PELABELAN TOTAL SISI AJAIB TITIK TERURUT PADA GRAPH

Martha Rosa Indah [1], Ketut Budayasa [2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya
[2] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya
email: martharose89@yahoo.com [1], ketutbudayasa@yahoo.com [2]

ABSTRAK

Dalam penelitian ini, dibahas pelabelan suatu graf yang dinamakan pelabelan total sisi ajaib, dimana akan memiliki label titik yang konsekutif atau terurut. Pelabelan total sisi ajaib pada graph G adalah pemetaan bijektif dari $V \quad E$ pada himpunan {1, 2, 3, ... , $n + e\}$dengan sifat bahwa setiap $x, y \quad V$, $xy \quad E, \beta(x) + \beta(y) + \beta(xy) = k$. Kemudian, didefinisikan untuk pelabelan total sisi ajaib a – titik terurut pada graph adalah bijeksi $\beta : V(G) \quad E(G)$ $\{1,2,3, \ldots + n + e\}$, jika β adalah pelabelan sisi ajaib dan $\beta(V) = \{a + 1, \ldots a + n\}, 0 \quad a \quad e$ membentuk barisan aritmatika dengan a bilangan bulat positif yang dipilih untuk menentukan label titik awal. Dalam tulisan ini akan dibahas sifat – sifat dari pelabelan total sisi ajaib a – titik terurut.

Kata kunci : Graph, Pelabelan ajaib, Pelabelan terurut

1. PENDAHULUAN

Teori graph merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun silam. Jurnal matematika pertama tentang teori graph muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari swiss yang bernama Euler. Graph merupakan pasangan terurut dari himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik – titik pada graph membentuk sisi dan dapat direspresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graph, pola – pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokan menjadi kelas – kelas graph.

Hingga kini teori graph telah dapat memberikan kerangka dasar bagi banyak persoalan yang berhubungan dengan struktur dan hubungan antara suatu objek diskrit dalam bentuk apapun. Banyak masalah dapat dinyatakan dalam bentuk graph dan dipecahkan dengan menggunakan graph. Sehingga membangkitkan minat baru untuk mempelajari graph dan menjadikan graph sebagai salah satu cabang matematika yang berkemang pesat. Diantaranya adalah banyaknya penemuan – penemuan baru mengenai graph. Mulai dari jenis – jenis graph, macam – macam pelabelannya dan cara melabelkannya.

Pelabelan graph merupakan suatu topik dalam teori graph. Objek kajiannya berupa graph yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pemanfaatan teori pelabelan graph sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar dll. Suatu pelabelan (pemberian nilai) pada suatu graph adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur – unsur graph (titik dan sisi atau keduanya) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif). Sampai saat ini dikenal beberapa jenis pelabelan, antara lain pelabelan gracefull, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan anti ajaib, dan pelabelan ajaib.

Salah satu pelabelan yang menarik yang dilabelkan dengan bilangan adalah pelabelan ajaib. Graph ajaib adalah graph yang dilabelkan dengan bilangan, dimana setiap titik dan sisi yang terkait (incident) jika dijumlahkan menghasilkan bilangan bulat yang sama. Tulisan ini merupakan rangkuman dan elaborasi dari sumber [1], [3], dan [4] yaitu tentang sifat – sifat dari pelabelan total sisi ajaib titik terurut pada graph.

2. PEMBAHASAN

2.1 Pelabelan total sisi ajaib *a* – titik terurut

Berikut adalah beberapa definisi pelabelan total sisi ajaib a – titik terurut yang akan digunakan untuk membuktikan teorema – teorema selanjutnya.

Definisi 2.1.1

Misalkan G graph dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyak titik di G adalah $|V(G)| = n$, banyak sisi di G adalah $|E(G)| = e$. Pelabelan total sisi ajaib pada graph G adalah pemetaan bijektif *â* dari *V(G)*   *E(G)* ke himpunan {1, 2, 3, ... , *n* + *e*} sehingga untuk sebarang sisi (*xy*) di G berlaku, $\beta(x) + \beta(xy) + \beta(y) = k$, untuk suatu konstanta *k*.

Selanjutnya *k* disebut konstanta ajaib pada *G*.

Definisi 2.1.2

Misalkan graph *G* = (*V*(*G*),*E*(*G*)) dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = e$. Sebuah pelabelan sisi ajaib - a titik terurut dari $G = G(V,E)$ adalah fungsi bijeksi $\beta: V(G) \quad E(G) \quad \{1,2,3,\ldots,n+e\}$, dengan β adalah pelabelan sisi ajaib dan $\beta(V) = \{a+1, a+2 \ldots a+n\}$, untuk suatu bilangan bulat *a*, $0 \quad a \quad e$. Jika $a = 0$, maka pelabelan *â* disebut pelabelan sisi ajaib titik terurut super.

Definisi 2.1.3

Sebuah graph *G* mempunyai pelabelan sisi ajaib a – titik terurut disebut graph ajaib sisi a – titik terurut.

Definisi 2.1.4

Misal $M = e + n$ diberikan fungsi $\beta \quad V(G) \quad E(G) \quad \{1,2,3 \ldots M\}$ adalah sebuah pelabelan sisi ajaib super untuk graph *G*. Didefinisikan pelabelan $\beta : V(G) \quad E(G) \quad \{1,2,3 \ldots M\}$ sebagai berikut,

$$\beta\,(x) = M + 1 \quad \beta(x), \qquad x \quad V,$$

$$\beta\,(xy) = M + 1 \quad \beta(xy), \quad xy \quad E,$$

Maka β dinamakan dual dari β, sehingga β juga merupakan pelabelan sisi ajaib.

2.2 Sifat – sifat pelabelan total sisi ajaib *a* – titik terurut

Berikut adalah sifat – sifat dari pelabelan sisi ajaib *a* – titik terurut yang dibuktikan dari beberapa teorema.

Teorema 2.2.1

Dual dari pelabelan sisi ajaib titik terurut super untuk graph *G* adalah pelabelan sisi ajaib *e* – titik terurut.

Bukti : Diberikan graph *G* dan β pelabelan sisi ajaib titik terurut super dengan k sebagai konstanta ajaibnya, maka $\beta(V) = \{1,2,\ldots,n\}$ dan $\beta(E) = \{n+1, n+2,\ldots,n+e\}$. Diberikan $M = e + n$ dan sudah didefinisikan dual pelabelannya adalah $\beta : V \quad E \quad \{1,2,\ldots,M\}$ dengan,

$$\beta\,(x) = M + 1 \quad \beta(x), \qquad x \quad V,$$

$$\beta\,(xy) = M + 1 \quad \beta(xy), \quad xy \quad E,$$

Dual label titik dari G adalah $\beta\,(V) = \{M \quad n+1, M \quad n+2,\ldots,M\}$ dan Dual label sisi dari G adalah $\beta\,(E) = \{M \quad n \quad e+1, M \quad n \quad e+2,\ldots,M \quad n\}$

Dapat dilihat dan dengan konstanta ajaibnya adalah

$$k = \beta\,(x) + \beta\,(xy) + \beta\,(y)$$

$$= 3M + 3 \quad k$$

Jadi dual dari pelabelan sisi titik terurut super juga dikatakan pelabelan sisi *e* – titik terurut ajaib.

Lemma 3.1

Jika graph non-trivial *G* adalah graph ajaib super dengan *n* titik dan *e* sisi, maka *e* $\quad 2n \quad 3$.

Bukti :

Misal *G* adalah graph ajaib super dengan *n* titik dan *e* sisi. Maka G adalah graph sisi ajaib – *a* titik terurut dengan $a = 0$. Jika β adalah pelabelan dari graph G, maka $\beta: V(G) \quad E(G) \quad \{1,2,\ldots n, n+1, n+2,\ldots n+e\}$. Karena $a = 0$, maka $\beta(V) = \{1,2,\ldots,n\}$ dan $\beta(E) = \{n+1, n+2,\ldots n+e\}$. Mengingat nilai ekstrim dari pelabelan titik - titik dan sisi – sisi, maka setidaknya nilai *k* minimum terjadi jika dua bilangan terkecil dilabelkan pada dua titik yang saling berhubungan (adjacent) dijumlahkan dengan sebuah label sisi terbesar yaitu $1 + 2 + (n + e)$, sebaliknya bilangan ajaib maksimum terjadi jika dua titik terbesar dijumlahkan dengan sebuah label sisi terkecil yaitu $(n \quad 1) + n + (n+1)$. Sehingga nilai konstanta ajaib k harus memenuhi pertidaksamaan,

$$1 + 2 + (n + e) \quad k \quad (n \quad 1) + n + (n + 1)$$

ekuivalen dengan $3 + (n + e) \quad k \quad 3n$, kemudian kurangan masing – masing ruas dengan $3 + n$, diperoleh $e \quad k \quad (3 + n) \quad 3n \quad (3 + n)$. Akibatnya, *e* $\quad k \quad 3 \quad n \quad 2n \quad 3$.

Dengan demikian lemma terbukti

Teorema 2.2.2

Jika *G* adalah graph ajaib sisi *a* – titik terurut, *a* $\quad 0$ dan *a* $\quad$ *e* maka *G* adalah graph tak terhubung.

Bukti : Diberikan G graph sisi ajaib a – titik terurut. Karena semua label dari titik – titik di G adalah bilangan bulat terurut, maka $\beta(V) = a + 1, a + 2, \ldots, a + n$. Banyak sisi maksimal dalam graph G adalah $2n \quad 3$. Jika $a \quad 0$ dan $a \quad e$, dan diketahui bahwa $\beta(E) = \{1, \ldots, a\} \quad \{a + n + 1, \ldots, n + e\}$. Maka akan ada celah di himpunan bobot sisi $\{\beta(x) + \beta(y) : x, y \quad V(G)\}$. Jadi, pelabelan sisinya dibagi menjadi 2 blok, terpisah oleh celah dengan lebar n. Jadi, dapat disimpulkan bahwa maksimum banyak sisi G adalah $(2n \quad 3) \quad n = n \quad 3$. Berdasarkan teorema banyak sisi pada pohon[2], dapat dilihat bahwa G graph tak terhubung. Jadi, teorema terbukti.

Teorema 2.2.3

Jika $a \quad 0$ dan $a \quad e$ maka tidak ada pelabelan graph ajaib sisi a – titik terurut untuk Graph $3K_2$.

Bukti : Andaikan $3K_2$ terdapat pelabelan sisi ajaib a – titik terurut, dengan $a \quad 0$ dan $a \quad e$, maka

$$ek = \frac{(n + e)(n + e + 1)}{2} = \frac{(9.10)}{2} = 45$$

Karena $n = 6$ dan $e = 3$, maka $k = 15$

Karena $a \quad 0$ dan $a \quad e = 3$, maka kemungkinan nilai $a = 1$ atau $a = 2$.

Untuk $a = 1$,

$\beta(v) \quad \{2,3,4,5,6,7\}$ dan $\beta(e) \quad \{1,8,9\}$, untuk $v \quad V(3K_2)$ dan $e \quad E(3K_2)$. Jika $k = 15$, maka $\beta(x) + \beta(y) \quad \{6,7,14\}$, untuk $x, y \quad V(G)$. Bagaimanapun, jumlah dari pelabelan titik terbesar di G lebih kecil dari 14, dan sehingga untuk $a = 1$ tidak ada pelabelan sisi ajaib a – titik terurut pada G.

Untuk $a = 2$,

$\beta(v) \quad \{3,4,5,6,7,8\}$ dan $\beta(e) \quad \{1,2,9\}$. Jika $k = 15$, maka $\beta(x) + \beta(y) \quad \{6,13,14\}$, untuk $x, y \quad V(G)$. Bagaimanapun, jumlah dari pelabelan titik terkecil di G lebih dari 6, dan jadi tidak ada pelabelan sisi ajaib a – titik terurut pada G.

Dengan demikian Teorema terbukti.

Teorema 2.2.4

Jika $a \quad 0$ dan $a \quad e$ dan G adalah graph sisi ajaib a – titik terurut maka graph G bukan gabungan dari 3 pohon T_1, T_2, dan T_3, dengan $|V(T_i)| \quad 2$, $i = 1,2,3$.

Bukti : Misalkan G adalah sebuah graph sisi ajaib a – titik terurut, $a \quad 0$ dan $a \quad e$, andaikan bahwa $G = T_1 \quad T_2 \quad T_3$ dimana T_1, T_2, dan T_3 adalah 3 pohon saling lepas dengan $|V(T_i)| = v_i \quad 2$ dan $|E(T_i)| = e_i$, $i, 1 \quad i \quad 3$. Karena G adalah graph sisi ajaib – a titik terurut, maka label sisi dibedakan menjadi dua blok yaitu $\beta(E_1) = \{1, 2, \ldots a\}$ dan $\beta(E_2) = \{a + n + 1, n + 2, \ldots n + e\}$, setiap bloknya terdiri dari bilangan bulat yang urut, maka himpunan dari titik – titik dalam G juga membentuk 2 bagian himpunan titik yang saling lepas, namakan S_1 dan S_2. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan titik – titik T_1 dan T_2 berada di dalam block yang sama di S_1 dan titik – titik T_3 di S_2.

Karena $n_3 \quad 2$ maka $a + n$ dan $a + n \quad 1$ berada di S_2, Misalkan $WS_1 = \{\beta(x) + \beta(y) | x, y \quad S_1\}$ dan $WS_2 = \{\beta(x) + \beta(y) | x, y \quad S_2\}$ adalah himpunan – himpunan bobot – bobot sisi G dari $\hat{a}$.

Karena $G = \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3$, maka

$$|E(G)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + |E(T_3)|$$
$$= n \quad 3$$

Nilai minimal dan maksimal di WS_1 dan WS_2 harus terpakai. Elemen maksimal di WS_2 adalah $(a + n) + (a + n \quad 1) = 2a + 2n \quad 1$ dan pasangan label sisi yang bersesuaian harus minimal yaitu 1. Jadi, konstanta ajaibnya adalah $k = 2a + 2n$

Karena label sisi maksimal dalam blok ini adalah a, maka elemen minimal di WS_1 adalah $k \quad a = a + 2n$.

Misal $z^* = maks\{z | z \quad S_1\}$, maka $z^* = a + n - p$, $p \quad 2$. Misal $z_1 \quad N(z\ )$. Maka label sisi z^*z_1 harus minimum, yaitu $\hat{a}\ (z^*z_1) = a + n + 1$. Karena konstanta ajaib $k = 2a + 2n$,

maka, $\beta(z_1) = p \quad 1$.

Kita tahu bahwa $p - 1 \quad a + 1$, karena $a + 1$ adalah label titik terkecil, akibatnya, $p \quad a + 2$, dan didapat $z^* \quad n - 2$. Maka $n - 1$, n, $n + 1$ semuanya akan berada di S_2.

Misalkan $x_1, x_2, x_3 \quad S_2$ sedemikian hingga $\hat{a}(x_1) = n - 1$, $\hat{a}(x_2) = n$ dan $\hat{a}(x_3) = n + 1$, dan $y_1 \quad N(x_1)$, $y_2 \quad N(x_2)$, $y_3 \quad N(x_3)$. Maka yang mungkin terjadi adalah $\beta(x_2y_2) = a$ dan $\beta(x_3y_3) = a \quad 1$, tetapi kita tidak dapat menemukan nilai dari

$\beta(x_1 y_1)$. Jadi pengandaian $G = T_1 \quad T_2 \quad T_3$, tidak benar, dengan demikian teorema terbukti.

Teorema diatas menyatakan bahwa gabungan tiga pohon yang non – trivial tidak dapat dilabel menjadi pelabelan sisi ajaib *a* – titik terurut. Jika salah satu komponen graph tersebut adalah titik terasing dan 2 komponen yang lain masing – masing berupa pohon maka graph tersebut merupakan graph sisi ajaib *a* – titik terurut.

Contoh berikut menunjukkan bahwa graph tak terhubung dengan sejumlah titik terasing merupakan graph sisi ajaib – *a* titik terurut :

1. Graph tak terhubung dengan 3 komponen dimana 2 komponen masing – masing merupakan 2 pohon dan 1 komponen merupakan titik terasing.
2. Graph tak terhubung dengan 4 komponen dimana 1 komponen merupakan pohon, 1 komponen merupakan sikel, dan 2 komponen masing – masing merupakan titik terasing.
3. Graph tak terhubung dengan 5 komponen dimana 2 komponen masing – masing merupakan sikel dan 3 komponen masing – masing merupakan titik terasing.

Teorema 2.2.5

Ada graph sisi ajaib *a* – titik terurut dengan *n* titik untuk setiap bilangan bulat positif *a* dan *n*,dengan $n \quad a + 4$

Bukti : Untuk membuktikan teorema ini akan digunakan graph *G* merupakan gabungan 2 graph bintang, S_1 dan S_2 dan satu titik terasing yaitu titik *x*. Dalam graph bintang terdapat titik central dan titik – titik daun. Misal titik pusat S_1 adalah v_1 dan titik pusat S_2 adalah v_2, sebagai titik daun diberikan $v_{1i}, i = 1 \ldots\ldots t_1$, $t_1 = e \quad a$ merupakan titik – titik daun di S_1 dan $v_{2j}, j = 1, \ldots, t_2, t_2 = a$, merupakan titik – titik daun di S_2.

Pikirkan pelabelan β pada graph *G* sebagai berikut :

Labeli titik - titik di *G* sedemikian hingga :

- $\beta(v_1) = a + 1$
- $\beta(v_{1i}) = a + 1 + i, 1 \quad i \quad t_1$
- $\beta(v_2) = a + n$
- $\beta(v_{1i}) = a + n \quad i, 1 \quad i \quad t_2$
- $\beta(x) = n \quad 1$

Labeli sisi – sisi di *G* sedemikian hingga :

- $\beta(v_1 v_{1i}) = e + n + 1 \quad i, 1 \quad i \quad t_1$
- $\beta(v_2 v_{2i}) = i, 1 \quad i \quad t_2$

Perhatikan bahwa,

- $\beta(v_1 v_{1i}) + \beta(v_1) + \beta(v_{1i})$

  $= e + n + 2a + 3$

Karena $e = n \quad 3$, maka

$= 2n + 2a$

- $\beta(v_2 v_{2i}) + \beta(v_2) + \beta(v_{2i})$
  $= 2n + 2a$

Jadi G merupakan graph sisi ajaib *a* – titik terurut dengan *n* titik dan konstanta ajaib $k = 2n + 2a$.

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 2.2.6

Setiap gabungan dari *r* bintang dengan *r* – 1 sebagai titik terasing terdapat pelabelan graph ajaib sisi *a* – titik terurut, dimana $a = \min\{|V(s_i)|, \ldots, |V(s_r)|\}$
1.

Bukti : Misalkan $G = S_1 \quad \ldots \quad S_r$, dimana S_i adalah bintang dari $i = 1, \ldots, r$. Misal $n_i = |V(S_i)|$. Tanpa menghilangkan keumuman, misal $n_1 \quad n_2$
n_r. Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah titik pusat dari S_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ dan $\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ adalah himpunan titik terasing. Sebagai titik daun diberikan $v_{1m}, m = 1, \ldots, t_1$ merupakan titik daun di S_1, $v_{2m}, m = 1, \ldots, t_2$ merupakan titik daun di S_2 sampai dengan $v_{rm}, m = 1, \ldots, t_r$ merupakan titik daun di S_r, sehingga $t_1, t_2, \ldots, t_r$ adalah banyak titik daun di setiap *S*.

Pikirkan pelabelan β pada graph *G* sebagai berikut :

Labeli titik - titik di *G* sedemikian hingga :

- $\beta(v_2) = a + 1, \beta(v_3) = a + 2, \ldots, \beta(v_r) = a + r \quad 1$
- $\beta(v_{r1}) = a + r, \beta(v_{r2}) = a + r + 1, \ldots, \beta(v_{rt_r}) = a + r + n_r \quad 2$
- $\beta(x_1) = a + r + n_r \quad 1$
- $\beta(v_{(r-1)1}) = a + r + n_r, \beta(v_{(r-1)2}) = a + r + n_r + 1, \ldots, \beta\left(v_{(r-1)t_{(r-1)}}\right) = a + r + n_r + n_{r-1} \quad 2$

- $\beta(x_2) = a + r + n_r + n_{r-1} - 1$
- Gunakan algoritma yang sama untuk melabeli titik – titik sisa dalam *G*. Sedangkan pada S_1, gunakan label sebagai berikut :
  - $\beta(v_1) = n + e$
  - $\beta(v_{11}) = a + r + n_r + n_{r-1} + n_{r-2} + \cdots + n_{r-(r-1)} - 2$

    $\beta(v_{12}) = (a + r + n_r + n_{r-1} + n_{r-2} + \cdots + n_{r-(r-1)} - 2) - 1$

    $\vdots$

    $\beta(v_{1t_r}) = (a + r + n_r + n_{r-1} + n_{r-2} + \cdots + n_{r-(r-1)} - 2) - (t_r - 1)$

Labeli sisi – sisi di *G* sedemikian hingga :

- $\beta(v_1 v_{1m}) = i, 1 \leq m \leq t_1$ dan $i = 1, 2, \ldots, a = n_1 - 1$
- Lengkapi pelabelan sisi – sisi, mulai dari sisi S_2 ke S_r, dengan menggunakan bilangan bulat $\sum_{i=1}^{r} n_i + (r-1) + a + 1, \sum_{i=1}^{r} n_i + (r-1) + a + 2, \ldots, \sum_{i=1}^{r} n_i + (r-1) + e$.

Perhatikan bahwa,

- Bobot label titik terbesar dijumlahkan dengan label sisi terkecil.

  $\beta(v_1) + \beta(v_{11}) + \beta(v_1 v_{11})$

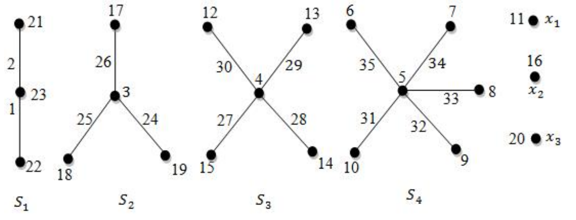
  $= 2a + 2r + 2\sum_{i=1}^{r} n_i - 2$
- Bobot label titik terkecil dijumlahkan dengan label sisi terbesar.

  $\beta(v_r) + \beta(v_{r1}) + \beta(v_r v_{r1})$

  $= 2a + 2r + 2\sum_{i=1}^{r} n_i - 2$

Sehingga dapat dilihat bahwa β adalah pelabelan sisi ajaib *a* – titik terurut dengan nilai ajaib $k = 2a + 2r + 2\sum_{i=1}^{r} n_i - 2$.

Dengan demikian teorema terbukti.



G dengan pelabelan total graph ajaib sisi – *a* titik terurut, *a* = 2, *n* = 21, *e* = 14 dan *k* = 46

3. SIMPULAN

Dalam penulisan ini, disimpulkan bahwa G graph tak terhubung merupakan syarat perlu untuk pelabelan total sisi ajaib *a* – titik terurut dengan $a \neq 0$ dan $a \neq e$. Untuk itu perlu diberikan contoh dari graph tak terhubung dan gabungan dari 3 graph K_2 yang juga tidak bisa dilabelkan sebagai pelabelan total sisi ajaib *a* – titik terurut dengan $a \neq 0$ dan $a \neq e$. Sehingga untuk pelabelan total sisi ajaib *a* – titik terurut dengan $a \neq 0$ dan $a \neq e$ ada paling sedikit satu titik terasing dalam setiap gabungan pohon atau sikel. Dengan syarat tersebut, akan dapat dibuat pelabelan total sisi ajaib titik terurut pada graph dengan beberapa komponen graph bintang dan titik terasing.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. *Sugeng, K.A and M. Miller. 2008. On Consecutive Edge Magic Total Labeling of Graphs.* (http://sciencedirect.com./2008/on_consecutive_edge_magic_total_labeling_of_graph.pdf*, diakses tanggal 20 0ktober 2011)*

[2]. Budayasa, I Ketut, 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya : Unesa University Press.

[3]. H. Enomoto, A. S. Liado,T. Nakamigawa and G. Ringel, Super edge magic graph *SUT J Math*. 2 (1998), 105 – 109.

[4]. K. A. Sugeng, M. Miller, Properties of edge consecutive magic graphs, in: Proceeding of the Sixteenth Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms 2005, Ballarat, Australia, 2005, pp. 311 – 320.