FUNGSI CANTOR

Kisti Nur Aliyah [1], Manuharawati [2] ,
[1] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,Universitas Negeri Surabaya
Kampus Ketintang 60231,Surabaya
email : chist_kiss@yahoo.co.id [1], manuhara1@yahoo.co.id [2]

ABSTRAK

Pembentukan himpunan Cantor dimulai dengan membagi interval $[0,1]$ menjadi tiga bagian yang sama panjang dan menghilangkan bagian tengah sub interval buka sehingga tersisa dua interval, yakni $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ dan $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Lalu masing masing interval yang tersisa dibagi lagi menjadi tiga bagian yang sama panjang dan menghapus bagian tengah sub interval buka dari masing masing interval yang telah dipecah tersebut. Proses pengulangan (iterasi) tersebut dilakukan terus menerus menuju tak hingga. Gabungan dari sisa interval yang telah dipecah itulah yang disebut himpunan Cantor, yang dinotasikan dengan $\mathcal{C}$.

Dari himpunan Cantor, dibentuk suatu fungsi bernilai real F yang disebut fungsi Cantor. Fungsi Cantor $F(t)$ didefinisikan sebagai $F(t) = \frac{2k-1}{2^n}$ untuk t berada pada interval $[a_k{}^n, b_k{}^n]$ dengan n menunjukkan banyaknya iterasi dimana interval itu dipecah pada proses pembentukan himpunan Cantor, dan k berjalan dari 1 sampai j dimana j adalah banyaknya sub interval yang dihilangkan pada setiap n.

Beberapa sifat fungsi Cantor yang dibahas dalam makalah ini antara lain F adalah fungsi naik pada domainnya, F konstan dan kontinu pada $[a_k{}^n, b_k{}^n]$, dan turunan pertama F pada $[a_k{}^n, b_k{}^n] = 0$.

Kata kunci : Fungsi cantor, himpunan Cantor

I. PENDAHULUAN

Di dalam cabang ilmu Matematika terutama analisis, himpunan Cantor adalah salah satu topik yang sangat menarik untuk dibahas. Himpunan yang pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan Jerman George Cantor pada tahun 1883 ini, berkembang dengan konstruksi yang bermacam-macam. Pada makalah ini akan dibahas tentang fungsi Cantor .

II. KAJIAN TEORI

Beberapa konsep dasar yang membantu dalam membahas fungsi Cantor dan sifat-sifatnya adalah sebagai berikut :

2.1 HIMPUNAN KOMPAK

Definisi 2.1.1
Sebuah subset S pada sebuah ruang topologi X dikatakan kompak jika untuk setiap selimut (*cover)* buka dari S memuat *subcover* berhingga dari S.
(Munkers, J.R., 2000 : 24)

Pada buku *Lebesgue Integration on Euclidean Space* tahun 1993 halaman 23, Frank Jones dapat membuktikan teorema Heine-Borel bahwa S kompak jika dan hanya jika S tertutup dan terbatas.

2.2 HIMPUNAN COUNTABLE

Himpunan A disebut *countable* jika A berhingga atau $A \cong \mathbb{N}$. Sedangkan himpunan yang tidak *countable* disebut sebagai himpunan *uncountable*.
(Kenneth R. Davidson dan Alan P. Donsig, 2002 : 61)

2.3 HIMPUNAN TERUKUR

Definisi 2.3.1
Diberikan interval I pada $\mathbb{R}$ yang terbuka dan terbatas, dengan titik – titik ujungnya a dan b, dengan $a \leq b$. panjang interval I, dinotasikan dengan $l(I)$ yang didefinisikan sebagai $l(I) = b - a$
(Gupta, S.L, 2001 :137)

Definisi 2.3.2
Diberikan $E \subset \mathbb{R}$.
Ukuran luar Lebesgue atau ukuran luar E dinotasikan dengan $m^*(E)$, dan didefinisikan sebagai
$m^*(E) = \inf\{\sum l(I_i),\ I_i \in \mathcal{I},\ \mathcal{I} \in \mathcal{I}_E\}$, dengan :
$\mathcal{I} =$ koleksi terbilang interval terbuka I dengan $E \subset \cup\, I$.

$\mathcal{I}_E = \{ \mathcal{I} : \mathcal{I} =$ koleksi interval terbuka dengan $E \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$.
(Manuharawati, 2000:3)

Dari definisi diatas, didapat sifat-sifat ukuran luar pada himpunan adalah sebagai berikut :

a). $m^*(\mathrm{A}) \geq 0$ untuk semua himpunan $A \subset \mathbb{R}$

b). $m^*(\emptyset) = 0$

c). Jika diberikan himpunan A dan B dengan $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, maka $\mathrm{m}^*(\mathrm{A}) \leq m^*(\mathrm{B})$, untuk setiap $A \subset \mathbb{R}$ dan $B \subset \mathbb{R}$

d). Jika $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, maka $m^*(\mathrm{x}) = 0$

e) Fungsi m^* bersifat translasi invarian artinya $m^*(\mathrm{A} + \mathrm{x}) = m^*(\mathrm{A})$

untuk setiap himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}$.

(Manuharawati, 2000:4)

Dalam buku ***Fundamental Real Analysis*** halaman 142 karangan Gupta, S.L tahun 2001, disebutkan bahwa Ukuran luar dari suatu interval sama dengan panjang dari interval tersebut.

Teorema 2.3.1
Diberikan koleksi terhitung himpunan-himpunan $\{\mathrm{E_n}\}$, maka berlaku

$$\mathrm{m}^*\left(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{E_n}\right) \leq \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}^*(\mathrm{E_n})$$

Dari teorema tersebut, dapat berakibat jika A himpunan terhitung (*countable*), maka $m^*(A) = 0$
(Gupta, S.L, 2001:145)

Berdasarkan pengertian ukuran luar di atas diperoleh pengertian ukuran Lebesgue dan pada bagian berikut akan dibicarakan beberapa sifat himpunan terukur.

Definisi 2.3.3
Himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dikatakan terukur Lebesgue selanjutnya dikatakan terukur jika untuk setiap himpunan $A \subset \mathbb{R}$ berlaku $m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$
Karena $A = (A \cap E) + (A \cap E^c)$ dan m^* bersifat countable subadditivity, maka jelas berlaku $m^*(E) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$
Oleh karena itu, untuk membuktikan bahwa suatu himpunan E terukur hanya perlu dibuktikan bahwa berlaku $m^*(E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$
Beberapa sifat himpunan terukur dalam antara lain :
a). Jika E terukur maka E^c juga terukur
b). $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan terukur.
(Wahyudin, 1985 :60)

Proposisi 2.3.1
Jika E adalah sebarang himpunan bilangan real dengan $m^*(E) > 0$, maka ada subset dari E yang tidak terukur.
(Royden, H.L. 2010 : 48)

Bukti : 1. Andaikan E terbatas. Misalkan C_E adalah sebarang himpunan terpilih untuk relasi ekivalen pada E.
Klaim C_E tidak terukur.
Bukti klaim : Andaikan C_E terukur. Misalkan Λ_0 adalah himpunan bilangan rasional yang tak hingga dan terhitung. Karena C_E terukur, maka koleksi translasi dari C_E oleh anggota Λ_0 adalah saling lepas, jadi $m^*(C_E) = 0$.
$m^*\left(\bigcup_{\curlywedge \epsilon \Lambda_0} (\curlywedge + C_E)\right) = \sum_{\curlywedge \epsilon \Lambda_0} m^*\left((\curlywedge + C_E)\right)$
$m^*(\curlywedge + C_E) = m^*(C_E)$ karena sifat translasi invariant
Jadi $m^*(\curlywedge + C_E) = 0$
Dipilih Λ_0 yang akan membuat sebuah kontradiksi. Karena E terbatas, misalkan E berada pada interval $[-b, b]$. pilih $\Lambda_0 = [-2b, 2b] \cap \mathbb{Q}$. Maka Λ_0 terbatas.
Klaim lagi $E \subseteq \cup (\curlywedge + C_E)$, dengan $\curlywedge \subset [-2b, 2b] \cap \mathbb{Q}$.
Bukti klaim kedua, jika $x \in E$, maka ada sebuah bilangan c pada C_E dimana $x = c + q$, dengan q rasional. Karena x dan c elemen dari $[-b, b]$, jadi q elemen dari $[-2b, 2b]$. Maka klaim kedua terbukti.
Tapi hal ini kontradiksi. Karena E adalah himpunan dengan ukuran luar positif tidak mungkin menjadi subset dari himpunan yang ukuran luarnya nol.

2. Andaikan E tidak terbatas

Misalkan $E = [a, \infty)$. Karena $E = [a, \infty)$, maka ada subset dari E yang terbatas. Misalkan $A \subset E$ dengan $A = [a, a + i)$ dengan $i < \infty$. Karena $A \subset E$, maka $m^*(A) < \infty$. karena $A = [a, a + i)\ dan\ m^*(A) < \infty., maka\ m^*(A)$ positif. Berdasarkan 1, maka ada $B \subset A$ dengan B tidak terukur. Karena $B \subset A$ dan $A \subset E$, berdasarkan sifat transitif, maka $B \subset E$.
Jadi terbukti ada subset dari E yang tidak terukur. ■
(Disadur dari : Royden, H.L. 2010 : 48)

2.4 FUNGSI KONTINU

Definisi 2.4.1
Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ dan $a \in A$. Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di a jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $|x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Jika f tidak kontinu di a, dikatakan bahwa fungsi f diskontinu di a.
(Royden, H.L. 2010 : 25)

Contoh 2.4.1 :
Jika diberikan sebuah fungsi bernilai real $f(x) = 5$ pada domain $A = \{1 \leq x \leq 4 : x \in \mathbb{R}\}$, maka dengan jelas dapat dibuktikan bahwa $f(x)$ adalah fungsi kontinu.
Hal itu berakibat bahwa fungsi konstan adalah fungsi kontinu.

III. PEMBAHASAN

3.1 HIMPUNAN CANTOR

Proses pembentukan himpunan Cantor dimulai dari interval tertutup [0,1] dan membaginya menjadi tiga sub interval yang panjangnya sama besar. Kemudian menghapus bagian tengah sub interval buka $I_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = (a_1{}^1, b_1{}^1)$ sehingga diperoleh

$$[0,1] - I_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$$

Kemudian membagi lagi masing- masing interval tertutup yang tersisa menjadi tiga sub interval yang sama besar dan menghapus bagian tengah sub interval buka pada masing-masing interval tutup.
Didapat $I_2 = (\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2})$=$(a_1{}^2, b_1{}^2) \cup (a_2{}^2, b_2{}^2)$
Jadi,

$$[0,1] - (I_1 \cup I_2) = \left[0,\frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2},1\right]$$

Proses pengulangan (iterasi) tersebut dilakukan secara terus menerus, dan didefinisikan himpunan Cantor sebagai berikut :

Definisi 3.1.1
Himpunan Cantor yang dinotasikan dengan $\mathcal{C}$ didefinisikan $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dengan $I_n = \bigcup_{j=1}^{2n-1} i_n^{(j)}$, dimana $i_n^{(j)}$ adalah interval- interval terbuang pada iterasi ke-n dalam proses pembentukan himpunan Cantor.
(Dylan, R Nelson, 2002:3)

Beberapa sifat himpunan Cantor adalah sebagai berikut :

Teorema 3.1.1
Himpunan Cantor adalah himpunan kompak.
(Dylan, R Nelson, 2002:3)

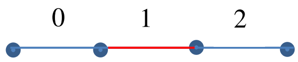
Bukti : Setiap I_n adalah gabungan berhingga dari himpunan tertutup. Jadi, I_n juga tertutup. Karena $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, maka $\mathcal{C}$ juga tertutup. $\mathcal{C}$ juga terbatas, karena $\mathcal{C} \subset [0,1]$. Berdasarkan Teorema 2.1.1, dapat disimpulkan $\mathcal{C}$ adalah kompak.

Teorema 3.1.2
Himpunan Cantor adalah himpunan yang *uncountable.*
(Dylan, R Nelson, 2002 :4)

Bukti : Andaikan $\mathcal{C}$ countable, maka $\mathcal{C}$ dapat dituliskan sebagai $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_{3,\ldots}\}$.
Dari pembentukan himunan Cantor, maka setiap $x_i \in \mathcal{C}, x$ dapat disajikan dalam basis tiga.yaitu :

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13,\ldots}$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23,\ldots}$$
$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33,\ldots}$$

Dengan $a_{ij=}0$ atau 2



Missal $y \in \mathcal{C}$ dan $y = 0, b_1, b_2, b_{3,\ldots}$
dengan :

$$b_i = \begin{cases} 0 \; jika \; a_{ii} = 2 \\ 2 \; jika \; a_{ii} = 0 \end{cases}$$

Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $b_i \neq a_{ii}$, maka $x_i \neq y$.
Dengan kata lain, $y \notin \mathcal{C}$.
Terjadi kontradiksi dengan $y \in \mathcal{C}$. Jadi pengandaian salah, seharusnya $\mathcal{C}$ adalah *uncountable.* ■

3.2 FUNGSI CANTOR DAN SIFAT – SIFATNYA

Definisi 3.2.1
Fungsi Cantor $F(t)$ didefinisikan sebagai

$$F(t) = \frac{2k-1}{2^n} \qquad (3.2)$$

untuk t berada pada interval $[a_k{}^n, b_k{}^n]$ dengan n menunjukkan banyaknya iterasi dimana interval itu dipecah pada proses pembentukan himpunan Cantor, dan k berjalan dari 1 sampai j dimana j adalah banyaknya subinterval yang dibuang pada tiap n.
Jadi, $[a_k{}^n, b_k{}^n] = I_n \cup E$, dimana E adalah himpunan titik ujung setiap I_n.

Contoh 3.2.1:

$F(t) = \frac{1}{2}$, jika $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{jika } \frac{1}{9} \leq t \leq \frac{2}{9} \\ \frac{3}{4} & \text{jika } \frac{7}{9} \leq t \leq \frac{8}{9} \end{cases}$$

Teorema 3.2.1

Jika F adalah fungsi Cantor, maka :

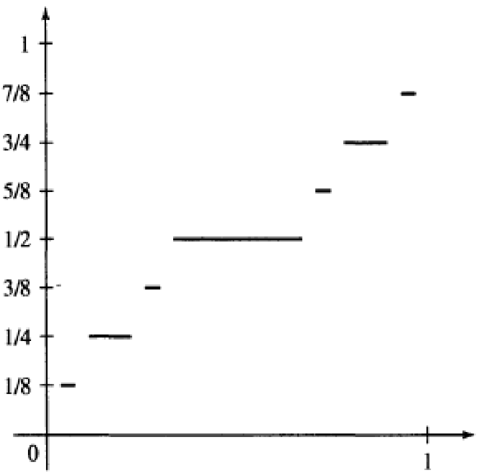
(a). F adalah fungsi naik pada domainnya.

(b). F konstan pada setiap $i_n, \forall n \in \mathbb{N}$

(c). F kontinu pada setiap $i_n, \forall n \in \mathbb{N}$

(d). Turunan pertama $F = 0$ pada interval $[a_k{}^n, b_k{}^n]$.

Bukti



Gambar 3.2.1 Grafik fungsi Cantor pada I_3

Dari persamaan (3.1) jelas bahwa:

(a). F adalah fungsi naik, karena $\forall\, u, v \in [0,1]$ dengan $u \le v$, maka $F(u) \le F(v)$.

(b). F adalah konstan untuk setiap interval yang berada di $[a_k{}^n, b_k{}^n]$.

(c). Berdasarkan (b), maka F adalah fungsi kontinu pada interval $[a_k{}^n, b_k{}^n]$.

(d). Berdasarkan (b), turunan F sama dengan nol pada interval $[a_k{}^n, b_k{}^n]$.. ■

(Royden, H.L. 2010 : 51)

Akibat 3.2.1

Jika $\boldsymbol{C}$ adalah himpunan Cantor dan F adalah fungsi Cantor, maka fungsi Cantor F adalah fungsi kontinu yang memetakan $[0,1]\backslash\boldsymbol{C}\ ke\ [0,1]$.

Bukti : Ambil sebarang $x_0 \in C$ dengan $x_0 \neq 0$ dan $x_0 \neq 1$

Jika $x_0 \in C$ maka $x_0 \notin i_n$ dengan banyaknya $i_n = 2^n - 1$.

Meskipun n adalah bilangan asli yang cukup besar, x_0 tetap terletak diantara dua interval yang berurutan di i_n. Misal a_n dan b_n adalah anggota dari i_n., dan masing-masing adalah interval yang saling berurutan, maka $a_n < x_0 < b_n$ dan $F(b_n) - F(a_n) = \frac{1}{2^n}$.

Jika n bernilai besar, maka F gagal untuk memiliki lompatan diskontinu di x_0. Untuk sebuah fungsi naik, lompatan diskontinu hanya mungkin jika fungsi tersebut diskontinu. Maka F kontinu di x_0. Jika x_0 adalah titik-titik akhir dari [0,1] maka dapat disimpulkan bahwa F kontinu pada $[0,1]$. ■

(Royden, H.L. 2010 : 52)

Definisi 3.2.5

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ dan f kontinu, L_f adalah himpunan titik-titik untuk membentuk fungsi konstan, $x \in L_f$ jika f konstan pada sebuah persekitaran titik x.

(O. Dovgoshey, 2006 : 4)

Contoh 3.2.2

Pada kasus $f =$ fungsi Cantor, maka $L_f = I_n = [0,1]\backslash\boldsymbol{C}$

Proposisi 3.2.1

Jika $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ dan f kontinu,, maka pernyataan berikut ekivalen :

a. Invers image $f^{-1}(A)$ terukur subset dari $[a, b]$ untuk setiap $A \subseteq \mathbb{R}$.

b. Ukuran luar dari himpunan $[a, b]\backslash L_f = 0$ (3.2)

Bukti :

b ⟹ a

L_f terbuka karena L_f gabungan dari himpunan buka di $[a, b]$ dan f konstan pada masing-masing komponen di L_f. Misalkan E adalah himpunan titik ujung dari semua komponen di L_f. Misalkan $f_0 \coloneqq f|_{L_f \cup E}$, $f_1 \coloneqq f|_{[a,b]\backslash(L_f \cup E)}$ yang artinya f_0 adalah fungsi f yang dibatasi pada domain $L_f \cup E$ dan f_1 adalah fungsi f yang dibatasi pada domain $[a, b]\backslash(L_f \cup E)$

Jika $A \subset \mathbb{R}$, maka $f_0{}^{-1}(A)$ adalah sebuah $F_\sigma \subset [a, b]$dan $f_0{}^{-1}(A) \subseteq [a, b]\backslash L_f$.

Jika $f^{-1}(A) = f_0{}^{-1}(A) \cup f_1{}^{-1}(A)$,

persamaan $m_1([a, b]\backslash L_f) = 0$ mengakibatkan $f^{-1}(A)$ terukur sebagai gabungan dari dua fungsi terukur.

a ⟹ b

Karena f monoton, mengakibatkan f_1 satu-satu.

$$\left(f_0(L_f \cup E)\right) \cap \left(f_1\left([a, b]\backslash(L_f \cup E)\right)\right) = \emptyset \quad (3.3)$$

Andaikan persamaan (3.2) tidak berlaku. Maka untuk setiap $B \subseteq \mathbb{R}$ dengan ukuran luar $m_1{}^*(B) > 0$ maka ada himpunan tak terukur $A \subseteq B$. Jadi ada himpunan tak terukur $A \subseteq [a, b]\backslash(L_f \cup E)$. Karena $f_1$satu-satu,maka pers (3.3) berakibat bahwa $f^{-1}(f(A)) = A$, kontradiksi dengan **a**. ■

(O. Dovgoshey, 2006 : 4)

Akibat 3.1.7
Jika F adalah Fungsi Cantor, maka $F^{-1}(A)$ adalah terukur subset dari $[0,1]$ untuk setiap $A \subseteq \mathbb{R}$.
Bukti : L_f terbuka karena L_f adalah gabungan dari himpunan buka, dan F konstan pada masing-masing L_f. misalkan E adalah himpunan titik ujung pada semua komponen di L_f. misalkan $f_0 \coloneqq f|_{L_f \cup E}$ $dan,$ $f_1 \coloneqq f\,/_{[0,1]\setminus(L_f \cup E)}$. Jika $A \subset \mathbb{R}$, maka ${f_0}^{-1}(A)$ adalah sebuah $F_\sigma \subset [0,1]$ dan ${f_0}^{-1}(A) \subseteq [0,1] \setminus L_f$.
$f^{-1}(A) = {f_0}^{-1}(A) \cup {f_1}^{-1}(A)$,
$m^*([0,1] \setminus L_f) = m^*(\mathcal{C}) = 0$, jadi
${f_1}^{-1}(A)$ terukur karena gabungan dari himpunan buka.
Jadi $f^{-1}(A)$ terukur sebagai gabungan dari dua himpunan terukur. ∎
(Disadur dari : O. Dovgoshey, 2006 : 4)

3.3 PERLUASAN FUNGSI CANTOR (FUNGSI CANTOR STANDAR)

Definisi 3.3.1
Perluasan fungsi Cantor $\hat{F}(t)$ atau biasa disebut fungsi Cantor standar didefinisikan sebagai berikut :

$$\hat{F}_0(t) = \begin{cases} 0 & jika\ t < 0 \\ t & jika\ 0 \le t \le 1 \\ 1 & jika\ t > 1 \end{cases}$$

$$\hat{F}_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}.\ \hat{F}_n(3t) & jika\ t \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\ \hat{F}_n(3t-2) & jika\ t \ge \frac{1}{3} \end{cases}$$

(Dobos, J, 1996 : 3423)

Definisi 3.3.2
Sebuah fungsi $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dikatakan subaditif jika $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$.
(Matkowski, J, 1993 : 2)

Teorema 3.3.1
Misalkan $\hat{F}(t)$ adalah fungsi Cantor standar, maka $\hat{F}(t)$ bersifat subaditif.
Bukti : Ambil $\hat{F} = \lim_{n\to\infty} \hat{F}(t)$.
Maka fungsi $\hat{F}$ adalah limit sepotong-sepotong dari fungsi $\hat{F}_n$ dengan $n \to +\infty$. Jadi untuk membuktikan sifat subaditif dari $\hat{F}$, maka cukup dengan dibuktikan $\widehat{F}$ subaditif untuk setiap $\hat{F}_n$ menggunakan induksi pada n.
Untuk $n = 0$, berdasarkan definisi jelas bahwa $\hat{F}_0$ bersifat subaditif.

Karena $n = 0$ adalah kasus trivial, maka akan dibuktikan dengan menggunakan induksi dari n ke $n+1$.
Dengan menggunakan induksi matematika dari n ke $n+1$. Akan dibagi menjadi beberapa kasus.
Misal $x, y \in \mathbb{R}$, $x \ge y$.

Kasus 1 : $y \le 0$. Kasus ini trivial karena $\hat{F}_{n+1}$ adalah monoton.

Kasus 2 : $y \ge \frac{1}{3}$. pada kasus ini, $\hat{F}_{n+1}(x+y) \le 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le \hat{F}_{n+1}(x) + \hat{F}_{n+1}(y)$.

Kasus 3 : $x \le \frac{1}{3}$. Karena $x \ge y$, maka $x + y \le \frac{2}{3}$,

$$\hat{F}_{n+1}(x+y) = \tfrac{1}{2}.\hat{F}_n(3x+3y) \le \tfrac{1}{2}.\hat{F}_n(3x) + \tfrac{1}{2}.\hat{F}_n(3y) = \hat{F}_{n+1}(x) + \hat{F}_{n+1}(y)$$

Kasus 4 : $0 \le y \le \frac{1}{3} \le x$. Maka $x + y \ge \frac{1}{3}$,

$$\hat{F}_{n+1}(x+y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\hat{F}_n(3x+3y-2)$$
$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\hat{F}_n(3x-2) + \frac{1}{2}.\hat{F}_n(3y)$$
$$= \hat{F}_{n+1}(x) + \hat{F}_{n+1}(y)$$

Karena semua kemungkinan kasus sudah terpenuhi, maka bukti selesai. Jadi terbukti bahwa Fungsi Cantor standart bersifat subaditif. ∎
(Dobos, J, 1996 : 3425)

Definisi 3.3.3
Modulo kekontinuan adalah sebuah fungsi f yang terdefinisi, kontinu, tak turun, dan subaditif pada $[0,1]$ dengan $f(0) = 0$.
(Dobos, J, 1996 : 3426)

Akibat 3.3.1
Jika $\hat{F}(t)$ adalah fungsi Cantor standar, maka $\hat{F}(t)$ adalah modulo kekontinuan.
Bukti : Berdasarkan definisi fungsi Cantor standar, jelas bahwa $\hat{F}(t)$ terdefinisi dan kontinu pada $[0,1]$.
$\hat{F}_n(t) = 0$ untuk setiap $t \le 0$ dan $\hat{F}_n(t) = 1$ untuk setiap $t \ge 1$.
Pada $\hat{F}_{n+1}(t)$, domainnya saling tumpang tindih
Dengan kedua definisi, Jika $\frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}$, maka $\hat{F}(t) = \frac{1}{2}$
Jika $\le \frac{2}{3}$, menggunakan definisi $\widehat{F}_{n+1}(t) = \frac{1}{2}.\ \hat{F}_n(3t)$, maka $\hat{F}(t) \le \frac{1}{2}$
Sebaliknya, jika $t \ge \frac{1}{3}$ dengan definisi $\widehat{F}_{n+1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\ \hat{F}_n(3t-2)$ maka $\hat{F}(t) \ge \frac{1}{2}$
$\hat{F}_0(0) = 0$ dan $\hat{F}_0(1) = 1$

Karena ada $0 \in [0,1]$ dan $1 \in [0,1]$, $0 < 1$ dan $f(0) < f(1)$, maka dapat dikatakan bahwa $\hat{F}(t)$ bersifat tak-turun.

Karena $\hat{F}(t)$ terdefinisi, kontinu dan tak turun, dan subaditif pada interval $[0,1]$, maka terbukti bahwa $\hat{F}(t)$ adalah modulo kekontinuan. ■

(Disadur dari : Dobos, J, 1996 : 3426)

DAFTAR PUSTAKA

[1] Davidson, R. Kenneth,. dan Donsig, P. Alan. 2002. ***Real Analysis with Real Applications***. Prentice-Hall

[2] Devaney, R.L.1987. ***An Introduction to Chaotic Dynamical Systems***. Redwood City, CA: Addison-Wesley

[3] Dobos, J. 1996. ***The standart Cantor Function is subadditve.*** (online) (http://www.ams.org/journals/proc/1996-124-11/S0002-9939-96-03440-5/S0002-9939-96-03440-5.pdf) diakses pada 26 Februari 2012

[4] Dylan, R. Nelson. 2002. ***The Cantor Set – A Brief Introduction***.(online) (http://www.math.uwaterloo.ca/~xzliu/cantor-set.pdf) diakses pada 21 Januari 2012

[5] Manuharawati. 2000. ***Teori Ukuran.*** Surabaya. Jurusan Matematika Universitas Negeri Surabaya.

[6] Matkowski, J. dan Swi_Atkowski, T. 1993. ***On Subbadditive functions***, Proc. Amer. Math. Soc 119.

[7] Munkres, J. R. 2000. ***TOPOLOGY : A first course, 2nd ed***. Upper saddle, N.J. Prentice-Hall

[8] O. Dovgoshey,. O. Martio,.V. Ryazanova,.M. Vuorinen.2005. ***The Cantor Function***. (online) (http://users.utu.fi/vuorinen/REA12/107.pdf) diakses pada 01 Februari 2012

[9] Royden,H.L dan Fitzpatrick,P.M.2010.***Real Analysis Fourth Edition***.Pearson Education Asia Limited and China Machine Press:China

[10] Wahyudin. 1987. ***Dasar-dasar Topologi***. Bandung : Tarsito.