EKSISTENSI SOLUSI LOKAL DAN KETUNGGALAN SOLUSI MASALAH NILAI AWAL PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN

Muhammad Abdulloh Mahin
Manuharawati
Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam dan Matematika,
Universitas Negeri Surabaya
muhammad2104@gmail.com

ABSTRAK

Pada makalah ini dibuktikan teorema eksistensi solusi lokal persamaan diferensial tundaan $x'(t) = F(t, x_t)$ dengan nilai awal $x = \varphi(t - t_0)$, dimana fungsional

$F : [t_0, \alpha) \times C([-r, 0], D) \to \mathbb{R}^n$

memenuhi kondisi Lipschitz lokal pada domainnya. Pada proses pembuktian teorema eksistensi solusi lokal persamaan diferensial tundaan menggunakan teorema titik tetap Banach. Selanjutnya, dibuktikan juga ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan dengan nilai awal tersebut menggunakan teorema Gronwall yang tergeneralisasi.

Katakunci : Eksistensi solusi lokal, ketunggalan, Kondisi Lipschitz, Persamaan diferensial tundaan, ruang Banach.

1 PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan variabel – variabel tak bebas dan derivatif – derivatifnya terhadap variabel – variabel bebas [1]. Persamaan diferensial terus berkembang sehingga diklasifikasikan menjadi beberapa jenis di antaranya, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, sistem persamaan diferensial, persamaan diferensial linier dan nonlinier, dan persamaan diferensial orde-n. Beberapa jenis persamaan diferensial di atas adalah kasus khusus dari persamaan diferensial fungsional yang didefinisikan sebagai berikut.

Diberikan $r \in \mathbb{R}$ dimana $r > 0$ dan $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ adalah ruang fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$ yang memetakan interval $[-r, 0]$ ke $\mathbb{R}^n$ dengan topologi yang diinduksi oleh fungsi jarak yang disebut norma. Norma dari elemen φ pada $\mathcal{C}$ dinotasikan $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(\theta)\| : -r \leq \theta \leq 0\}$ dengan $\|\varphi(\theta)\|$ adalah norma Euclide pada $\mathbb{R}^n$. Dengan norma tersebut $\mathcal{C}$ adalah ruang Banach [3]. Selanjutnya, diberikan $t \in \mathbb{R}$, $x \in C([t - r, t], \mathbb{R}^n)$ dan didefinisikan fungsi baru $x_t : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ dengan $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, untuk $-r \leq \theta \leq 0$, dan persamaan diferensial fungsional didefinisikan dengan $x'(t) = F(t, x_t)$, dimana $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ untuk $\mathcal{C}_D = C([-r, 0], D)$, $J \subset \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Persamaan diferensial digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial, sehingga muncul perkembangan konsep pada persamaan diferensial itu sendiri karena permasalahan – permasalahan yang muncul semakin bervariasi. Persamaan diferensial banyak membantu merepresentasikan bagaimana proses alam pada bidang biologi, pengobatan, dll., yang mana melibatkan tundaan waktu secara alami dari semua proses tersebut. Ketika tundaan waktu tersebut diabaikan sama halnya mengabaikan unsur nyata dari proses alami tersebut. Persamaan diferensial tundaan muncul sekitar tahun 1920 ketika Vito Volterra mengaplikasikan persamaan diferensial pada model mangsa – pemangsa (*predator – prey model*) pada populasi parasit dengan tundaan waktu yaitu waktu yang diperlukan parasit untuk menginfeksi inangnya. Akan tetapi persamaan diferensial tundaan kurang menjadi perhatian untuk dipelajarai sampai sekitar setengah abad kemudian, pada tahun 1963, Bellman dan Cooke mengarang buku *Differential – Difference Equations* dan buku tersebut diakui buku formal untuk mempelajari persamaan diferensial tundaan. Setelah itu, Matematikawan lainnya, yaitu Jack Hale mempelajari persamaan diferensial tundaan lebih dalam dan kemudian sebelum tahun 1991, bersama Verduyn Lunel, Hale menulis buku teks pengantar persamaan diferensial tundaan [2]. Persamaan diferensial tundaan merupakan kasus khusus dari persamaan diferensial fungsional yang dinotasikan $x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau)\big)$ untuk $0 \leq \tau \leq r$.

Pada suatu permasalahan pasti tidak pernah lepas dari pertanyaan. Oleh karena itu pertanyaan dalam tulisan ini adalah adakah solusi dari permasalahan tersebut, dan jika ada bagaimana sifat solusi permasalahan tersebut. Berdasarkan pertanyaan tersebut pada makalah ini penulis mengkaji tentang eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan berikut dengan simulasi suatu permasalahan persamaan diferensial tundaan sederhana. Metode yang digunakan penulis pada makalah ini adalah metode studi pustaka. Referensi utama penulis adalah dua buku yang berjudul "*Ordinary and*

Delay Differential Equations" oleh R. D. Driver dan "*Introduction to Delay Differential Equations*" oleh Sue Ann Campbell. Dengan metode tersebut penulis ingin mengkaji tentang eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan pada masalah nilai awal yang diberikan dengan menggunakan metode iterasi Charles Emile Picard yang mana teorema titik tetap Stefan Banach (*Stefan Banach's fixed point theorem*) memiliki peran penting dalam proses pembuktian. Dengan begitu ada yang menjamin eksistensi solusi lokal yaitu solusi pada interval yang lebih kecil dari domain yang sebenarnya dan ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan untuk suatu masalah nilai awalnya.

2 DEFINISI DAN KONSEP DASAR

Diberikan sebarang bilangan real $r > 0$, misalkan himpunan $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ dengan $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(\theta)\| : -r \leq \theta \leq 0\}$ untuk setiap $\varphi \in \mathcal{C}$, $\|\varphi(\theta)\|$ adalah norma euclide pada $\mathbb{R}^n$. Himpunan $\mathcal{C}$ yang dilengkapi dengan norma euclide ini adalah ruang banach untuk $[a, b] = [-r, 0]$. Selanjutnya, untuk $D \subseteq \mathbb{R}^n$ didefinisikan himpunan $\mathcal{C}_D = C([-r, 0], D)$.

Definisi 1. Diberikan $t, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, dan $x \in C([t-r, t], \mathbb{R}^n)$, maka didefinisikan fungsi baru $x_t \in \mathcal{C}$ dengan

$x_t(\theta) = x(t + \theta)$
untuk $-r \leq \theta \leq 0$.

Definisi 2. Persamaan diferensial tundaan pada $J \times \mathcal{C}_D$ dimana $J \subseteq \mathbb{R}$ adalah persamaan berbentuk

$$x'(t) = F(t, x_t) \qquad (1)$$

Untuk suatu $x \in C([t-r, t], \mathbb{R}^n)$, $x_t \in \mathcal{C}$, dimana $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$. Untuk selanjutnya notasi "$\times$" adalah notasi pasangan terurut t dan x_t dari fungsional F.

Fungsi $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$, setiap $(t, x_t) \in J \times \mathcal{C}_D$ disebut sebagai fungsional. oleh karena itu persamaan (1) disebut sebagai persamaan diferensial fungsional. Persamaan (1) adalah acuan untuk membahas persamaan diferensial tundaan untuk menekankan fakta bahwa hanya nilai sekarang dan lampau dari x yang terlibat dalam menentukan $x'(t)$.

3 MASALAH NILAI AWAL DAN LEMMA –LEMMA PENTING

Pembahasan eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan pada bab ini menggunakan masalah nilai awal persamaan diferensial tundaan. Berikut ini definisi – definisi solusi persamaan diferensial tundaan dan nilai awalnya.

Definisi 3. Fungsi x adalah solusi dari persamaan (1) jika ada $\beta, t_0 \in \mathbb{R}$ dan $\beta > t_0$ sedemikian hinga,

(i) $x \in C([t_0 - r, \beta), D)$ untuk $r > 0$.

(ii) $[t_0, \beta) \subset J$ dimana $J \subseteq \mathbb{R}$..

(iii) x memenuhi (1) untuk $t \in [t_0, \beta)$.

Selanjutnya untuk suatu $t_0 \in \mathbb{R}$ dan $\varphi_0 \in \mathcal{C}_D$ yang diberikan, masalah nilai awal yang terkait dengan persamaan diferensial tundaan (1) adalah

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi_0 \end{cases} \qquad (2)$$

atau

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x = \varphi(t - t_0), & t_0 - r \leq t \leq t_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Definisi 4. Suatu persamaan linier pada $J = (\alpha, \beta)$ adalah persamaan berbentuk $L(t, x) = h(t)$ dimana h suatu fungsi yang diberikan dan $L(t, \cdot)$ operator linier untuk setiap $t \in J$, yaitu $L(t, c_1 y + c_2 z) = c_1 L(t, y) + c_2 L(t, z)$ dimana y dan z adalah suatu fungsi yang memenuhi $L(t, \cdot)$, sedangkan c_1 dan c_2 adalah bilangan real.
Perlu diketahui bahwa, jika
$F(t, \varphi_0) = L(t, \varphi_0) + h(t)$
dimana L adalah operator linier dalam φ_0 untuk semua t maka (3) adalah persamaan diferensial tundaan linier dan persamaan (3) dikatakan persamaan diferensial tundaan homogen jika $h \equiv 0$.

Definisi 5 Fungsi x adalah solusi dari masalah nilai awal persamaan (2) atau (3)pada $[t_0 - r, \beta)$ jika x adalah solusi dari persamaan (1) pada $[t_0 - r, \beta)$ dan $x_{t_0} = \varphi_0$.

Lemma – lemma berikut akan digunakan untuk membahas eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan dengan suatu nilai awal.

Lemma 1. Diberikan bilangan real t_0, r, γ dan $x \in C([t_0 - r, t], \mathbb{R}^n)$. Jika x kontinu pada $[t_0 - r, t_0 + \gamma]$ maka x_t kontinu di t untuk setiap $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$.

Bukti : Karena x kontinu pada interval tertutup dan terbatas $[t_0 - r, t_0 + \gamma]$, maka x kontinu seragam pada $[t_0 - r, t_0 + \gamma]$. Oleh karena itu, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ada $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ sedemikian hingga,

$\forall s,t \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]$, $|t - s| < \delta$ berlaku $\|x(t) - x(s)\| < \varepsilon$. Karena $[t_0, t_0 + \gamma] \subset [t_0 - r, t_0 + \gamma]$ dan x kontinu seragam pada $[t_0 - r, t_0 + \gamma]$ sehingga untuk $s,t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, $|t - s| < \delta$ berlaku $\|x(t + \theta) - x(s + \theta)\| < \varepsilon$, untuk setiap $\theta \in [-r, 0]$. Berdasarkan definisi x_t sehingga x_t kontinu pada t untuk setiap bilangan real $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$.■

Lemma 2. Diberikan $t_0 \in J$ dimana $J \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathcal{C}_D$ dan fungsional $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ kontinu. Misalkan $r, \beta \in \mathbb{R}, r > 0$. Fungsi x adalah solusi masalah nilai awal (3) pada $[t_0 - r, \beta)$ jika dan hanya jika $[t_0, \beta) \subset J$, $x \in C([t_0 - r, \beta), D)$ dan fungsi x memenuhi

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds & , t_0 \leq t < \beta \\ x_{t_0} = \varphi_0. & , \varphi_0 \in \mathcal{C}_D \end{cases} \quad (4)$$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Misalkan x adalah solusi masalah nilai awal (3) pada $[t_0 - r, \beta)$. Berdasarkan Definisi 3, maka diketahui bahwa $[t_0, \beta) \subset [t_0 - r, \beta)$ dan fungsi $x \in C([t_0 - r, \beta), D)$. Oleh karena itu untuk setiap $t \in [t_0, \beta)$ berlaku

$$\int_{t_0}^{t} x'(s) = \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds. \quad (5)$$

Karena x kontinu pada $[t_0 - r, \beta)$ maka persamaan (5) kontinu pada $[t_0 - r, \beta)$ dan berdasarkan Lemma 1 diperoleh $x(t_0) = x_{t_0} = \varphi_0$ kontinu pada t untuk $t \in [t_0, \beta)$. Persamaan (5) adalah persamaan integral dengan $t \geq t_0$ yang diminta, dengan kata lain x juga memenuhi persamaan (5).

$(\Leftarrow)$ Misalkan $[t_0, \beta) \subset J$, $x \in C([t_0 - r, \beta), \mathbb{R}^n)$, dan x memenuhi (4) sehingga berlaku

$$x = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds.$$

Karena $x \in C([t_0 - r, \beta), \mathbb{R}^n)$ dan berdasarkan *Fundamental Theorem of Calculus* sehingga diperoleh $x'(t) = F(t, x_t)$, dengan $x(t_0) = x_{t_0} = \varphi_0$ sehingga x juga solusi masalah nilai awal (3). ■

Definisi 6. Fungsional $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ dengan $J \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan Lipschitz pada $\mathcal{E} \subset J \times \mathcal{C}_D$ jika ada $K \in \mathbb{R}, K > 0$ sedemikian hingga

$$\|F(t, \psi) - F(t, \breve{\psi})\| \leq K \|\psi - \breve{\psi}\|_r$$

untuk setiap (t, ψ) dan $(t, \breve{\psi}) \in \mathcal{E}$.

Definisi 7. Fungsional $F : J \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ dengan $J \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan Lipschitz lokal (*locally Lipschitz*) pada $J \times \mathcal{C}_D$ jika untuk setiap $(\acute{t}, \acute{\psi}) \in J \times \mathcal{C}_D$ ada bilangan real $a > 0$ dan $b > 0$ sedemikian hingga

$$\mathcal{E} \equiv ([\acute{t} - a, \acute{t} + a] \cap J) \times \{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi - \acute{\psi}\|_r \leq b\}$$

adalah himpunan bagian dari $J \times \mathcal{C}_D$ dan F Lipschitz pada $\mathcal{E}$.

Lemma berikut ini adalah perluasan dari Lemma Gronwall (*Generalized Gronwall's*) atau Lemma Gronwall versi Reid yang akan digunakan pada pembuktian ketunggalan solusi persamaan diferensial tundaan.

Lemma 3 (*Reid's Lemma*). Diberikan konstanta $C \in \mathbb{R}$ dan fungsi kontinu tidak negatif k pada interval $J \subset \mathbb{R}$. Misalkan $t_0 \in J$. Jika untuk setiap $t \in J$ fungsi kontinu $v : J \to [0, \infty)$ berlaku

$$v(t) \leq C + \left\| \int_{t_0}^{t} k(s) v(s)\, ds \right\| \quad (6)$$

maka

$v(t) \leq C e^{\left\| \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \right\|}$

untuk semua $t \in J$.

Bukti : Misalkan $t \geq t_0$ dan $t \in J$. Kedua sisi (6) dikalikan dengan fungsi kontinu tidak negatif k diperoleh

$$k(t)v(t) - k(t) \left| C + \int_{t_0}^{t} k(s) v(s)\, ds \right| \leq 0.$$

Misalkan $Q(t) \equiv C + \int_{t_0}^{t} k(s) v(s)\, ds$, maka $Q'(t) - k(t) Q(t) \leq 0$. Kemudian jika pertidaksamaan $Q'(t) - k(t) Q(t) \leq 0$ dikalikan dengan faktor integrasi $e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} > 0$ diperoleh

$$e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q(t) \leq 0. \quad (7)$$

Berdasarkan aturan perkalian dari dua fungsi terdiferensialkan dan (7) diperoleh

$$\frac{d \left[e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q(t) \right]}{dt} \leq 0. \quad (8)$$

Mengintegralkan (8) dari t_0 ke t dan ingat bahwa $Q(t_0) = C$, didapatkan

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d \left[e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q(u) \right]}{du} \leq 0$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} Q(t_0) \leq 0.$$

Sehingga menghasilkan $Q(t) e^{-\int_{t_0}^{t} k(s) ds} - C \leq 0$ dan berdasarkan (6) diperoleh

$$v(t) \leq Q(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} k(s) ds}.$$

Selanjutnya, untuk kasus $t < t_0$ dan $t \in J$. Dengan cara yang sama untuk proses pembuktian kasus $t \geq t_0$, kedua sisi (6) dikalikan dengan fungsi kontinu non – negatif k diperoleh,

$$k(t)v(t) - k(t)C + \int_t^{t_0} k(s)v(s)\, ds \leq 0. \quad (9)$$

Perhatikan bahwa dengan menggantikan batas integral untuk $t \geq t_0$ dengan $t < t_0$ pada pertidaksamaan (9) diperoleh

$v(t) \leq Q(t) \leq Ce^{\int_t^{t_0} k(s)ds}$. ■

4 EKSISTENSI SOLUSI LOKAL

Pada pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa, mengkonstruksi himpunan baru yang termuat pada domain fungsional F pada persamaan diferensial biasa sehingga F Lipschitz diperlukan, karena tujuan pembuktiannya adalah menunjukkan bahwa solusi persamaan diferensial biasa hanya ada pada himpunan baru tersebut, dengan kata lain solusinya tidak terdefinisi pada semua domain dari fungsional F pada persamaan diferensial biasa tersebut.

Teorema eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa dan pembuktiannya telah dibahas pada buku teks [4].

Perbedaan dari teorema eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa $y'(t) = F\big(t, x(t)\big)$ dan persamaan diferensial tundaan $x'(t) = F(t, x_t)$ terletak pada definisi masalah nilai awalnya. Pada persamaan diferensial biasa, nilai awalnya terdefinisi pada domain yang sama dengan domain dari fungsionalnya. Sedangkan pada persamaan diferensial tundaan, nilai awalnya didefinisikan pada domain yang berbeda dari fungsionalnya. Karena adanya perbedaan tersebut, pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial tundaan ada sedikit modifikasi di awal pembuktian dan secara garis besar proses selanjutnya memiliki ide yang sama dengan pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa. Perbedaan pembuktian ini secara spesifik terletak pada saat mendefinisikan fungsi kontinu yang memenuhi F pada interval (tertutup dan terbatas) yang lampau sedemikian hingga fungsional F terbatas dan pada saat membentuk batas dari fungsional F pada suatu himpunan yang memenuhi.

Teorema 1. (Eksistensi Solusi Lokal) Diberikan sebarang bilangan real t_0, α, dan
$F : [t_0, \alpha) \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$.
Jika F kontinu dan Lipschitz lokal pada domainnya, maka untuk setiap $\varphi_0 \in \mathcal{C}_D$, masalah nilai awal (3) memiliki solusi pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta)$ untuk suatu $\Delta \in \mathbb{R}, \Delta > 0$.

Bukti : Karena F Lipschitz lokal, terlebih dahulu didefinisikan himpunan $\mathcal{E} \subset J \times \mathcal{C}_D$ sedemikian hingga F Lipschitz pada $\mathcal{E}$. Berdasarkan definisi fungsi Lipschitz, pilih sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, dan $b > 0$ sedemikian hingga

$$\mathcal{E} \equiv [t_0, t_0 + a] \times \{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi - \varphi_0\|_r \leq b\}$$

adalah himpunan bagian dari $[t_0, \alpha) \times \mathcal{C}_D$ dan F Lipschitz pada $\mathcal{E}$ dengan konstanta Lipschitz K.

Selanjutnya, pendefinisian fungsi kontinu berikut ini pada pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa tidak diperlukan, karena pada persamaan diferensial biasa semua t memiliki argumen yang sama sehingga pembuktiannya langsung membentuk suatu batas untuk F pada suatu himpunan yang memenuhi F. Sedangkan pada definisi fungsi kontinu berikut, mendefinisikan fungsi kontinu pada t yang lampau atau $t - r$ untuk sebarang $t \in \mathbb{R}$ dan $r \in \mathbb{R}, r > 0$ sehingga pembentukan batas dari fungsional F selanjutnya melibatkan fungsi kontinu pada t lampau ini dan juga t sekarang (t itu sendiri), yaitu untuk $r = 0$.

Didefinisikan fungsi kontinu
$\bar{x} : [t_0 - r, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$
dengan

$$\bar{x} = \begin{cases} \varphi_0(t - t_0) & , t_0 - r \leq t \leq t_0 \\ \varphi_0(0) & , t_0 < t \leq t_0 + a \end{cases}$$

sehingga $F(t, \bar{x}_t)$ bergantung secara kontinu pada t karena $\bar{x}$ kontinu. Oleh karena itu ada konstanta $B_1 \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $F(t, \bar{x}_t) \leq B_1$ pada $[t_0, t_0 + a]$.

Untuk suatu $B, K \in \mathbb{R}$ didefinisikan $B = Kb + B_1$. Dipilih $a_1 \in (0, a]$ sedemikian hingga
$\|\bar{x}_t - \varphi_0\|_r = \|\bar{x}_t - \bar{x}_{t_0}\|_r \leq b,$
untuk $t_0 \leq t \leq t_0 + a_1$.

Dari titik ini dan seterusnya, pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial tundaan secara garis besar memiliki ide yang sama dengan pembuktian eksistensi solusi lokal persamaan diferensial biasa pada buku teks *ordinary and delay differential equations.*

Dipilih $\Delta > 0$ sedemikian hingga
$\Delta \leq \min\{a_1, b/B\}$.

Misalkan S himpunan semua fungsi kontinu $x : [t_0 - r, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga $x(t) = \varphi_0(t - t_0)$ untuk $t_0 - r \leq t \leq t_0$ dan $\|x(t) - \varphi_0(0)\|_r \leq b$ untuk $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta$. Perhatikan bahwa, jika $x \in S$ dan $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, maka $\|x_t - \bar{x}_t\|_r \leq b$ sedemikian hingga
$\|F(t, x_t)\| = \|F(t, x_t) - F(t, \bar{x}_t) + F(t, \bar{x}_t)\|$.
Berdasarkan pertidaksamaan segitiga, F Lipschitz, definisi B, dan pernyataan bahwa $\|F(t, \bar{x}_t)\| \leq B_1$ diperoleh $\|F(t, x_t)\| \leq K\|x_t - \bar{x}_t\|_r + B_1 \leq B$, untuk suatu konstanta Lipschitz K. Selanjutnya,

untuk setiap $x \in S$ didefinisikan fungsi T_x pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$ dengan

$$(T_x)(t) = \begin{cases} \varphi_0(t - t_0) & , t_0 - r \le t \le t_0 \\ \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\, ds & , t_0 \le t \le t_0 + \Delta. \end{cases}$$

Maka, karena $\|F(s, x_s)\| < B$,

$\|(T_x)(t) - \varphi_0(0)\| \le B\Delta \le b$ untuk $t_0 \le t \le t_0 + \Delta$.

Fungsi T_x adalah fungsi kontinu. jadi $T_x \in S$ dan $T : S \to S$.

Setelah membentuk himpunan S dimana $x, \bar{x} \in S$ dan mendefinisikan fungsi T_x, selanjutnya mengkonstruksi *successive approximations* sebagai berikut. Dipilih sebarang $x_{(0)} \in S$ dan kemudian dibentuk *successive approximations* berikut $x_{(1)} = T_{x_{(0)}}$, $x_{(2)} = T_{x_{(1)}}$, $x_{(3)} = T_{x_{(2)}}, \cdots$. Berdasarkan definisi dari T_x, *Successive approximations* dapat dituliskan sebagai berikut

$$x_{(0)} = \varphi_0(0)$$

$$x_{(1)} = T_{x_{(0)}} = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_{(0)s})\, ds$$

$$x_{(2)} = T_{x_{(1)}} = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_{(1)s})\, ds$$

.

.

.

$$x_{(l+1)} = T_{x_{(l)}} = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x_{(l)s})\, ds$$

dan untuk setiap $l \in 0,1,2, \ldots$, $x_{(l)}(t) = \varphi_0(t - t_0)$ pada $[t_0 - r, t_0]$. Misalkan $x_{(0)}, x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(l+1)}$ barisan fungsi $\left(x_{(l)}(t)\right)$.

Setelah mendefinisikan barisan fungsi $\left(x_{(l)}\right)$, selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\left(x_{(l)}\right)$ konvergen.

Dibentuk pengurangan dari dua barisan yang berurutan dari $\left(x_{(l)}(t)\right)$. dituliskan sebagai $\|x_{(l+1)}(t) - x_{(l)}(t)\|$ untuk $t_0 - r \le t \le t + \Delta$. Sehingga dapat diperoleh suatu relasi berulang $(recursive\ relation)$ dari pengurangan dua barisan $x_{(l+1)}$ dan barisan $x_{(l)}$. Untuk setiap $l \in 0,1,2, \ldots$ pada $t_0 \le t \le t_0 + \Delta$. Relasi berulang dari barisan $x_{(l+1)}$ dan barisan $x_{(l)}$ adalah sebagai berikut,

$$\|x_{(l+2)}(t) - x_{(l+1)}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [F(s, x_{(l+1)s}) - F(s, x_{(l)s})]\, ds \right\| \le \int_{t_0}^{t} K\|x_{(l+1)s} - x_{(l)s}\|\, ds. \quad (10)$$

Diketahui bahwa $x_{(1)}$ dan $x_{(0)}$ kontinu pada $t_0 - r \le t \le t_0 + \Delta$ sehingga ada $x_{(s)} \in \{x_{(l)}(t)\}$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned} \|x_{(1)}(t) - x_{(0)}(t)\| &= \|x_{(1)}(t) - x_{(s)}(t) + x_{(s)}(t) - x_{(0)}(t)\| \\ &\le \|x_{(1)}(t) - x_{(s)}(t)\| + \|x_{(s)}(t) - x_{(0)}(t)\| \\ &\le b + b = 2b \end{aligned}$$

pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$. Sehingga berlaku

$\|x_{(1)t} - x_{(0)t}\|_r \le 2b$

pada $[t_0, t_0 + \Delta]$ dan juga untuk $l = 0$ diperoleh,

$$\begin{aligned} \|x_{(1)}(t) - x_{(0)}(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_{(1)s}) - F(s, x_{(0)s})\|\, ds \\ &\le \int_{t_0}^{t} K\|x_{(1)s} - x_{(0)s}\|\, ds \\ &\le 2bK^0(t - t_0)^0 = 2b \end{aligned}$$

pada $[t_0, t_0 + \Delta]$, jadi diperoleh bahwa

$\|x_{(1)t} - x_{(0)t}\|_r \le 2b$

pada $[t_0, t_0 + \Delta]$. Untuk $l = 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned} \|x_{(2)}(t) - x_{(1)}(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_{(2)s}) - F(s, x_{(1)s})\|\, ds \\ &\le \int_{t_0}^{t} K\|x_{(2)s} - x_{(1)s}\|\, ds \\ &\le 2bK(t - t_0). \end{aligned}$$

Untuk $l = 2$ diperoleh,

$$\begin{aligned} \|x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|F(s, x_{(3)s}) - F(s, x_{(2)s})\|\, ds \\ &\le \int_{t_0}^{t} K\|x_{(3)s} - x_{(2)s}\|\, ds \\ &\le \frac{2b(K^2(t - t_0)^2)}{2!}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa pola dari perhitungan di atas dengan $l = 0, 1, 2$ adalah sebagai berikut,

$$\|x_{(l+1)}(t) - x_{(l)}(t)\| \le 2b\frac{K^l(t - t_0)^l}{l!} \quad (11)$$

pada $[t_0, t_0 + \Delta]$. Pertidaksamaan (11) dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika. Sudah ditunjukkan bahwa (11) memenuhi untuk $l = 0,1,2$. Selanjutnya menghitung pertidaksamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_{(l+2)}(t) - x_{(l+1)}(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} K\|x_{(l+1)s} - x_{(l)s}\|\, ds \\ &\le 2b\frac{K^{l+1}(t - t_0)^{l+1}}{(l+1)!}. \end{aligned}$$

Jadi terlihat bahwa perhitungan di atas hanya mengganti l dengan $l + 1$ sehingga melengkapi pembuktian (11) dengan menggunakan induksi matematika. Jadi terbukti bahwa barisan $x_{(l)}(t)$ konvergen pada $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Hal ini jika dikaitkan dengan $x_{(l+1)}(t) = x_{(l)}(t)$ pada $[t_0 - r, t_0]$ memberikan

$$\|x_{(l+1)}(t) - x_{(l)}(t)\| \le 2b\frac{K^l\Delta^l}{l!}$$

pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$. Perhatikan bahwa barisan $\left(x_{(l)}(t)\right)$ dapat direpresentasikan dalam bentuk penjumlahan parsial sebagai berikut,

$$\{x_{(l)}(t)\} = x_{(0)}(t) + \sum_{p=0}^{\infty}\left[x_{(p+1)}(t) - x_{(p)}(t)\right]. \quad (12)$$

Selanjutnya, berdasarkan *Weierstrass M – Test*, (12) konvergen seragam pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$, dimana

$$x_{(l)}(t) = x_{(0)}(t) + \sum_{p=0}^{l-1}\left[x_{(p+1)}(t) - x_{(p)}(t)\right],$$

sehingga barisan $\{x_{(l)}(t)\}$ konvergen seragam pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$.

Misalkan $x(t) = \lim_{t\to\infty} x_{(l)}(t)$ untuk $t_0 - r \le t \le t_0\Delta$. Jelaslah bahwa $x(t)$ kontinu pada $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$ dan $x_{t_0} = \varphi_0$. Lebih lanjut lagi bahwa $\|x(t) - x_{(l)}(t)\| \le 2b\sum_{p=l}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!}$ untuk $t_0 - r \le t \le t_0\Delta$ dan diperoleh

$$\|x_t - x_{(l)t}\|_r \le 2b\sum_{p=l}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!}$$

untuk $t_0 \le t \le t_0\Delta$. Jadi untuk $t_0 \le t \le t_0\Delta$ berlaku

$$\begin{aligned}\|x(t) - \varphi_0(0)\| &\le \|x(t) - x_{(l)}(t)\| + \|x_{(l)}(t) - \varphi_0(0)\| \\ &\le 2b\sum_{p=l}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!} + b \\ &\le b,\end{aligned}$$

dan $x_t \in \mathcal{C}_D$. Selanjutnya untuk $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$

$$\begin{aligned}&\left\|x(t) - \varphi_0(0) - \int_{t_0}^{t} F(s, x_s)\,ds\right\| \\ &\qquad \le 2b\sum_{p=l}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!} + K\Delta 2b\sum_{p=l-1}^{\infty}\frac{(K\Delta)^p}{p!} \quad (13)\end{aligned}$$

Dengan mengambil limit $l \to \infty$ pada (13) diperoleh

$$\left\|x(t) - \left(\varphi_0(0) - \int_{t_0}^{t} F(s,x_s)\,ds\right)\right\| = 0$$

Sehingga diperoleh

$$x(t) = \varphi_0(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,x_s)\,ds$$

Ini menyatakan bahwa $x(t)$ memenuhi (4) dan $x(t)$ adalah titik tetap dari T. ■

5 KETUNGGALAN SOLUSI

Pada pembahasan berikut ini akan dibahas ketunggalan solusi persamaan (3) dengan membuktikan teorema ketunggalan berikut ini.

Teorema 2. (Ketunggalan solusi). Diberikan bilangan real t_0, α, r, β, dan fungsional $F: [t_0, \alpha) \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$.
Jika F kontinu dan Lipschitz lokal pada domainnya, maka untuk sebarang $\varphi_0 \in \mathcal{C}_D$ dan $\beta \in (t_0, \alpha]$, ada solusi tunggal pada masalah nilai awal (3) pada $[t_0 - r, \beta)$.

Bukti : Andaikan ada dua solusi untuk suatu $\beta \in (t_0, \alpha]$ yaitu x dan $\bar{x}$ yang keduanya merupakan pemetaan $[t_0 - r, \beta)$ ke D dengan $x \ne \bar{x}$.

Misalkan $t_1 = \inf\{t \in (t_0, \beta) : x(t) \ne \bar{x}(t)\}$ maka $t_0 < t_1 < \beta$ dan $x(t) = \bar{x}(t)$ dimana $t_0 - r \le t \le t_1$.

Karena $(t_1, x_{t_1}) \in [t_0, \beta) \times \mathcal{C}_D$ dan F memenuhi Lipschitz lokal, maka ada $a > 0$ dan $b > 0$ sedemikian hingga himpunan

$$\mathcal{E} = [t_1, t_1 + a] \times \left\{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi - x_{t_1}\|_r \le b\right\}$$

berada di dalam $[t_0, \alpha) \times \mathcal{C}_D$ dan F Lipschitz pada $\mathcal{E}$ dengan konstan Lipschitz K.

Berdasarkan Lemma 1 ada $\delta \in (0, a]$ sedemikian hingga $(t, x_t) \in \mathcal{E}$ dan $(t, \bar{x}_t) \in \mathcal{E}$ untuk $t_1 \le t < t_1 + \delta$. Lebih jauh lagi x dan $\bar{x}$ solusi dari (3).
Jadi untuk $t_1 \le t < t_1 + \delta$, diperoleh

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t}[F(s,x_s) - F(s,\bar{x}_s)]\,ds\right\|.$$

Berdasarkan definisi t_1 dan F Lipschitz dengan konstanta Lipschitz K sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\|x(t) - \bar{x}(t)\| &\le \left\|\int_{t_1}^{t}[F(s,x_s) - F(s,\bar{x}_s)]\,ds\right\| \\ &\le \int_{t_1}^{t} K\|x_s - \bar{x}_s\|_r\,ds. \quad (14)\end{aligned}$$

Karena sisi kanan (14) adalah fungsi naik pada t dan karena
$\|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0$
untuk $t_1 - r \le t \le t_1$, maka untuk $t_1 \le t < t_1 + \delta$ diperoleh

$$\|x_t - \bar{x}_t\|_r \le \int_{t_1}^{t} K\|x_s - \bar{x}_s\|_r\,ds \quad (15)$$

Misalkan $v(t) = \|x_t - \bar{x}_t\|_r, C = 0$, $k(s) \equiv K$ pada pertidaksamaan (15). Dengan menggunakan *Generalized Gronwall's Lemma* atau *Reid's Lemma* diperoleh $v(t) = \|x_t - \bar{x}_t\|_r \le 0$. Sehingga $x(t) = \bar{x}(t)$ pada $[t_1, t_1 + \delta)$ dan ini bertentangan dengan definisi t_1. Sehingga benar bahwa solusi persamaan (3) tunggal. ■

6 APLIKASI

Setelah membahas eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi untuk suatu masalah nilai awal persamaan diferenisal tundaan, pada sub-bab ini akan dimunculkan permasalahan diferensial tundaan yang kemudian akan diperiksa eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi dengan suatu masalah nilai awal yang diberikan dengan menggunakan Teorema 1 dan Teorema 2.

Diberikan $\alpha, r, t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ dan diberikan $F : J \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ berbentuk $F(t, x_t) = \alpha x^2(t - r)$ untuk $t \ge 0$. Berikut ini adalah persamaan diferensial tundaan dengan nilai awal yang diberikan,

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x^2(t - r) & \text{, untuk } t \ge 0 \\ x(t) = \theta(t) & \text{,untuk} -r \le t \le 0. \end{cases} \quad (16)$$

Berdasarkan teorema eksistensi solusi lokal dan ketunggalan solusi, persamaan (16) dikatakan memiliki solusi lokal jika $F(t,x_t) = \alpha x^2(t-r)$ merupakan Lipschitz.

Misalkan $F(t,y_t) = \alpha y^2(t-r)$. Andaikan bahwa F Lipschitz, sehingga ada $\Delta_1 \in \mathbb{R}, \Delta_1 > 0$ sedemikian hingga berlaku

$$\Delta_1 \geq \frac{\|F(t,x_t) - F(t,y_t)\|}{\|x_t - y_t\|}, \forall((t,x_t),(t,y_t)) \in J \times \mathcal{C}. \quad (17)$$

Diberikan $t = a$, $x_t = n + 1/n$, $y_t = n$, dengan bilangan asli $n \geq 1$, sehingga

$$\frac{\|F(t,x_t) - F(t,y_t)\|}{\|x_t - y_t\|} = \frac{\left\|F\left(a,\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right) - F(a,n^2)\right\|}{\left|\left(n+\frac{1}{n}\right) - n\right|}$$

$$= \frac{\left\|F\left(a,\left(n^2+\frac{1}{n^2}+2\right)\right) - F(a,n^2)\right\|}{\left|\frac{1}{n}\right|}$$

$$= |n| \left\|F\left(a,\left(n^2+\frac{1}{n^2}+2\right)\right) - F(a,n^2)\right\| \quad (18)$$

Berdasarkan (17) dan (18) sehingga diperoleh

$$\Delta_1 \geq |n| \left\|F\left(a,\left(n^2+\frac{1}{n^2}+2\right)\right) - F(a,n^2)\right\| \quad (19)$$

Menyatakan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq 1, n \longrightarrow \infty$, tidak ada Δ_1 yang memenuhi (17) sehingga F bukan Lipschitz pada $J \times \mathcal{C}$. Akan tetapi, F mungkin memenuhi kondisi Lipschitz pada $I \times \mathcal{W} \subset J \times \mathcal{C}$ dimana $I \subset J$ tertutup dan terbatas, sedangkan himpunan $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$, akan diperiksa apakah F memenuhi kondisi Lipschitz pada suatu himpunan $I \times \mathcal{W}$.

Misalkan $\sigma, t, r, \alpha \in I$, $t - r = \sigma$, sehingga $F(\sigma, x_\sigma) = \alpha x^2(\sigma)$. Berdasarkan definisi turunan dari F di σ_0, maka

$$\frac{F(\sigma,x_\sigma) - F(\sigma,x_{\sigma_0})}{x_\sigma - x_{\sigma_0}} = \frac{\alpha x^2(\sigma) - \alpha x^2(\sigma_0)}{x(\sigma) - x(\sigma_0)} = \frac{\alpha[x^2(\sigma) - x^2(\sigma_0)]}{x(\sigma) - x(\sigma_0)}.$$

Misal $x(\sigma) = x(\sigma_0) + x(h)$, sehingga diperoleh

$$\frac{F(\sigma,x_\sigma) - F(\sigma,x_{\sigma_0})}{x_\sigma - x_{\sigma_0}} = \frac{\alpha\left[(x(\sigma_0) + x(h))^2 - x^2(\sigma_0)\right]}{x(\sigma_0) + x(h) - x(\sigma_0)}$$

$$= \alpha\left(x(h) + 2x(\sigma_0)\right).$$

Untuk $x(h) \longrightarrow 0$, diperoleh

$$\lim_{x(h)\to 0} \frac{F(\sigma,x_\sigma) - F(\sigma,x_{\sigma_0})}{x_\sigma - x_{\sigma_0}} = 2\alpha\, x(\sigma_0).$$

Jadi F kontinu dan terdiferensialkan pada σ_0. Misalkan $F'(\sigma, x_{\sigma_0}) = 2\alpha x(\sigma_0)$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\sigma_0 \in I$, $F'(\sigma, x_{\sigma_0})$ naik pada I. Misalkan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in I$ dan $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. Berdasarkan teorema nilai rata – rata dan untuk suatu $\beta, \gamma \in I$ yang memenuhi

$$\sigma_1 < \beta < \sigma_2 < \gamma < \sigma_3$$

sedemikian hingga :

$$F'(\sigma, x_\beta) = \frac{F(\sigma,x_{\sigma_2}) - F(\sigma,x_{\sigma_1})}{x_{\sigma_2} - x_{\sigma_1}}$$

dan

$$F'(\sigma, x_\gamma) = \frac{F(\sigma,x_{\sigma_3}) - F(\sigma,x_{\sigma_2})}{x_{\sigma_3} - x_{\sigma_2}}$$

oleh karena $F'(\sigma, x_{\sigma_0})$ naik diperoleh

$$F'(\sigma, x_\beta) \leq F'(\sigma, x_\gamma)$$

$$\frac{F(\sigma,x_{\sigma_2}) - F(\sigma,x_{\sigma_1})}{x_{\sigma_2} - x_{\sigma_1}} \leq \frac{F(\sigma,x_{\sigma_3}) - F(\sigma,x_{\sigma_2})}{x_{\sigma_3} - x_{\sigma_2}}$$

$$F(\sigma,x_{\sigma_2}) - F(\sigma,x_{\sigma_1}) \leq \frac{F(\sigma,x_{\sigma_3}) - F(\sigma,x_{\sigma_2})}{x_{\sigma_3} - x_{\sigma_2}} x_{\sigma_2} - x_{\sigma_1}.$$

Misalkan

$$\frac{F(\sigma,x_{\sigma_3}) - F(\sigma,x_{\sigma_2})}{x_{\sigma_3} - x_{\sigma_2}} = M,$$

Karena σ_2 dan σ_1 berlaku untuk sebarang pada I dan dengan menggunakan norma Euclide diperoleh $\|F(\sigma,x_{\sigma_2}) - F(\sigma,x_{\sigma_1})\| \leq M\|x_{\sigma_2} - x_{\sigma_1}\|$.

Akibatnya F adalah Lipschitz pada suatu $I \times \mathcal{W}$ atau F adalah Lipschitz lokal, sehingga Teorema 1 dan Teorema 2 berlaku untuk semua jenis permasalahan berbentuk (16).

7 KESIMPULAN

Diberikan $r > 0$ dan anggota bilangan real t, r, t_0, α. Persamaan diferensial tundaan $x'(t) = F(t, x_t)$ pada $[t_0, \alpha) \times \mathcal{C}_D$, dengan fungsi

$$x \in C([t-r,t], \mathbb{R}^n)$$

$x_t \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$, dan $F : [t_0,\alpha) \times \mathcal{C}_D \to \mathbb{R}^n$ memiliki solusi lokal dan tunggal pada

$$[t_0 - r, t_0 + \Delta)$$

dengan suatu nilai awal $x = \varphi(t - t_0)$ pada $[t_0 - r, t_0] \times \mathcal{C}_D$ jika fungsional F kontinu dan memenuhi kondisi Lipschitz pada $\mathcal{E} \subset J \times \mathcal{C}_D$ atau F merupakan Lipschitz lokal pada himpunan $\mathcal{E}$ dengan

$$\mathcal{E} \equiv [t_0, t_0 + a] \times \{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi - \varphi_0\|_r \leq b\}$$

untuk setiap $\varphi_0 \in \mathcal{C}_D$ suatu bilangan real $a > 0$ dan $b > 0$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Nugroho D. Budi. 2011. Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya (Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple). Yogyakarta. Graha Ilmu.

[2] Verdugo, Anael. 2008. *[note] Delay Differential Equations,(online)* http://people.math.cornell.edu/~pmeerkamp/appl-dyn- sem/notes/%5b5bnotes%5d%20delay%20differential%20equations%20-%20verdugo.pdf

[3] Kenneth, D.R dan Donsig, P.A. 2002. *Real Analysis with Applications.* Toronto. Prentice Hall.

[4] Driver, R. D. 1977. *Ordinary and Differential Equations.* Springer – verlag. New York.