}\}\} & \cdots & \{\inf\{k, a_{1n}\} + \inf\{k, b_{1n}\}\} \\ \{\inf\{k, a_{21}\} + \inf\{k, b_{21}\}\} & \{\inf\{k, a_{22}\} + \inf\{k, b_{22}\}\} & \cdots & \{\inf\{k, a_{2n}\} + \inf\{k, b_{2n}\}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\inf\{k, a_{m1}\} + \inf\{k, b_{m1}\}\} & \{\inf\{k, a_{m2}\} + \inf\{k, b_{m2}\}\} & \cdots & \{\inf\{k, a_{mn}\} + \inf\{k, b_{mn}\}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \inf\{k, a_{11}\} & \inf\{k, a_{12}\} & \cdots & \inf\{k, a_{1n}\} \\ \inf\{k, a_{21}\} & \inf\{k, a_{22}\} & \cdots & \inf\{k, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{k, a_{m1}\} & \inf\{k, a_{m2}\} & \cdots & \inf\{k, a_{mn}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \inf\{k, b_{11}\} & \inf\{k, b_{12}\} & \cdots & \inf\{k, b_{1n}\} \\ \inf\{k, b_{21}\} & \inf\{k, b_{22}\} & \cdots & \inf\{k, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{k, b_{m1}\} & \inf\{k, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{k, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$= kA + kB$ ■

Jadi perkalian skalar dua matriks berlaku sifat distributi

Definisi 3.1.4 Misalkan $V_{m \times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m \ x \ n$, untuk sebarang dua anggota $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij}) \in V_{mxn}$.

$$A \cdot B = \left(\sup\left\{\inf\left\{a_{ik}, b_{kj}\right\}\right\}\right) = \underset{k}{\vee}\left\{\wedge(a_{ik}, b_{kj})\right\} \text{ dimana}$$

$$. \ \forall a_{ij}, b_{ij} \in [0,1]$$

(V. Kandasamy, 2007)

3.2 **Ruang Vektor Matriks Fuzzy**

Definisi 3.2.1 Misalkan $V_{m\times n}$ adalah himpunan semua matriks fuzzy $m\times n$ $A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad dan \quad C = (c_{ij}) \in V_{m\times n}$.

Ruang vektor matriks fuzzy adalah sistem yang terdiri dari himpunan matriks fuzzy $V_{m\times n}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks fuzzy dengan skalar $k \in [0, 1]$.
(S. Panayappan, 2010)

Definisi 3.2.2 Hasil kali dalam antara dua elemen $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij}) \in V_{mxn}$ didefinisikan sebagai

$$\langle A, B\rangle = \underset{i,j}{\vee}\left(a_{ij} \wedge b_{ij}\right) \ldots .(2).$$

Operasi ini memenuhi beberapa kondisi berikut,
1. $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$
2. $\langle kA, B\rangle = k\langle A, B\rangle, k \in [0,1]$
3. $\langle A + B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle, C \in V_{m\times n}$
4. $\langle A, A\rangle = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$.

(S. Panayappan, 2007)

Bukti :

1. $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$

$$\langle A, B\rangle = \underset{ij}{\vee}\left(a_{ij} \wedge b_{ij}\right)$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{a_{11}, b_{11}\} & \inf\{a_{12}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \inf\{a_{21}, b_{21}\} & \inf\{a_{22}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{a_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{a_{m1}, b_{m1}\} & \inf\{a_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{b_{11}, a_{11}\} & \inf\{b_{12}, a_{12}\} & \cdots & \inf\{b_{1n}, a_{1n}\} \\ \inf\{b_{21}, a_{21}\} & \inf\{b_{22}, a_{22}\} & \cdots & \inf\{b_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{b_{m1}, a_{m1}\} & \inf\{b_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \inf\{b_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\left(b_{ij} \wedge a_{ij}\right)$$

$$= \langle B, A\rangle \quad \blacksquare$$

2. $\langle kA, B\rangle = k\langle A, B\rangle, k \in [0,1]$

$$\langle kA, B\rangle = \underset{i,j}{\vee}\left(ka_{ij} \wedge b_{ij}\right)$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{\inf\{k, a_{11}\}, b_{11}\} & \inf\{\inf\{k, a_{12}\}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, a_{1n}\}, b_{1n},\} \\ \inf\{\inf\{k, a_{21}\}, b_{21}\} & \inf\{\inf\{k, a_{22}\}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, a_{2n}\}, b_{2n},\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{\inf\{k, a_{m1}\}, b_{m1}\} & \inf\{\inf\{k, a_{m2}\}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{\inf\{k, a_{mn}\}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{k, \inf\{a_{11}, b_{11}\} & \inf\{k, \inf\{a_{12}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \inf\{k, \inf\{a_{21}, b_{21}\} & \inf\{k, \inf\{a_{22}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{a_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{k, \inf\{a_{m1}, b_{m1}\} & \inf\{k, \inf\{a_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{k, \inf\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= k\underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{a_{11}, b_{11}\} & \inf\{a_{12}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \inf\{a_{21}, b_{21}\} & \inf\{a_{22}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{a_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{a_{m1}, b_{m1}\} & \inf\{a_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= k\langle A, B\rangle \quad \blacksquare$$

3. $\langle A + B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle, C \in V_{m\times n}$

$$\langle A + B, C\rangle = \underset{i,j}{\vee}\left(c_{ij} \wedge (sup\{a_{ij}, b_{ij}\})\right)$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{c_{11}, \sup\{a_{11}, b_{11}\} & \inf\{c_{12}, \sup\{a_{12}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{c_{1n}, \sup\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \inf\{c_{21}, \sup\{a_{21}, b_{21}\} & \inf\{c_{22}, \sup\{a_{22}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{c_{2n}, \sup\{a_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{c_{m1}, \sup\{a_{m1}, b_{m1}\} & \inf\{c_{m2}, \sup\{a_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{c_{mn}, \sup\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \sup\left(\inf\{c_{11}, a_{11}\}, \inf\{c_{11}, b_{11}\}\right) & \sup\left(\inf\{c_{12}, a_{12}\}, \inf\{c_{12}, b_{12}\}\right) & \cdots & \sup\left(\inf\{c_{1n}, a_{1n}\}, \inf\{c_{1n}, b_{1n}\}\right) \\ \sup\left(\inf\{c_{21}, a_{21}\}, \inf\{c_{21}, b_{21}\}\right) & \sup\left(\inf\{c_{22}, a_{22}\}, \inf\{c_{22}, b_{22}\}\right) & \cdots & \sup\left(\inf\{c_{2n}, a_{2n}\}, \inf\{c_{2n}, b_{2n}\}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sup\left(\inf\{c_{m1}, a_{m1}\}, \inf\{c_{m1}, b_{m1}\}\right) & \sup\left(\inf\{c_{m2}, a_{m2}\}, \inf\{c_{m2}, b_{m2}\}\right) & \cdots & \sup\left(\inf\{c_{mn}, a_{mn}\}, \inf\{c_{mn}, b_{mn}\}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \inf\{c_{11}, a_{11}\} + \inf\{c_{11}, b_{11}\} & \inf\{c_{12}, a_{12}\} + \inf\{c_{12}, b_{12}\} & \cdots & \inf\{c_{1n}, a_{1n}\} + \inf\{c_{1n}, b_{1n}\} \\ \inf\{c_{21}, a_{21}\} + \inf\{c_{21}, b_{21}\} & \inf\{c_{22}, a_{22}\} + \inf\{c_{22}, b_{22}\} & \cdots & \inf\{c_{2n}, a_{2n}\} + \inf\{c_{2n}, b_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{c_{m1}, a_{m1}\} + \inf\{c_{m1}, b_{m1}\} & \inf\{c_{m2}, a_{m2}\} + \inf\{c_{m2}, b_{m2}\} & \cdots & \inf\{c_{mn}, a_{mn}\} + \inf\{c_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\left(c_{ij} \wedge a_{ij}\right) + \underset{i,j}{\vee}\left(c_{ij} \wedge b_{ij}\right)$$

$$= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle \quad \blacksquare$$

$\therefore \langle A + B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$

4. $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$$\langle A, A\rangle = \underset{i,j}{\vee}\left(a_{ij} \wedge a_{ij}\right)$$

$$= \underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \min\{a_{11}, a_{11}\} & \min\{a_{12}, a_{12}\} & \cdots & \min\{a_{1n}, a_{1n}\} \\ \min\{a_{21}, a_{21}\} & \min\{a_{22}, a_{22}\} & \cdots & \min\{a_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{a_{m1}, a_{m1}\} & \min\{a_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \min\{a_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix}$$

- $\langle A, A\rangle = 0 \Longrightarrow A = 0$

$$\underset{i,j}{\vee}\begin{bmatrix} \min\{a_{11}, a_{11}\} & \min\{a_{12}, a_{12}\} & \cdots & \min\{a_{1n}, a_{1n}\} \\ \min\{a_{21}, a_{21}\} & \min\{a_{22}, a_{22}\} & \cdots & \min\{a_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{a_{m1}, a_{m1}\} & \min\{a_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \min\{a_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh $a = 0$, dengan kata lain vektor $A = \mathbf{0}$ $\blacksquare$

- $A = 0 \Longrightarrow \langle A, A\rangle = 0$

$A = 0$

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

Sehingga diperoleh$\langle A, A\rangle = 0$

Berdasar pembuktian dari dua sisi maka $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \blacksquare$.

V_{mxn} bersama hasil kali dalam pada persamaan (2) disebut ruang hasil kali dalam fuzzy.

Definisi 3.2.3 Norm untuk setiap elemen $A \in V_{m\times n}$ didefinisikan sebagai $\|A\| = \langle A, A\rangle \ldots\ldots(3)$.

Operasi pada persamaan (3) memenuhi beberapa kondisi berikut

i. $0 \leq \|A\| \leq 1, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii. $\|kA\| = k\|A\|, k \in [0,1]$

iii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(S. Panayappan, 2007)

Bukti:

i. $0 \leq \|A\| \leq 1, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

- $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\|A\| = 0$$
$$\langle A, A\rangle = 0$$
$$\bigvee_{i,j} (a_{ij} \wedge a_{ij}) = 0$$

$$= \bigvee_{i,j} \begin{bmatrix} \inf\{a_{11}, a_{11}\} & \inf\{a_{12}, a_{12}\} & \cdots & \inf\{a_{1n}, a_{1n}\} \\ \inf\{a_{21}, a_{21}\} & \inf\{a_{22}, a_{22}\} & \cdots & \inf\{a_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{a_{m1}, a_{m1}\} & \inf\{a_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \inf\{a_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = 0$$

$$A = \mathbf{0} \quad \blacksquare$$

- $A = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$

$A = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\|A\| = \langle A, A\rangle$

$= \bigvee_{i,j} (a_{ij} \wedge a_{ij})$

$$= \bigvee_{i,j} \begin{bmatrix} \inf\{a_{11}, a_{11}\} & \inf\{a_{12}, a_{12}\} & \cdots & \inf\{a_{1n}, a_{1n}\} \\ \inf\{a_{21}, a_{21}\} & \inf\{a_{22}, a_{22}\} & \cdots & \inf\{a_{2n}, a_{2n}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \inf\{a_{m1}, a_{m1}\} & \inf\{a_{m2}, a_{m2}\} & \cdots & \inf\{a_{mn}, a_{mn}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\|A\| = \mathbf{0} \quad \blacksquare$

ii $\|kA\| = k\|A\|, k \in [0,1]$

$\|kA\| = \langle kA, kA\rangle$

$= \bigvee_{i,j} (ka_{ij} \wedge ka_{ij})$

$= \bigvee_{i,j} (ka_{ij})$

$= ka_{ij}$

$= k\langle A, A\rangle$

$= k\|A\|$

$\|kA\| = k\|A\| \quad \blacksquare$

iii $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|A + B\| = \langle A + B, A + B\rangle$

$= \bigvee_{i,j} ((a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge (a_{ij} \vee b_{ij}))$

$\leq \bigvee_{i,j} (a_{ij} \vee b_{ij})$

$= \bigvee_{i,j} (a_{ij}) \vee \bigvee_{i,j} (b_{ij})$

$= \langle A, A\rangle + \langle B, B\rangle$

$= \|A\| + \|B\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \blacksquare$

V_{mxn} dengan norm diatas disebut ruang vektor fuzzy bernorm.

Definisi 3.2.4 Misal V_{mxn} sebuah ruang vektor fuzzy bernorm dari matriks fuzzy. Pemetaan T dari V_{mxn} pada dirinya sendiri disebut operator linier fuzzy jika untuk setiap $A, B \in V_{m\times n}$ dan $k \in [0,1]$ memenuhi:

i. $T(A + B) = T(A) + T(B)$

ii. $T(kA) = kT(A)$

(S. Panayappan, 2007)

Proposisi 3.1

Misalkan V_{mxn} sebuah ruang vektor fuzzy bernorm. Maka $L(V_{mxn})$ himpunan semua operator linier yang memetakan V_{mxn} ke dirinya merupakan ruang vektor fuzzy dengan penjumlahan serta perkalian fuzzynya didefinisikan sebagai berikut

(i) $(T_1 + T_2)A = T_1(A) + T_2(A)$

(ii) $(\alpha T_1)A = \alpha T_1(A)$

Untuk setiap $T_1, T_2 \in L(V_{mxn}), A \in V_{mxn}$ dan $\alpha \in [0,1]$

Dibawah ini akan ditunjukkan bahwa $L(V_{mxn})$ merupakan ruang vektor fuzzy,

1. Operasi penjumlahan bersifat tertutup

Jika $T_1, T_2 \in L(V_{mxn})$ dan $A, B \in V_{mxn}$ maka $(T_1 + T_2) \in L(V_{mxn})$.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(T_1 + T_2) \in L(V_{mxn})$ maka harus memenuhi dua sifat berikut,

- $(T_1 + T_2)(A + B) = (T_1 + T_2)(A) + (T_1 + T_2)(B)$

$(T_1 + T_2)(A + B)$

$= T_1(A + B) + T_2(A + B)$

$= T_1(A) + T_1(B) + T_2(A) + T_2(B)$

$$= (T_1 + T_2)(A) + (T_1 + T_2)(B) \quad \blacksquare$$

➢ $(T_1 + T_2)(kA) = k(T_1 + T_2)(A)$

$$(T_1 + T_2)(kA) = (T_1)(kA) + (T_2)(kA)$$
$$= kT_1(A) + kT_2(A)$$
$$= k(T_1 + T_2)(A) \quad \blacksquare$$

Karena dua sifat diatas terpenuhi maka $(T_1 + T_2) \in L(V_{mxn})$

2. Operasi penjumlahan besifat komutatif

Jika $T_1, T_2 \in L(V_{mxn})$,dan $A \in V_{mxn}$ maka,

$$(T_1 + T_2)(A) = (T_2 + T_1)(A).$$

Bukti:

$$(T_1 + T_2)(A) = T_1(A) + T_2(A)$$
$$T_2(A) + T_1(A)$$
$$= (T_2 + T_1)(A) \quad \blacksquare$$

3. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif

Jika $T_1, T_2, T_3 \in L(V_{mxn})$,dan $A \in V_{mxn}$ maka,

$$T_1(A) + (T_2 + T_3)(A) = (T_1 + T_2)(A) + (T_3)(A).$$

Bukti:

$$T_1(A) + (T_2 + T_3)(A) = T_1(A) + (T_2(A) + T_3(A))$$
$$= T_1(A) + T_2(A) + T_3(A)$$
$$= \big(T_1(A) + T_2(A)\big) + T_3(A)$$
$$= (T_1 + T_2)(A) + (T_3)(A) \quad \blacksquare$$

4. Sifat identitas

Ada **0** dalam $L(V_{mxn})$, sedemikian hingga $0 + T(A) = T(A) + 0 = T(A)$ untuk semua $T(A) \in L(V_{mxn})$.

Bukti:

$$0 + T(A) = T(A) + 0$$
$$= T(A) \quad \blacksquare$$

5. Sifat invers

Tidak terpenuhi.

6. Perkalian skalar bersifat tertutup

Jika $T_1 \in L(V_{mxn})$, $A, B \in V_{mxn}$ dan $\alpha \in [0,1]$ maka

$$\alpha T_1 \in L(V_{mxn}).$$

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $\alpha T_1 \in L(V_{mxn})$ maka harus memenuhi dua sifat berikut,

➢ $\alpha T_1(A + B) = \alpha T_1(A) + \alpha T_1(B)$

$$\alpha T_1(A + B) = \alpha(T_1(A) + T_1(B))$$
$$= \alpha T_1(A) + \alpha T_1(B) \quad \blacksquare$$

➢ $\alpha T_1(kA) = k(\alpha T_1(A))$

$$\alpha T_1(kA) = \alpha(kT_1(A))$$
$$= \alpha k T_1(A)$$
$$= k\alpha T_1(A)$$
$$= k\big(\alpha T_1(A)\big) \quad \blacksquare$$

Karena dua sifat diatas terpenuhi maka $\alpha T_1 \in L(V_{mxn})$

7. Perkalian skalar bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan

Jika $T_1, T_2 \in L(V_{mxn})$, $A \in V_{mxn}$ dan $\alpha \in [0,1]$ maka

$$\alpha(T_1 + T_2)(A) = \alpha T_1(A) + \alpha T_2(A)$$

Bukti:

$$\alpha(T_1 + T_2)(A) = \alpha(T_1(A) + T_2(A))$$
$$= \alpha T_1(A) + \alpha T_2(A) \quad \blacksquare$$

8. Perkalian skalar bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan

Jika $T_1 \in L(V_{mxn})$, $A \in V_{mxn}$ dan $\alpha, \beta \in [0,1]$ maka

$$(\alpha + \beta)T_1(A) = \alpha T_1(A) + \beta T_1(A)$$

Bukti:

$$(\alpha + \beta)T_1(A) = (\alpha T_1 + \beta T_1)(A)$$
$$= \alpha T_1(A) + \beta T_1(A) \quad \blacksquare$$

9. Perkalian skalar bersifat assosiatif

Jika $T_1 \in L(V_{mxn})$, $A \in V_{mxn}$ dan $\alpha, \beta \in [0,1]$ maka

$$\alpha(\beta T_1(A)) = (\alpha\beta)T_1(A)$$

Bukti:

$$\alpha(\beta T_1(A)) = \alpha\beta(T_1(A))$$
$$= (\alpha\beta)T_1(A) \quad \blacksquare$$

10. Perkalian dengan skalar 1

Jika $T_1 \in L(V_{mxn})$, $A \in V_{mxn}$ dan $1 \in [0,1]$ maka

$$1T_1(A) = T_1(A)$$

Bukti:

$$1T_1(A) = T_1(1 \cdot A)$$
$$= T_1(A) \quad \blacksquare$$

Berdasarkan definisi ruang vektor 2.2.1, sifat invers tidak terpenuhi karena batasan skalar. Maka $L(V_{mxn})$ himpunan semua operator linier yang memetakan V_{mxn} ke dirinya merupakan ruang vector fuzzy.

Berdasar proposisi 3.1 maka ada beberapa sifat-sifat berikut :

(i) $(\alpha\beta)T_1 = \alpha(\beta T_1)$ (sifat asosiatif pada perkalian skalar)

(ii) $(\alpha + \beta)T_1 = \alpha T_1 + \beta T_1$(sifat distributif pada perkalian skalar)

(iii) $\alpha(T_1 + T_2) = \alpha T_1 + \alpha T_2$ (sifat distributif pada perkalian skalar)

(iv) $T_1 + 0 = T_1$ (sifat identitas)

SIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari makalah ini yaitu bahwa operasi penjumlahan dan perkalian skalar matriks fuzzy dengan skalar $k \in [0, 1]$ membentuk ruang vektor fuzzy yang hanya memenuhi 9 teorema ruang vektor umum.

SARAN

Dalam skripsi ini hanya dibahas konsep ruang vector matriks fuzzy. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk menjelaskan tentang operator linier pada ruang vector matriks fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer*, diterjemahkan oleh: Pantur Silaban, Ph. D. dan Drs. I. Nyoman Susila, M. Sc.. Jakarta: Erlangga.

[2] Anton, H., dan Rorres, C., 2004, *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kedelapan, jilid 1. Jakarta: Erlangga

[3] Arifin, Achmad. 2001. Aljabar Linier. Edisi kedua. Bandung: ITB

[4] Budhi W. Setya. 1995. *Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

[5] Kandasami, W. B. Vasantha, Smarandache, F., dan Ilanthenral, K.. 2007. *Elementary Fuzzy Matrix Theory And Fuzzy Models For Social Scientists*. (*online*). (http://www.lib.umi.com/. Diakses tanggal 06 September 2012, jam 13.00 WIB).

[6] Masriyah. 2007. *Pengantar Dasar Matematika*. Surabaya: Unesa Press.

[7] Panayappan, S.. 2010. *Fuzzy Linier Operator on Vektor Spaces of Fuzzy Matrices*. (*online*). (http://www.m-hikari.com. Diakses tanggal 13 Oktober 2012, jam 21.00 WIB)

[8] Setiadji. 2009. *Himpunan dan Logika Samar Serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.