

PELABELAN GRACEFUL SISI PADA GRAF KOMPLIT, GRAF KOMPLIT REGULER K-PARTIT, GRAF RODA, GRAF BISIKEL, DAN GRAF TRISIKEL

Dian Noer Indah Sari¹, Budi Rahadjeng, S.Si, M.Si.²,

¹ Jurusan Matematika, FMIPA, Unesa
email : dnis_dian@yahoo.com

ABSTRAK

Misal G adalah graf dengan p titik dan q sisi. Graf G dikatakan graceful sisi jika ada fungsi bijektif $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan fungsi bijektif $g : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ dengan $g(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$. Suatu graf disebut graceful sisi jika terdapat pelabelan graceful sisi pada graf tersebut. Pada skripsi ini dibahas pelabelan graceful sisi pada beberapa jenis graf sederhana, yaitu graf komplit, graf komplit reguler k -partit, graf roda, graf bisikel, dan graf trisikel.

Kata kunci : pelabelan graceful sisi, graf komplit, graf komplit reguler k -partit, graf roda, graf bisikel, dan graf trisikel.

1 PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam teori graf yang mengalami perkembangan pesat adalah pelabelan. Pelabelan pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Pelabelan graceful adalah salah satu pelabelan yang sangat terkenal. Ada beberapa macam pelabelan graceful, diantaranya adalah pelabelan graceful sisi, pelabelan graceful titik, pelabelan graceful kuat, pelabelan super sisi graceful, dan lain-lain. Sebelumnya telah ada skripsi yang membahas pelabelan graceful, yaitu tentang pelabelan (k, d) -graceful pada graf T_p -Trees oleh Inung Auliya (2008).

Walaupun pelabelan graceful sisi adalah salah satu pengembangan pelabelan graceful, dari keduanya terdapat perbedaan yang sangat banyak. sehingga pelabelan graceful sisi menjadi menarik untuk dipelajari dan dibahas lebih lanjut. Adapun jurnal yang menjadi acuan dalam pembahasan dalam skripsi ini adalah jurnal dengan judul Is all the wheel graphs are Edge – Graceful ? oleh Venkatesan, S. and Sattanathan, R. dan Edge-Graceful Graph oleh Linda Tsai. Pada skripsi ini,

penulis hanya membahas pelabelan graceful sisi secara teoritis beserta teorema-teorema tentang graceful sisi. Sedangkan aplikasi dari pelabelan graceful sisi tidak dibahas. Adapun graf yang digunakan dalam pembahasan adalah beberapa jenis graf sederhana, yaitu graf komplit, graf komplit reguler k -partit, graf roda, graf bisikel, dan graf trisikel.

2 KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini, akan diuraikan beberapa definisi dasar dan beberapa teorema yang berkaitan dengan pembahasan mengenai pelabelan graceful sisi pada bab berikutnya.

2.1 TEORI DASAR GRAF

Sebuah graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah sebuah pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. $V(G)$ disebut himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari graf G [1].

2.2 MACAM-MACAM GRAF

Sebuah graf komplit dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graf sederhana di mana untuk setiap dua titik berbeda pada graf dihubungkan oleh tepat satu sisi [1]. Banyak sisi pada graf komplit dengan n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Graf bipartit (bipartite graph) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah titik di X dan sebuah titik di Y . X dan Y disebut himpunan partisi [1].

Graf bipartit komplit (complete bipartite graph) adalah graf bipartit dengan himpunan partisi X dan Y sehingga setiap titik di X dihubungkan dengan setiap titik di Y oleh tepat satu sisi [10]. Graf bipartit komplit dengan $|X| = m$ dan $|Y| = n$ dinotasikan dengan $K_{m,n}$.

Graf reguler adalah suatu graf yang setiap titiknya berderajat sama [13].

Graf k-Partit adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi k himpunan tak kosong titik-titik, misal A_n , $n = 1, 2, 3, \dots, k$ sehingga setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah titik di A_i , untuk $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ dan sebuah titik di A_j untuk $j \in \{1, 2, \dots, k\}, j \neq i$. A_n , $n = 1, 2, 3, \dots, k$ disebut himpunan partisi. Dengan kata lain, pada graf k-Partit tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik pada himpunan partisi yang sama [13].

Graf komplit reguler k-partit adalah suatu graf komplit k-partit yang setiap titiknya berderajat sama atau banyaknya anggota setiap himpunan partisi titiknya sama [13].

Graf sikel adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua [12]. Graf sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n dengan $n \geq 3$.

Graf bisikel adalah graf yang terdiri dari dua sikel yang berpotongan pada satu titik, berpotongan pada satu sisi, berpotongan pada beberapa sisi, atau dihubungkan oleh suatu lintasan. Suatu graf bisikel terdiri dari q sisi dan $q-1$ titik [12].

Graf trisikel adalah graf yang terdiri dari tiga sikel. Untuk jenis pertama ketiga sikel tersebut mempunyai satu titik persekutuan atau ada dua pasang sikel mempunyai satu titik persekutuan. Untuk jenis kedua, setiap dua sikel berpotongan pada satu atau beberapa sisi atau ada dua pasang sikel berpotongan pada satu atau beberapa sisi. Untuk jenis ketiga setiap dua sikel dihubungkan oleh suatu lintasan atau ada dua pasang sikel yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Suatu graf trisikel terdiri dari q sisi dan $q-2$ titik [12].

Graf roda W_n terbentuk dari suatu graf sikel C_n dengan menambahkan satu titik, misal titik x dan n buah sisi, dimana setiap sisi yang ditambahkan menghubungkan titik x dengan setiap titik pada C_n . Graf roda W_n mempunyai $n+1$ titik dan $2n$ sisi [12].

2.3 FUNGSI

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Apabila cara atau aturan tersebut diberi simbol f , maka dikatakan bahwa f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dan dilambangkan sebagai $f : A \rightarrow B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari fungsi f . [5] Ada beberapa macam fungsi, yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

Misal $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B ,

- Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika dan hanya jika setiap elemen berbeda di daerah asal mempunyai peta yang berbeda di daerah.
- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut surjektif (onto) jika dan hanya jika setiap elemen di daerah kawan merupakan peta dari elemen dari daerah asal.
- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut bijektif (korespondensi satu-satu) jika dan hanya jika merupakan fungsi injektif dan surjektif [5].

2.4 BILANGAN BULAT DAN KETERBAGIAN

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dengan $a \neq 0$, maka a dikatakan membagi b jika ada suatu bilangan bulat c sedemikian hingga $b = ac$. Jika a membagi b , dapat dikatakan bahwa a adalah faktor atau pembagi dari b dan b adalah kelipatan dari a . Jika a membagi b , dapat dinotasikan $a|b$ dan jika a tidak membagi b , dapat dinotasikan $a \nmid b$ [2].

Misal m adalah suatu bilangan bulat positif. Jika a dan b adalah bilangan bulat, maka a dan b kongruen modulo m jika $m|(a-b)$. Jika a dan b kongruen modulo m , maka dapat dituliskan $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \nmid (a-b)$, maka dituliskan bahwa $a \not\equiv b \pmod{m}$ dan dikatakan a dan b tidak kongruen modulo m . Bilangan bulat m disebut modulus dari kekongruenan tersebut [2].

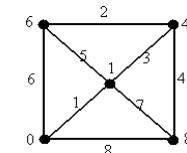
2.5 PELABELAN

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (vertex labeling). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (edge labeling). Dan jika domain dari fungsi adalah himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (total labeling) [8].

2.6 PELABELAN GRACEFUL

Pelabelan graceful pada graf G dengan q sisi adalah suatu fungsi injektif, $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian hingga jika sisi xy dilabeli dengan $|f(x) - f(y)|$, maka label sisi akan berbeda semua. Di sini, $V(G)$ adalah himpunan titik pada graf G , sisi xy adalah sisi yang menghubungkan titik x dan titik y pada graf G . Graf yang memenuhi pelabelan graceful disebut graf graceful [6].

Berikut adalah contoh graf yang memenuhi pelabelan graceful :



Gambar 1. Pelabelan Graceful

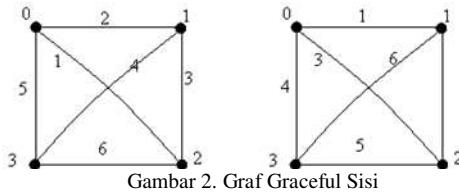
3 PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pelabelan graceful sisi, dan beberapa teorema mengenai pelabelan graceful sisi.

3.1 GRAF GRACEFUL SISI

Misal G graf dengan p titik dan q sisi. Graf G dikatakan graceful sisi jika ada fungsi bijektif $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan fungsi bijektif $g : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ dengan $g(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$ [11].

Berikut adalah beberapa contoh graf graceful sisi :



Gambar 2. Graf Graceful Sisi

3.2 TEOREMA-TEOREMA :

Teorema 3.2.1 :

Jika graf G dengan p titik dan q sisi adalah graf graceful sisi, maka $p \mid q^2 + q - \frac{p(p-1)}{2}$

Bukti :

Karena G adalah graf graceful sisi, maka terdapat pelabelan graceful sisi pada graf G sehingga : label titik $v_i \equiv \sum_{v_i v_j \in E(G)} \text{label sisi } v_i v_j \pmod{p}$, untuk semua $v_i \in V(G)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=p} \text{label titik } v_i \equiv \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{v_i v_j \in E(G)} \text{label sisi } v_i v_j \pmod{p} \\ &\text{(Setiap sisi pada graf } G \text{ terkait dengan dua titik. Sehingga jika menjumlahkan semua label titik dalam graf } G, \text{ maka setiap sisi dihitung tepat dua kali)} \\ &\Leftrightarrow 0+1+2+\dots+(p-1) \equiv 2(1+2+3+\dots+q) \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow \frac{p(p-1)}{2} \equiv 2 \left(\frac{q(q+1)}{2} \right) \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow \frac{p(p-1)}{2} \equiv q(q+1) \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow q^2 + q \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow p \mid q^2 + q - \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p} \end{aligned}$$

Terbukti.

Teorema 3.2.2 :

K_p dengan p ganjil, $p \geq 3$ adalah graf graceful sisi.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa suatu graf adalah graf graceful sisi, harus ditunjukkan ada fungsi yang memenuhi pelabelan graceful sisi pada graph tersebut.

Labeli sisi-sisi K_p (p ganjil, $p \geq 3$) dengan :

$$f(v_i v_j) = \begin{cases} \min\{i, j\} + (|i - j| - 1)p, & \text{untuk } |i - j| \leq \frac{p-1}{2} \\ \max\{i, j\} + (p - |i - j| - 1)p, & \text{untuk } |i - j| > \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$

(Pada K_p terdapat $p-1$ macam selisih i dan j . Pada fungsi f di atas, rumus fungsi dibedakan menjadi dua macam, yaitu untuk $|i - j| \leq \frac{p-1}{2}$ dan untuk $|i - j| > \frac{p-1}{2}$)

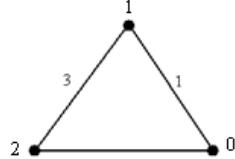
Sedangkan titik-titik K_p dilabeli dengan :

$$g(v_i) = \begin{cases} \left(\left(\sum_{r=\frac{p-3}{2}}^{r=\frac{p+3}{2}} r \right) + i \left(\frac{2p-i+1}{2} \right) - \frac{p+1}{2} \right) \pmod{p}, & \text{untuk } i \leq \frac{p-1}{2} \\ \left(\left(\sum_{a=0}^{a=\frac{p-3}{2}} a + 1 \right) + i(p - i) \right) \pmod{p}, & \text{untuk } i = \frac{p+1}{2} \\ \left(\left(\sum_{a=0}^{a=\frac{p-3}{2}} a + i - \frac{p-1}{2} \right) + i \left(\frac{p-1}{2} \right) \right) \pmod{p}, & \text{untuk } \frac{p+1}{2} < i < p \\ \left(\sum_{a=0}^{a=\frac{p-3}{2}} a + i - \frac{p-1}{2} \right) \pmod{p}, & \text{untuk } i = p \end{cases}$$

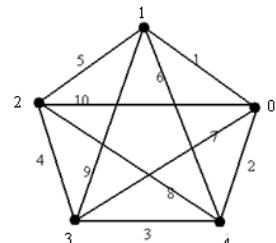
Akibatnya label sisi-sisi pada K_p (p ganjil, $p \geq 3$) adalah bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, q$ dengan label berbeda pada setiap sisi dan label titik-titik adalah bilangan bulat $0, 1, 2, \dots, p-1$ dengan label berbeda pada setiap titik dan label titik merupakan jumlah semua label sisi-sisi yang terkait ke titik tersebut modulo p . Pelabelan ini adalah pelabelan graceful sisi, sehingga ada pelabelan graceful sisi pada K_p dengan p ganjil.

Jadi K_p dengan p ganjil adalah graf graceful sisi. Terbukti.

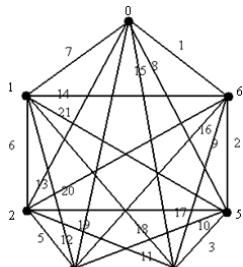
Berikut adalah pelabelan graceful sisi pada K_3, K_5, K_7 dengan label yang didefinisikan di atas :



Gambar 3. Pelabelan Graceful Sisi pada Graf K_3



Gambar 4. Pelabelan Graceful Sisi pada Graf K_5



Gambar 5. Pelabelan Graceful Sisi pada Graf K_7

Teorema 3.2.3 :

Jika graf komplit reguler k -partit, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} adalah graf graceful sisi, maka n ganjil dan k ganjil atau k kelipatan 4.

Bukti :

Pada graf komplit reguler k -partit, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} terdapat k himpunan partisi titik-titik di mana pada setiap himpunan partisi terdapat n titik. Sehingga banyak titik pada K_{n_1, n_2, \dots, n_k} adalah kn . Karena K_{n_1, n_2, \dots, n_k} adalah graf reguler, maka setiap titik berderajat sama, yaitu $n(k-1)$. Dan banyak sisi pada graf ini adalah $\frac{kn(kn-1)}{2}$.

Berdasarkan Teorema 3.2.1, diperoleh :

$$\begin{aligned} kn &\mid \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right) - \frac{kn(kn-1)}{2} \pmod{p} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right) - \frac{kn(kn-1)}{2} &= b(kn), \end{aligned}$$

untuk suatu bilangan bulat b

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right) - \frac{kn(kn-1)}{2} = b \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n^2(k-1)^2kn}{4}\right) + \left(\frac{n(k-1)kn}{2}\right) - \frac{(kn-1)}{2} = b \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n^3k(k-1)^2}{4}\right) - \frac{(n-1)}{2} = b \end{aligned} \quad \dots (i)$$

Andaikan n genap $\dots (*)$

Karena n genap dan n merupakan banyak titik pada setiap himpunan partisi titik, maka $n = 2x$, untuk suatu bilangan bulat positif x , sehingga :

$$\frac{n^3k(k-1)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{(2x)^3k(k-1)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{8x^3k(k-1)^2}{4} \Leftrightarrow 2x^3k(k-1)^2$$

Karena x dan k adalah bilangan bulat, maka $2x^3k(k-1)^2$ adalah bilangan bulat.

Dari (i) :

$$\left(\frac{n^3k(k-1)^2}{4}\right) - \frac{(n-1)}{2} = b$$

Karena $\frac{n^3k(k-1)^2}{4} = 2x^3k(k-1)^2$ dan b adalah bilangan bulat, maka $\frac{(n-1)}{2}$ juga bilangan bulat.

Dari (*), n genap sehingga $n-1$ ganjil, akibatnya $\frac{(n-1)}{2}$ bukan bilangan bulat.

Jadi n tidak mungkin genap atau n ganjil $\dots (**)$

Karena n ganjil dan n merupakan banyak titik pada setiap himpunan partisi titik, maka $n = 2y + 1$, untuk suatu bilangan bulat positif y $\dots (ii)$

Dari (ii), maka :

$$\frac{n-1}{2} \Leftrightarrow \frac{2y+1-1}{2} \Leftrightarrow y$$

Sehingga $\frac{n-1}{2}$ adalah bilangan bulat

Dari (i) :

$$\left(\frac{n^3k(k-1)^2}{4}\right) - \frac{(n-1)}{2} = b$$

Karena $\frac{n-1}{2}$ dan b adalah bilangan bulat, maka $\frac{n^3k(k-1)^2}{4}$ juga harus bilangan bulat.

Dari (**), n adalah ganjil, akibatnya n^3 ganjil, agar $\frac{n^3k(k-1)^2}{4}$ juga bilangan bulat, maka $k(k-1)^2$ harus bisa dibagi 4.

Kasus 1, k genap :

Karena k genap, maka $k-1$ ganjil, akibatnya $(k-1)^2$ juga ganjil.

Agar $k(k-1)^2$ bisa dibagi 4, maka k harus bisa dibagi 4. $\dots (\#)$

Kasus 2, k ganjil :

Karena k ganjil, maka $k-1$ genap, akibatnya $(k-1)^2$ juga genap dan bisa dibagi 4. Sehingga $k(k-1)^2$ selalu bisa dibagi 4. $\dots (##)$

Dari (#) dan (##) maka k harus kelipatan 4 atau k ganjil $\dots (###)$

Berdasarkan (**) dan (###), maka n harus ganjil dan k harus kelipatan 4 atau k ganjil.

Jadi jika graf komplit reguler k -partit, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} adalah graf graceful sisi, maka n ganjil dan k ganjil atau k kelipatan 4.

Terbukti.

Teorema 3.2.4 :

Graf roda W_3 adalah graf graceful sisi.

Bukti :

Misal graf roda W_3 dengan $V(W_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(W_3) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$

Labeli sisi-sisi pada graf W_3 dengan :

$$f(v_0v_1) = 6 \quad f(v_0v_2) = 5 \quad f(v_0v_3) = 4$$

$$f(v_1v_2) = 2 \quad f(v_1v_3) = 1 \quad f(v_2v_3) = 3$$

Sedangkan titik-titik pada graf W_3 dilabeli dengan :

$$\begin{aligned} g(v_0) &= (f(v_0v_1) + f(v_0v_2) + f(v_0v_3)) \pmod{4} \\ &= (6 + 5 + 4) \pmod{4} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(v_1) &= (f(v_0v_1) + f(v_1v_2) + f(v_1v_3)) \pmod{4} \\ &= (6 + 2 + 1) \pmod{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(v_2) &= (f(v_0v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3)) \pmod{4} \\ &= (5 + 2 + 3) \pmod{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(v_3) &= (f(v_0v_3) + f(v_1v_3) + f(v_2v_3)) \pmod{4} \\ &= (4 + 1 + 3) \pmod{4} = 0 \end{aligned}$$

Akibatnya label sisi-sisi pada graf roda W_3 adalah bilangan bulat 1, 2, 3, 4, 5, 6 dengan label berbeda pada setiap sisi dan label titik-titik adalah bilangan bulat 0, 1, 2, 3 dengan label berbeda pada setiap titik dan label titik merupakan jumlah dari semua label sisi-sisi yang terkait pada titik tersebut modulo 4 (banyak titik pada W_3 adalah 4).

Jadi graf roda W_3 adalah graf graceful sisi.

Terbukti.

Teorema 3.2.5 :

Graf roda W_n bukan graph graceful sisi untuk $n \neq 3$.

Bukti :

Graf roda W_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n$ sisi.

Andaikan graf roda W_n adalah graf graceful sisi, maka berdasarkan Teorema 3.2.1:

$$\begin{aligned}
 & (n+1) \mid (2n)^2 + 2n - \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \\
 & \Leftrightarrow (n+1) \mid 4n^2 + 2n - \frac{(n+1)(n)}{2} \\
 & \Leftrightarrow (n+1) \mid 4n^2 + 2n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\
 & \Leftrightarrow (n+1) \mid \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2} = k(n+1), \text{ untuk suatu bilangan bulat } k \\
 & \Leftrightarrow \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2} = k \\
 & \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} - 2 + \frac{2}{n+1} = k \quad \dots (i) \\
 & \Leftrightarrow \frac{7n}{2} - 2 + \frac{2}{n+1} = k
 \end{aligned}$$

Kasus 1, n genap : $\dots (*)$

Karena n genap dan pada W_n , $n > 3$, maka $n = 2x$, untuk suatu bilangan bulat positif x , sehingga :

$$\begin{aligned}
 \frac{7n}{2} - 2 & \Leftrightarrow \frac{7}{2}(2x) - 2 \\
 & \Leftrightarrow 7x - 2 \text{ adalah bilangan bulat.}
 \end{aligned}$$

Dari (i) :

$$\frac{7n}{2} - 2 + \frac{2}{n+1} = k$$

Karena $\frac{7n}{2} - 2$ dan k adalah bilangan bulat, maka $\frac{2}{n+1}$ juga bilangan bulat.

Dari (*), n genap, akibatnya $n+1$ ganjil sehingga $\frac{2}{n+1}$ bukan bilangan bulat.

Akibatnya tidak ada bilangan bulat $k = \frac{7n}{2} - 2 + \frac{2}{n+1}$ sehingga $(n+1) \nmid \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2}$.

Jadi graf roda W_n bukan graf graceful sisi untuk n genap $(\#)$

Kasus 2, n ganjil :

Pada W_n , $n \geq 3$.

Untuk $n > 3$:

$\frac{2}{n+1} < \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{7n}{2} - 2 + \frac{2}{n+1} = k$ bukan bilangan bulat

Akibatnya tidak ada bilangan bulat $k = \frac{7n}{2} - 2 + \frac{2}{n+1}$ sehingga $(n+1) \nmid \frac{7n^2}{2} + \frac{3n}{2}$.

Jadi graf roda W_n bukan graf graceful sisi untuk n ganjil, $n \neq 3$. $\dots (\# \#)$

Dari (#) dan (##), graf roda W_n bukan graf graceful sisi untuk $n \neq 3$.

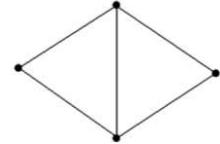
Terbukti.

Teorema 3.2.6 :

Graf bisikel dengan banyak sisi 5 adalah graf graceful sisi.

Bukti :

Satu-satunya graf bisikel dengan 5 sisi adalah :



Gambar 6. Graf Bisikel dengan 5 Sisi

Misal graf bisikel di atas, diberi nama B dengan $V(B) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3 \}$ dan $E(B) = \{ v_0v_1, v_0v_2, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 \}$

Labeli sisi-sisi pada graf B dengan :

$$\begin{aligned}
 f(v_0v_1) &= 5 & f(v_1v_2) &= 4 & f(v_2v_3) &= 1 \\
 f(v_0v_3) &= 3 & f(v_0v_2) &= 2
 \end{aligned}$$

Sedangkan titik-titik pada graf B dilabeli dengan :

$$\begin{aligned}
 g(v_0) &= (f(v_0v_1) + f(v_0v_3) + f(v_0v_2)) \pmod{4} \\
 &= (5+3+2) \pmod{4} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(v_1) &= (f(v_0v_1) + f(v_1v_2)) \pmod{4} \\
 &= (5+4) \pmod{4} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(v_2) &= (f(v_1v_2) + f(v_0v_2) + f(v_2v_3)) \pmod{4} \\
 &= (4+2+1) \pmod{4} = 3
 \end{aligned}$$

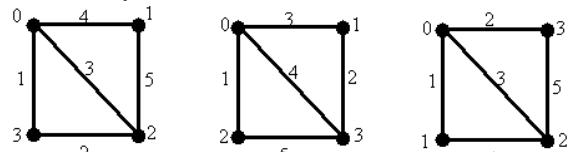
$$\begin{aligned}
 g(v_3) &= (f(v_0v_3) + f(v_2v_3)) \pmod{4} \\
 &= (3+1) \pmod{4} = 0
 \end{aligned}$$

Akibatnya label sisi-sisi pada graf B adalah bilangan bulat 1, 2, 3, 4, 5 dengan label berbeda pada setiap sisi dan label titik-titik adalah bilangan bulat 0, 1, 2, 3 dengan label berbeda pada setiap titik dan label titik merupakan jumlah dari semua label sisi-sisi yang terkait pada titik tersebut modulo 4 (banyak titik pada B adalah 4).

Jadi graf bisikel dengan banyak sisi 5 adalah graf graceful sisi.

Terbukti.

Selain itu graf bisikel dengan 5 sisi juga dapat dilabeli dengan pelabelan graceful sisi yang lain, misalnya :



Gambar 7. Beberapa Pelabelan Graceful Sisi pada Graf Bisikel dengan 5 Sisi

Teorema 3.2.7 :

Graf bisikel bukan graf graceful sisi untuk banyak sisi tidak sama dengan 5.

Bukti :

Graf bisikel memiliki $n - 1$ titik dan n sisi.

Andaikan graf bisikel adalah graf graceful sisi, maka berdasarkan Teorema 3.2.1 :

$$\begin{aligned}
 (n-1) &\mid n^2 + n - \frac{(n-1)(n-1-1)}{2} \\
 \Leftrightarrow (n-1) &\mid n^2 + n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (n-1) \mid n^2 + n - \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} - 1 \\
&\Leftrightarrow (n-1) \mid \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 1 = k(n-1), k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 1}{n-1} = k \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1} = k \quad \dots (i) \\
\end{aligned}$$

Kasus 1, n genap : $\dots (*)$

Karena n genap dan pada graph bicycle, $n > 3$, maka $n = 2x$, untuk suatu bilangan bulat positif x, sehingga :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} + 3 &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} + 3 \\
&\Leftrightarrow x + 3 \text{ adalah bilangan bulat.}
\end{aligned}$$

Dari (i) :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1} &= k \\
\text{Karena } \frac{n}{2} + 3 \text{ dan } k &\text{ adalah bilangan bulat, maka} \\
\frac{2}{n-1} &\text{ juga bilangan bulat.}
\end{aligned}$$

Dari (*), n genap, akibatnya $n-1$ ganjil sehingga $\frac{2}{n-1}$ bukan bilangan bulat.

Akibatnya tidak ada bilangan bulat $k = \frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1}$ sehingga $(n-1) \nmid \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 1$.

Jadi graf bisikel bukan graf graceful sisi untuk banyak sisi genap ... (#)

Kasus 2, n ganjil :

Pada graf bisikel, $n > 3$.

Untuk $n = 5$:

$$\begin{aligned}
\text{Dari (i)} \\
\frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1} &= k \\
\Leftrightarrow k &= \frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{5}{2} + 3 + \frac{2}{5-1} \Leftrightarrow k = 6 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Untuk $n > 5$:

$\frac{2}{n-1} < \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1} = k$ bukan bilangan bulat. Akibatnya tidak ada bilangan bulat $k = \frac{n}{2} + 3 + \frac{2}{n-1}$ sehingga $(n-1) \nmid \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 1$.

Jadi graf bisikel bukan graf graceful sisi untuk n ganjil, $n \neq 5$. $\dots (##)$

Dari (#) dan (##), graf bisikel bukan graf graceful sisi untuk $n \neq 5$.

Terbukti.

Teorema 3.2.8 :

Graf trisikel dengan 6 sisi adalah graf graceful sisi.

Bukti :

Graf trisikel dengan 6 sisi adalah graf roda W_3 . Berdasarkan Teorema 3.2.4, maka trisikel dengan 6 sisi adalah graf graceful sisi.

Terbukti.

Teorema 3.2.9 :

Graf trisikel dengan sisi selain 6 dan 14 bukan graf graceful sisi.

Bukti :

Graf trisikel memiliki $n-2$ titik dan n sisi.

Andaikan trisikel adalah graf graceful sisi, maka berdasarkan Teorema 3.2.1 :

$$\begin{aligned}
&(n-2) \mid n^2 + n - \frac{(n-2)(n-2-1)}{2} \\
&\Leftrightarrow (n-2) \mid n^2 + n - \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\
&\Leftrightarrow (n-2) \mid n^2 + n - \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{2} - 3 \\
&\Leftrightarrow (n-2) \mid \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 3 \\
&\Leftrightarrow \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 3 = k(n-2), k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 3}{n-2} = k \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} = k \quad \dots (i) \\
\end{aligned}$$

Kasus 1, n ganjil : $\dots (*)$

Karena n ganjil dan pada graf trisikel, $n \geq 6$, maka $n = 2y + 1$, untuk suatu bilangan bulat positif y, sehingga :

$$\begin{aligned}
\text{Dari (i)} : \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} &= k \\
\Leftrightarrow k &= \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{2y+1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{2y+1-2} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{2y+1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{2y-1} \\
\Leftrightarrow k &= y+5 + \frac{6}{2y-1}
\end{aligned}$$

Karena $y+5$ dan k adalah bilangan bulat, maka $\frac{6}{2y-1}$ juga bilangan bulat.

Tapi $\frac{6}{2y-1}$ adalah bilangan bulat hanya untuk $y = 1$ dan $y = 2$ yang artinya hanya untuk $n = 3$ dan $n = 5$. Padahal tidak ada graf trisikel dengan 3 sisi dan 5 sisi.

Jadi graf trisikel dengan banyak sisi ganjil bukan graf graceful sisi. $\dots (#)$

Kasus 2, n genap : $\dots (**)$

Pada graf trisikel, $n \geq 6$.

Untuk $n = 8$:

$$\begin{aligned}
\text{Dari (i)} \\
\frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} &= k \\
\Leftrightarrow k &= \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{8}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{8-2} \\
\Leftrightarrow k &= \frac{19}{2} \notin \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Untuk $n = 10$:

$$\begin{aligned}
\text{Dari (i)} \\
\frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} &= k \\
\Leftrightarrow k &= \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{10}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{10-2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{41}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Untuk $n = 12$:

Dari (i)

$$\frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} = k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{12}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{12-2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{111}{10} \notin \mathbb{Z}$$

Untuk $n > 14$:

$\frac{6}{n-2} < \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2} = k$ bukan bilangan bulat. Akibatnya tidak ada bilangan bulat $k = \frac{n}{2} + \frac{9}{2} + \frac{6}{n-2}$ sehingga $(n-2) \nmid \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{2} - 3$.

Jadi graf trisikel bukan graf graceful sisi untuk n genap kecuali untuk $n = 6$ dan $n = 14$. $\dots (\#)$

Dari (#) dan (##), graf trisikel bukan graf graceful sisi untuk banyak sisi selain 6 dan 14.

Terbukti.

4 PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Misal G adalah graf dengan p titik dan q sisi. Graf G dikatakan graceful sisi jika ada fungsi bijektif $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ dan fungsi bijektif $g : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ dengan $g(u) \equiv \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$.
2. Jika graf G dengan p titik dan q sisi adalah graf graceful sisi, maka $p \mid (q^2 + q - \frac{p(p-1)}{2})$.
3. K_p dengan p ganjil, $p \geq 3$ adalah graf graceful sisi.
4. Jika graf komplit reguler k -partit, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} adalah graf graceful sisi, maka n ganjil dan k ganjil atau k kelipatan 4.
5. Graf roda W_3 adalah graf graceful sisi.
6. Graph roda W_n bukan graf graceful sisi untuk $n \neq 3$.
7. Graf bisikel dengan banyak sisi 5 adalah graf graceful sisi.
8. Graf bisikel bukan graf graceful sisi untuk banyak sisi tidak sama dengan 5.
9. Graf trisikel dengan banyak sisi 6 adalah graf graceful sisi.
10. Graf trisikel dengan banyak sisi selain 6 dan 14 bukan graf graceful sisi.

4.2 Saran

Skripsi ini hanya membahas tentang pelabelan graceful sisi pada graf komplit, graf komplit reguler k -partit, graf roda, graf bisikel, dan graf trisikel. Bagi para pembaca yang tertarik

mengembangkan tulisan ini dapat membahas pelabelan graceful sisi pada jenis-jenis graf yang lain. Misalnya pada graf $P_m \times P_n$, graf $C_m \cup C_n$, graf $C_m \times C_n$, graf Petersen, graf Pohon, dan lain sebagainya. Selain itu dapat pula dibahas tentang pengembangan dari pelabelan graceful yang lain misalnya pelabelan graceful titik, pelabelan graceful kuat, pelabelan super sisi graceful, dan lain-lain.

5 DAFTAR PUSTAKA

- [1] Budayasa, Ketut.2007.Teoru Graph dan Aplikasinya.Surabaya : UNESA University Press Surabaya.
- [2] Kenneth H. Rosen.2000.Elementary Number Theory and It's Applications Fourth Edition.Addison Wesley Longman, Inc.
- [3] Robert G. Bartle dan Donald R. Sherbert.2000.Introduction to Real Analysis Third Edition.United States of Amerika : John Wiley and Sons, Inc.
- [4] Sutarno, Heri, dkk.2005.Matematika Diskrit.Malang : UM Press.
- [5] Sukirman.2005.Pengantar Aljabar Abstrak. Malang : UM Press.
- [6] Venkatesan, S. and Sattanathan, R. Is all the wheel graphs are Edge – Graceful ? . International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics Volume 3, Number 3, August 2010, Eashwar Publications. (online)
- [7] Tsai, Linda. Edge-Graceful Graph.(online) (jan.ucc.nau.edu/Edge-Graceful Graph.Linda Tsai.pdf diakses pada tanggal 26 Oktober 2011)
- [8] J.A.Gallian. A Dynamic Survey of Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics. Twelfth edition published: January 31, 2009.University of Minnesota Duluth.(online)(www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf)
- [9] Auliya, Inung.2008.Pelabelan (k, d) -Graceful pada Graph Tp-Trees.Skripsi tidak diterbitkan.Surabaya : FMIPA UNESA.
- [10] http://en.wikipedia.org/graph_labeling (online) (diakses pada tanggal 26 Oktober 2011)
- [11] www.wikipedia.org/cycle_graph (online) (diakses pada tanggal 26 Oktober 2011)
- [12] http://en.wikipedia.org/graceful_labeling (online) (diakses pada tanggal 26 Oktober 2011)
- [13] mathworld.wolfram.com/productmath (online) (diakses pada tanggal 3 Oktober 2012)