PERSAMAAN SCHRÖDINGER PADA DUA ATOM HIDROGEN DENGAN GAYA TARIK MUTUAL

Shandy Lavenda [1], Yusuf Fuad [1], Abadi [1],

[1] Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

60231

email : shandy.lavenda@gmail.com

ABSTRAK

Atom hidrogen memiliki energi yang sangat besar, seperti halnya yang ada dalam bom hidrogen. Bom hidrogen merupakan bom yang mempunyai tenaga dari reaksi fusi inti atom hidrogen berat yang disebut deuteron. Dalam masalah fisika nuklir, interaksi antar dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual sangatlah sering terjadi. Interaksi antar dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual dapat dikaji dengan menggunakan persamaan Schrödinger. Persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual yaitu:

$$\left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m_1}+\frac{\hbar^2}{2m_2}\right]\nabla^2 - \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\right\}\psi = E\psi$$

dan solusi persamaan Schrödingernya adalah:

$$\psi(r_i,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{im_l\phi} \sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_l)!}{2(\ell+m_l)!}}\, P_\ell^{m_l}(\cos\theta)$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_i}{na_0}\right]^{\ell} e^{\frac{\left[\frac{2r_i}{na_0}\right]}{2}}\, L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_i}{na_0}\right)$$

Solusi persamaan Schrödinger tersebut menggambarkan perilaku elektron dari dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual yang saling bertumbukan dan menghasilkan atom hidrogen berat yang disebut dengan deuterium ($^2H_1$).

Keywords: atom, hidrogen, dua atom hidrogen, persamaan Schrödinger, gaya tarik mutual.

1. PENDAHULUAN

Atom hidrogen sederhana memiliki pengaruh yang besar pada perkembangan teori kuantum, terutama pada paruh pertama abad XX ketika dasar-dasar mekanika kuantum mulai diperkenalkan [8]. Atom hidrogen memiliki energi yang sangat besar, seperti halnya yang ada dalam bom hidrogen.

Bom hidrogen mempunyai tenaga dari reaksi fusi inti atom hidrogen yang disebut deuteron. Bom hidrogen didahului oleh reaksi fisi yang merangsang terjadinya reaksi fusi [12]. Reaksi fusi atom hidrogen ini melepaskan energi yang sangat besar melebihi ledakan dinamit sebanyak ± 50.000.000 unit atau setara dengan ± 500 bom atom (inti uranium). Ledakan bom ini akan menghasilkan bola api dengan diameter beberapa kilometer disertai timbulnya awan cendawan yang sangat tinggi. Hal ini membuktikan bahwa ikatan antar atom hidrogen memainkan peran yang sangat penting dalam perkembangan mekanika kuantum. Dalam permasalahan fisika nuklir, interaksi antar dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual sangatlah sering terjadi [11]. Pada keadaan standar inti atom hidrogen bermuatan positif , yang berperan sebagai pencegah agar inti suatu atom hidrogen tidak bergerak terlalu dekat dengan inti hidrogen lainnya. Sehingga terlihat bahwa antara satu atom hidrogen dengan atom hidrogen lainnya mengalami gaya tolak-menolak yang membuat inti atom satu dan inti lainnya tidak saling bertumbukan. Ketika atom-atom hidrogen berada di bawah suhu jutaan derajat celcius, inti hidrogen yang bermuatan positif mendapatkan energi kinetik yang cukup besar untuk mengayasi gaya tolak menolak tersebut sehingga cukup dekat satu sama lain untuk menggabungkan diri di bawah gaya tarik mutual dalam kekuatan nuklir jarak pendek.

Persamaan Schrödinger adalah persamaan gelombang untuk atom yang hasil perhitungan analitiknya sesuai dengan hukum Ryberg [8]. Selain itu, persamaan Schrödinger juga dapat digunakan untuk mendeskripsikan dinamika kuantum suatu sistem beratom banyak dalam pengaruh berbagai gaya [13].

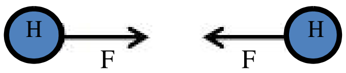
Perbedan penelitian ini dengan penelitian Broida (2009) adalah penelitian ini menggunakan atom hidrogen sebagai subyek penelitian sedangkan penelitian sebelumnya hanya mengkaji persamaan Schrödinger untuk pergerakan dua atom dengan gaya tarik mutual secara umum. Pada penelitian ini penulis mengkaji persamaan Schrödinger pada pergerakan dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual.

2. Persamaan Schrödinger Untuk Dua Atom Hidrogen Dengan Gaya Tarik Mutual

Gaya tarik mutual yang terjadi pada dua atom hidrogen yang saling berinteraksi menyebabkan besar gaya yang dihasilkan keduanya sama namun arah gaya dari kedua atom hidrogen tersebut berbeda. Sehingga jika dua atom hidrogen dari masa m_1 dan m_2 bergerak dalam gaya bersama F_1 dan F_2, maka persamaan dari kedua atom hidrogen yang memiliki gaya tarik mutual dapat dinyatakan sebagai:

$F_1 = m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2}$ dan $F_1 = m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2}$ (2.1.1)

dimana $F_1 = -F_2$ (2.1.2)



Gambar 4.1 Tumbukan dua atom hidrogen

Tanda negatif yang muncul pada persamaan (2.1.2) menunjukkan adanya perbedaan arah dari kedua atom hidrogen karena keduanya saling bertumbukan. Sedangkan koordinat dari pusat masanya adalah sebagai berikut:

$$r_c = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (2.1.3)$$

Koordinat pusat masa ini adalah inti baru yang terbentuk dari tumbukan dua atom hidrogen yang berbeda. Tumbukan dua atom hidrogen akan menghasilkan hidrogen berat yang disebut dengan deuterium ($^2H_1$) dimana inti atomnya disebut deuteron. Sehingga dapat dikatakan bahwa pusat masa yang baru adalah inti deuterium (deuteron).

Oleh karena itu persamaan schrödinger untuk dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual menjadi: Persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual yaitu:

$$\left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2}{2m_2}\right]\nabla^2 - \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\right\}\psi = E\psi \qquad (2.1.4)$$

dengan,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r_c^2}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial}{\partial r_c}\right) + \frac{1}{r_c^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r_c^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

(2.1.5)

Persamaan (2.1.4) dapat dipisahkan menjadi tiga persamaan deferensial orde dua yang hanya bergantung pada satu peubah saja, yaitu:

1. Persamaan azimut:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \qquad (2.1.6)$$

2. Persamaan Angular:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = m_l^2$$

(2.1.7)

3. Persamaan Radial:

$$\frac{d}{dr_c}\left(r_c^2\frac{dR}{dr_c}\right) + \left(\frac{-2m_1m_2 r_c^2}{(m_1+m_2)\hbar^2}\right)\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_c}\right)R = \ell(\ell+1)R$$

(2.1.8)

3. Solusi Persamaan Schrödinger Dua Atom Hidrogen Dengan Gaya Tarik Mutual

3.1 Solusi Persamaan Azimut

Penyelesaian persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual tersebut dimulai dari persamaan yang paling sederhana yaitu persamaan (2.1.6), persamaan tersebut menggambarkan rotasi elektron terhadap sumbu z. Rentangan sudut rotasi disekitar sumbu-z ini adalah 0 sampai 2 π dan kelipatannya.

Persamaan (2.1.6) dapat diselesaikan menggunakan pemisahan peubah, sehingga solusi persamaan (2.1.6) adalah sebagai berikut:

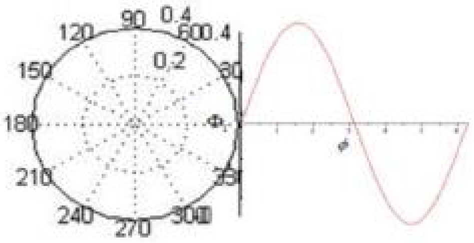
$$\Phi_{m_l} = A_{m_l} e^{im_l\phi} \qquad (3.1.1)$$

karena $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ maka $A_{m_l} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

Jadi $\Phi_{m_l} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im_l\phi}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin(m_l\phi) \qquad (3.1.2)$$

Misal diberikan m_l =1, maka solusi azimut untuk m_l = 1 adalah dan grafik (respon) dari dengan adalah sebagai berikut:



Grafik 3.1 Solusi Azimut (Φ_{m_l}) terhadap ϕ

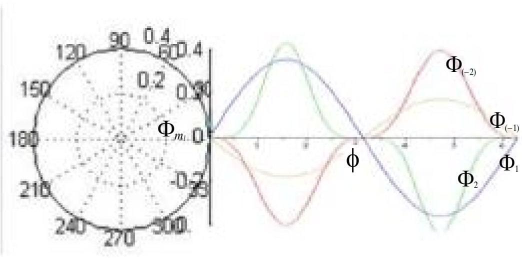
Grafik 3.1 menunjukkan respon solusi azimut dimana grafik tersebut bergerak secara kontinu mengikuti grafik sin(ϕ). Hal ini menjelaskan bahwa rotasi elektron ketika m_l =1 memiliki kelakuan sebagai berikut:

Jika elektron memiliki titik awal di maka elektron tersebut akan bergerak mengelilingi deuteron pada sabuk rotasinya dan akan kembali ke titik awal saat . Setelah itu elektron tersebut akan kembali menjauhi titik awal dan kembali bergerak mengelilingi deuteron secara periodik.

Hasil dari solusi azimut akan berbeda-beda tergantung nilai m_l yang diberikan, misalkan diberikan m_l=-2,-1,1,2 maka akan diperoleh grafik (respon) sebagai berikut:

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin\phi \qquad \Phi_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin(?\phi)$$

$$\Phi_{(-1)} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin(\phi) \qquad \Phi_{(-2)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sin(?\phi)$$



Grafik 3.1.1 Solusi Azimut (Φ_{m_l}) terhadap ϕ

3.2 Solusi Persamaan Angular

Persamaan (2.1.7) dengan konstanta $\ell(\ell+1)$ dan m_l^2 dikenal sebagai asosiasi persamaan diferensial Legendre. Solusi dari persamaan ini dapat diperoleh menggunakan metode forbenius dan diberikan oleh deret berhingga yang dikenal dengan asosiasi polinomial Legendre.

Solusi persamaan (2.1.7) diberikan oleh polinomial Legendre $P_\ell^{m_l}(\cos\theta)$, dengan $N_{\ell m_l}$ merupakan konstanta normalisasi. Sehingga diperoleh solusi persamaan (2.1.7) adalah sebagai berikut:

$$\Theta_{\ell m_l}(\theta) = \sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_\ell)!}{2(\ell+m_\ell)!}}P_\ell^{m_l}(\cos\theta) \qquad (3.2.1)$$

dengan,

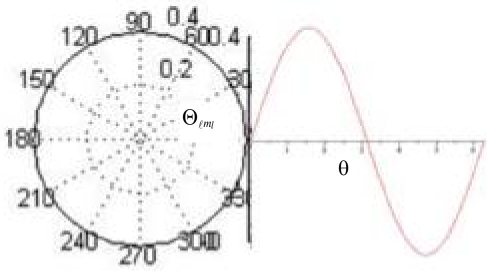
$$P_\ell^{m_l}(\cos\theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-\cos^2\theta)^{\frac{m_l}{2}}$$

$$\frac{d^{\ell+m_l}}{d\cos^{\ell+m_l}\theta}(\cos^2\theta - 1)^\ell \qquad (3.2.2)$$

Misal diberikan m_l=1, ℓ=1, maka solusi angular untuk m_l=1 dan ℓ=1 adalah:

$$\Theta_{11} = \sin(\phi) \qquad (3.2.3)$$

Dan grafik respon dari solusi Θ_{11} dimana θ berada pada rentang 0 < θ < 2π adalah sebagai berikut:



Grafik 3.2 Solusi angular ($\Theta_{\ell m_l}$) ketika m_l=1 dan ℓ=1 terhadap θ

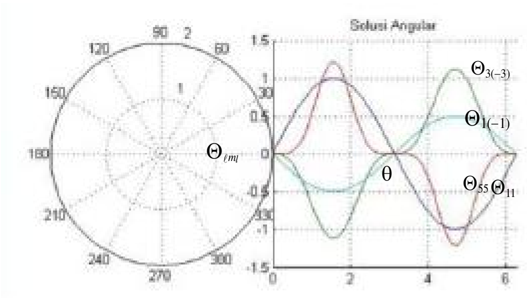
Grafik 3.2 menunjukkan respon solusi angular dimana grafik tersebut menjelaskan bahwa keadaan angular kedua elektron ketika m_l=1 dan ℓ=1 memiliki kelakuan sebagai berikut:

Jika elektron deuterium memiliki posisi angular awal di $\theta = 0$ maka akan mengelilingi deuteron pada sumbu angularnya dan akan kembali ke posisi angular awal saat $\theta = 2\pi$ setelah itu elektron tersebut akan kembali menjauhi posisi awal dan kembali bergerak mengikuti sumbu angularnya secara periodik.

Hasil dari solusi angular akan berbeda-beda tergantung nilai m_l dan ℓ yang diberikan, misalkan diberikan m_l=-2,-1,1,2,5 dan ℓ = 1,2,5 diperoleh grafik (respon) sebagai berikut:

$$\Theta_{3(-3)} = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\sin^3(\phi),\ \Theta_{55} = \frac{315}{8}\sqrt{\frac{1}{210}}\sin^5(\phi),$$

$$\Theta_{11} = \sin(\phi),\ \Theta_{1(-1)} = 2\sin(\phi)$$



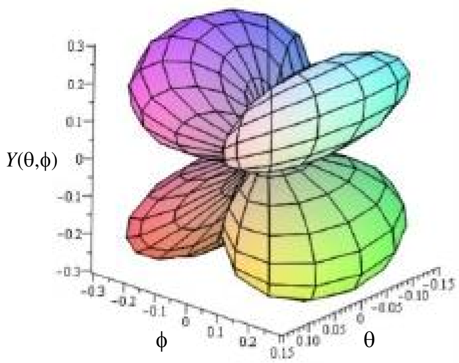
Grafik 3.2.1 Solusi angular ($\Theta_{\ell m_l}$) terhadap θ

Solusi gabungan antara solusi angular dan solusi azimut disebut dengan solusi sudut ($Y(\theta,\phi)$), dimana:

$$Y(\theta,\phi) = \Theta_{\ell m_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\phi)$$

Sebagai studi kasus, diberikan solusi parsial dari persamaan sudut yaitu persamaan azimuth Φ_2, dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (m_l) sama dengan dua. Solusi angular Θ_{11}, dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (m_l) sama dengan satu dan bilangan kuantum angular (ℓ) sama dengan satu. Sehingga dari solusi parsial tersebut diperoleh solusi persamaan sudut $Y(\theta,\phi) = \Theta_{11}\Phi_2$.

Sehingga misalkan θ berada pada rentang $0 \le \theta \le 2\pi$ dan ϕ berada pada rentang $0 \le \phi \le 2\pi$ diperoleh grafik (respon) sebagai berikut:



Grafik 3.2.3 Solusi sudut (*Y*(*θ*,*ϕ*))

Grafik 3.2.3 menunjukkan respon solusi sudut ketika $0 \le \theta \le 2\pi$ dan $0 \le \phi \le 2\pi$ Berdasarkan grafik 3.2.3 diketahui bahwa elektron bergerak secara periodik dalam dimensi tiga sesuai dengan nilai θ dan ϕ tertentu diantara rentang 0 sampai 2π

3.3 Solusi Persamaan Radial

Solusi dari persamaan (2.1.8) akan diselesaikan dengan metode polinomial Laguerre dan rumus Rodrigues.

Pada keadaan terikat yaitu keadaan dengan energi negatifnya adalah $E = |E|$, maka persamaan (2.1.8) memiliki penyelesaian sebagai berikut:

Misalkan $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ $Z = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}$ $\rho = \left(\frac{8\mu E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} r_c$

dan $\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\left(\frac{-\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}$

Maka persamaan (2.1.8) tereduksi menjadi:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right)R = 0 \qquad (3.3.1)$$

Solusi dari persamaan (3.3.1) akan diperoleh dengan menyelidiki solusi saat

$r_c \to \infty$ dan saat $r_c = 0$

Ketika $r_c \to \infty$ mengakibatkan $\rho \to \infty$ Persamaan (3.3.1) saat $\rho \to \infty$ menjadi:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{1}{4}R = 0 \qquad (3.3.2)$$

Solusi persamaan (3.3.2) adalah:

$$R = e^{+\frac{\rho}{2}} \qquad (3.3.3)$$

Sehingga diperoleh dua solusi yaitu $R = e^{\frac{\rho}{2}}$ dan $R = e^{-\frac{\rho}{2}}$ Namun solusi $R = e^{\frac{\rho}{2}}$ bukanlah solusi yang diharapkan karena solusi tersebut tidak akan menuju nol saat $\rho \to \infty$ sehingga tidak akan ditemukan suatu titik singular. Sehingga hanya ada solusi tunggal yang memenuhi yaitu:

$$R = e^{-\frac{\rho}{2}} \qquad (3.3.4)$$

dimana nilai dari solusi tersebut akan menuju nol saat $\rho \to \infty$

Untuk mendapatkan solusi persamaan (3.3.1) saat $r_c \to 0$ maka dimisalkan $U(\rho) = \rho R(\rho)$ sehingga persamaan (3.3.1) menjadi:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dU}{d\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}U+\left(\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}\right)U=0 \quad (3.3.5)$$

Ketika $r_c \to 0$ mengakibatkan $\rho \to \infty$. Persamaan (3.3.5) saat $\rho \to \infty$ menjadi:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dU}{d\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}U=0 \quad (3.3.6)$$

Jadi solusi persamaan (3.3.6) untuk $\rho \to 0$ adalah:

$$U=\rho^{\ell+1} \quad (3.3.7)$$

Karena $U(\rho)=\rho R(\rho)$ maka persamaan (3.3.7) menjadi:

$$R=\rho^{\ell} \quad (3.3.8)$$

Dengan menggabung dua solusi partikular dari persamaan (3.3.1) yaitu persamaan (3.3.4) dan (3.3.8) diperoleh solusi eksaknya yaitu:

$$R=\rho^{\ell}e^{-\frac{\rho}{2}}L(\rho) \quad (3.3.9)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.3.9) diperoleh persamaan untuk $L(\rho)$ sebagai berikut:

$$\rho\frac{d^2L}{d\rho^2}+[2\ell+2-\rho]\frac{dL}{d\rho}+[\lambda-\ell-1]L=0 \quad (3.3.10)$$

Persamaan (3.3.10) memberikan solusi berupa polinomial sebagai berikut:

$$L=\sum_{s=0}^{\infty}a_s\rho^s \quad (3.3.11)$$

Dengan rumus rekursi:

$$a_{s+1}=\frac{s+\ell+1+1}{(s+1)(s+2\ell+2)}a_s \quad (3.3.12)$$

Persamaan (3.3.10) dapat diselesaikan dengan menggunakan polinomial Laguerre terasosiasi L_q^p. Dan dengan menggunakan rumus Rodrigues persamaan (3.3.10) memiliki solusi sebagai berikut:

$$L_{n+\ell}^{2\ell+1}=\frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!}e^{\rho}\frac{d^{n+\ell}}{d\rho^{n+\ell}}\left(e^{-\rho}\rho^{n-\ell-1}\right) \quad (3.3.13)$$

Sehingga solusi radialnya dirumuskan sebagai:

$$R\equiv R_{n\ell}=N_{n\ell}\rho^{\ell}e^{-\frac{\rho}{2}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho) \quad (3.3.14)$$

dengan $N_{n\ell}$ adalah konstanta normalisasi:

$$N_{n\ell}=\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{(n+\ell)!}} \quad (3.3.15)$$

Sehingga solusi umum dari persamaan radial yaitu:

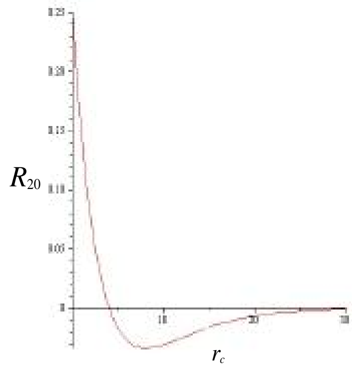
$$R_{n\ell}=\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_c}{na_c}\right]^{\ell}e^{-\frac{\left[\frac{2Zr_c}{na_c}\right]}{2}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_c}{na_c}\right)$$

(3.3.16)

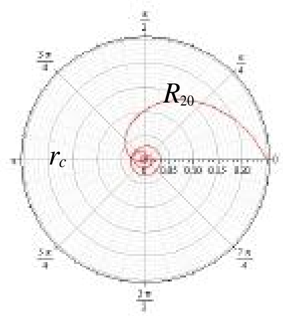
dengan,

$$a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu} \quad (3.3.17)$$

Sebagai contoh kasus, misal diberikan jika nilai n=2, $\ell=0$ dengan $R_{n\ell}$ – r_c maka akan diperoleh grafik sebagai berikut:



Grafik 3.3 Solusi dari R_{20}



Grafik. 3.3.1 Solusi dari R_{20} dalam koordinat polar

Grafik 3.3 dan grafik 3.3.1 menunjukkan terjadinya pengurangan jari-jari bohr terhadap penambahan komponen radiusnya. Komponen radiusnya akan semakin menurun seiring penambahan nilai r_c. Namun setelah mencapai nilai ekstrim tertentu, komponen radialnya akan mengalami kenaikan saat diberikan penambahan nilai r_c hingga mendekati nol.

3.4 Solusi Gabungan

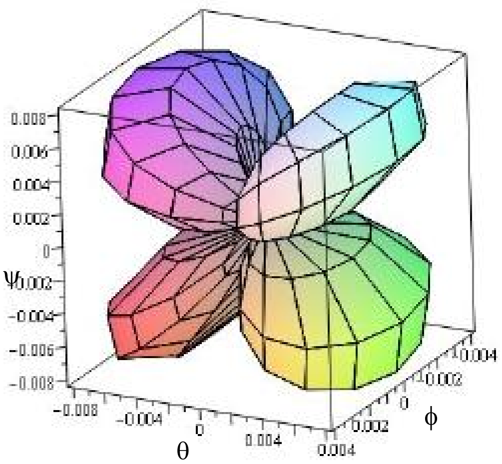
Solusi persamaan Schrödinger diperoleh dengan menggabungkan solusi azimuth, angular dan radial, sehingga diperoleh solusi berikut:

$$\psi(r_c,\theta,\phi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im_l\phi}\sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_l)!}{2(\ell+m_l)!}}.$$

$$P_\ell^{m_\ell}(\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_c}{na_0}\right]^\ell e^{\frac{\left[\frac{Zr_c}{na_0}\right]}{2}} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_c}{na_0}\right)$$

Sebagai studi kasus, diberikan solusi parsial dari persamaan Schrödinger yaitu persamaan azimut Φ_2, dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (*m_l*) sama dengan dua. Solusi angular Θ_{11}, dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (*m_l*) sama dengan satu dan bilngan kuantum angular (ℓ) sama dengan satu. Serta solusi radial R_{10} dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum angular (ℓ) sama dengan nol dan n =1. Sehingga dari solusi parsial tersebut diperoleh solusi persamaan $\psi(r_c,\theta,\phi) = \Phi_2.\,\Theta_{11}.R_{10}$.

Misal diberikan r_c = 1, sedangkan θ berada pada rentang $0 \le \theta \le 2\pi$ dan ϕ berada pada rentang $0 \le \phi \le 2\pi$, maka grafik solusi persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual adalah sebagai berikut:



Grafik 3.4 Solusi dari $\psi(r_c,\theta,\phi)$ dengan r_c =1

Grafik 3.4 menunjukkan respon solusi sudut ketika $0 \le \theta \le 2\pi$ dan $0 \le \phi \le 2\pi$. Berdasarkan grafik 3.4 diketahui bahwa elektron bergerak secara periodik dalam dimensi tiga dengan r_c=1 dan komponen radialnya sesuai dengan grafik R_{10}, serta sesuai dengan nilai θ dan ϕ tertentu diantara rentang 0 sampai 2π .

3.5 Energi Yang Dihasilkan Dari Dua Atom Hidrogen Dengan Gaya Tarik Mutual

Setelah diperoleh solusi persamaan Schrödinger dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual, maka akan dirumuskan persamaan energi yang dihasilkan dari dua atom hidrogen dengan gaya tarik mutual, sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$F = \frac{1}{\psi}\left\{-\left[\frac{\hbar^2}{2m_1}+\frac{\hbar^2}{2m_2}\right]\nabla^2 - \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\right\}\psi \qquad (3.5.1)$$

dengan,

$$\psi(r_c,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,e^{im_\ell\phi}\sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_\ell)!}{2(\ell+m_\ell)!}}\,.$$

$$P_\ell^{m_\ell}(\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_c}{na_0}\right]^\ell e^{\frac{\left[\frac{Zr_c}{na_0}\right]}{2}} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_c}{na_0}\right)$$

dan,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r_c^2}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial}{\partial r_c}\right) + \frac{1}{r_c^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r_c^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Diketahui bahwa:

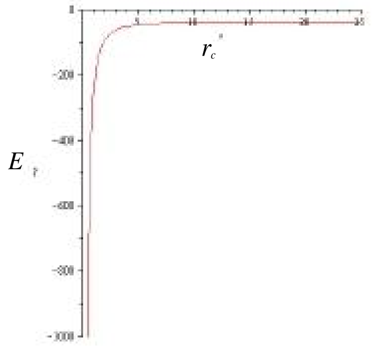
$\hbar \approx 6{,}6 \times 10\text{-}16$ eV·s

$m_1 = m_2$ = 1,00794 amu

$\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m

Sebagai studi kasus, diberikan solusi parsial dari persamaan Schrödinger yaitu persamaan azimut Φ_2 dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (*m_l*) sama dengan dua. Solusi angular Θ_{11} dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum magnetik (*m_l*) sama dengan satu dan bilngan kuantum angular (ℓ) sama dengan satu. Serta solusi radial R_{10} dimana solusi tersebut memuat bilangan kuantum angular (ℓ) sama dengan nol dan n =1. Sehingga dari solusi parsial tersebut diperoleh solusi persamaan $\psi(r_c,\theta,\phi) = \Phi_2\,\Theta_{11}.R_{10}$. Dan misal diberikan nilai $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\phi = \frac{1}{4}\pi$ dan r_c=1 maka diperoleh nilai *E*= -119, 29 *eV*.

Namun jika nilai r_c berubah dalam rentang $0 \le r_c \le 25$, maka diperoleh diagram tingkat energi sebagai berikut:



Grafik 3.5 Diagram Tingkat Energi Dua Atom Hidrogen Dengan Gaya Tarik Mutual

Pada persamaan (3.5.1) nilai E merepresentasikan jumlah energi kinetik dan energi potesial dari dua atom hidrogen yang bereaksi. Pada grafik 3.5 terlihat bahwa semakin besar koordinat pusat masanya (r_c), maka semakin besar pula tingkat energinya. Dan sebaliknya, semakin kecil nilai r_c maka semakin kecil pula tingkat energinya. Hal ini disebabkan oleh semakin kecil r_c, maka elektron tersebut semakin dekat dengan inti atom. Energi tersebut bernilai negatif, hal ini menyatakan bahwa elektron berada dalam keadaan terikat dengan proton. Harga energi yang positif berhubungan dengan atom yang berada dalam keadaan terionisasi yaitu ketika elektron tidak lagi terikat, tetapi dalam keadaan tersebar.

4. SIMPULAN

Persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen yang bergaya tarik mutual adalah:

$$\left\{-\left[\frac{\hbar^2}{2m_1}+\frac{\hbar^2}{2m_2}\right]\nabla^2-\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\right\}\psi=E\psi$$

dengan

$$\nabla^2=\frac{1}{r_c^2}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial}{\partial r_c}\right)+\frac{1}{r_c^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r_c^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Setelah dilakukan pemisahan peubah persamaan Schrödinger terbagi menjadi tiga persamaan yaitu:

1. Persamaan Azimut:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m_l^2$$

Solusinya : $\Phi_{m_l}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im_l\phi}$

2. Persamaan Angular :

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\ell(\ell+1)\sin^2\theta=m_l^2$$

Solusinya :

$$\Theta_{\ell m_l}(\theta)=\sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_l)!}{2(\ell+m_l)!}}P_\ell^{m_l}(\cos\theta)$$

dengan,

$$P_\ell^{m_l}(\cos\theta)=\frac{1}{2^\ell \ell!}(1-\cos^2\theta)^{\frac{m_l}{2}}$$

$$\frac{d^{\ell+m_l}}{d\cos^{\ell+m_l}\theta}(\cos^2\theta-1)^\ell$$

3. Persamaan Radial :

$$\frac{d}{dr_c}\left(r_c^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\left(\frac{-2m_1m_2r_c^2}{(m_1+m_2)\hbar^2}\right)\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_c}\right)R=\ell(\ell+1)R$$

Solusinya:

$$R_{n\ell}=\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_c}{na_0}\right]^\ell e^{-\frac{\left[\frac{2Zr_c}{na_0}\right]}{2}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_c}{na_0}\right)$$

Dengan: $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, $Z=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}$ $\rho=\left(\frac{8\mu E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}r_c$

dan $\lambda=\frac{Ze^2}{\hbar}\left(\frac{-\mu}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}$

Sehingga solusi dari persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen yang bergaya tarik mutual adalah:

$$\psi(r_c,\theta,\phi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im_l\phi}\sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell+m_l)!}{2(\ell+m_l)!}}P_\ell^{m_l}(\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\left[\frac{2Zr_c}{na_0}\right]^\ell e^{\frac{\left[\frac{Zr_c}{na_0}\right]}{2}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Zr_c}{na_0}\right)$$

Solusi persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen yang bergaya tarik mutual tersebut menggambarkan perilaku elektron dari dua atom hidrogen yang saling bertumbukan dan menghasilkan atom hidrogen berat yang disebut dengan deuterium ($^2H_1$), yang mana pada persamaan persamaan Schrödinger untuk dua atom hidrogen yang bergaya tarik mutual tersebut dianggap sebagai pusat masa baru yang berpengaruh terhadap pergerakan elekton.

Energi yang dihasilkan dirumuskan sebagai berikut:

$$E = \frac{1}{\psi}\left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2}{2m_2}\right]\nabla^2 - \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\right\}\psi$$

Nilai E merepresentasikan jumlah energi kinetik dan energi potesial dari dua atom hidrogen yang bereaksi. Semakin besar koordinat pusat masanya (r_c), maka semakin besar pula tingkat energinya. Dan sebaliknya, semakin kecil nilai r_c maka semakin kecil pula tingkat energinya. Hal ini disebabkan oleh semakin kecil r_c, maka elektron tersebut semakin dekat dengan inti atom. Energi tersebut bernilai negatif, hal ini menyatakan bahwa elektron berada dalam keadaan terikat dengan proton. Harga energi yang positif berhubungan dengan atom yang berada dalam keadaan terionisasi yaitu ketika elektron tidak lagi terikat, tetapi dalam keadaan tersebar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anggono, Tri 2011 Hidrogen [Online]. Termuat di:
http://www.scribd.com/../HIDROGEN-DAN-UNSUR-LAINNYA . [Diakses: 15 September 2012]

[2] Aprilia, Annisa 2010 Persamaan Gelombang Schrödinger [Online]. Termuat di:
http://blogs.phys.unpad.ac.id/ [Diakses: 20 September 2012]

[3] Arya, Atam P. 1966 Fundamentals Of Nuclear Physics. Boston: Allyn And Bacon, Inc.

[4] Atmojo, Susilo Tri 2011 Persamaan Schrödinger [Online]. Termuat di:
http://chemistry35.blogspot.com/. [Diakses: tanggal 2 September 2012]

[5] Bell, W.W 1968 SPECIAL FUNCTION FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS. London: D. Van Nostrand Company, Ltd

[6] Britannica 2011 Thermonuclear Bomb [Online]. Termuat di:
http://www.britannica.com/ [Diakses: 23 Desember 2012]

[7] Beiser, Arthur 2003 Concept of Modern Physics, Sixth Edition. USA : The McGraw Hill Company, Inc.

[8] Gallas, Jason 2011 Hidrogen [Online]. Termuat di:
http://www.if.ufrgs.br/. [Diakses: 15 September 2012]

[9] Institut Teknologi Bandung 2010 Persamaan Scrodinger [Online]. Termuat di:
http://www.biomed.ee.itb.ac.id/. [Diakses pada tanggal 22 September 2012]

[10] Institut Teknologi Bandung 2010 Aplikasi Persamaan Schrodiger Pada Atom dengan Satu Elektron [Online]. Termuat di:
http://www.biomed.ee.itb.ac.id/. [Diakses: 22 September 2012]

[11] Meyerhof, Walter E 1967 Element Of Nuclear Physisc. USA : The McGraw Hill Company, Inc.

[12] Susanto, Asmi 2010 Bom hidrogen dengan Kekuatan Ledak yang Dasyat [Online]. Termuat di:
http://www.fisikanet.lipi.go.id/. [Diakses: 15 September 2012]

[13] Tao, Terence 2006 The Scrodinger Equation [Online]. Termuat di:
http://www.math.ucla.edu/
[Diakses: 20 September 2012]