PENDUGAAN KOMPONEN PERIODIK FUNGSI INTENSITAS BERBENTUK FUNGSI PERIODIK KALI TREN KUADRATIK SUATU PROSES POISSON NON-HOMOGEN

RAMDANI, P.[1)], I.W. MANGKU[2)], DAN R. BUDIARTI[2)]

[1)]Mahasiswa Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

[2)]Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

ABSTRAK. Pada tulisan ini dibahas pendugaan komponen periodik fungsi intensitas berbentuk fungsi periodik kali tren kuadratik suatu proses Poisson non-homogen. Diperhatikan keadaan terburuk, hanya terdapat realisasi tunggal dari proses Poisson dengan fungsi intensitas yang terdiri atas komponen periodik dikalikan dengan komponen tren kuadratik yang diamati pada interval $[0,n]$. Diasumsikan bahwa periode dari komponen periodik diketahui. Penduga komponen periodik dari fungsi intensitas tersebut telah disusun dan *Mean Square Error (MSE)* penduga telah dibuktikan konvergen menuju nol untuk $n \to \infty$. Selain itu, juga telah diformulasikan aproksimasi asimtotik bagi bias, ragam, dan *Mean Square Error (MSE)* dari penduga yang dikaji. Ditentukan juga *bandwidth* optimal asimtotik bagi penduga tersebut.

Kata kunci: proses Poisson periodik, fungsi intensitas, fungsi periodik, tren kuadratik, kekonsistenan, *Mean Square Error (MSE),* aproksimasi asimtotik, *bandwidth*

1. PENDAHULUAN

Terdapat banyak fenomena yang terjadi dalam kehidupan sehari–hari yang dapat dimodelkan dengan suatu proses stokastik. Proses stokastik mempunyai peranan yang cukup penting dalam kehidupan sehari–hari. Fenomena sederhana misalnya, proses kedatangan pelanggan ke pusat servis (bank, kantor pos, supermarket, dan sebagainya) dan proses kedatangan pengguna line telepon dapat dimodelkan dengan proses stokastik.

Pada tulisan ini pembahasan hanya dibatasi pada proses stokastik dengan waktu kontinu. Salah satu bentuk khusus dari proses stokastik dengan waktu kontinu adalah proses Poisson periodik.
Proses Poisson periodik adalah suatu proses Poisson dengan fungsi intensitas berupa fungsi periodik. Proses ini antara lain dapat digunakan untuk memodelkan proses kedatangan pelanggan ke pusat servis dengan periode satu hari. Pada proses kedatangan tersebut, fungsi intensitas lokal $\lambda(s)$ menyatakan laju kedatangan pelanggan pada waktu s.

Salah satu contoh penerapan proses Poisson periodik adalah proses tersebut dapat digunakan untuk memprediksi proses kedatangan pelanggan untuk hari berikutnya. Namun, model periodik untuk jangka panjang pada banyak kasus tidak relevan sehingga perlu mengakomodasi adanya suatu tren. Pada tulisan ini pembahasan hanya dibatasi pada fungsi intensitas yang berbentuk fungsi periodik kali tren kuadratik. Sehingga tujuan tulisan ini adalah menentukan perumusan penduga penduga komponen periodik fungsi intensitas yang berbentuk fungsi periodik kali tren kuadratik suatu proses Poisson non-homogen; membuktikan kekonsistenan penduga yang dikaji, menentukan aproksimasi asimtotik bagi bias penduga, bagi ragam penduga, dan bagi *MSE* penduga; dan menentukan *bandwitdth* optimal dari penduga.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Perumusan Masalah: Misalkan N adalah suatu proses Poisson non-homogen pada interval $[0,\infty)$ dengan fungsi intensitas λ yang tidak diketahui. Fungsi ini diasumsikan terintegralkan lokal dan merupakan hasil kali dari dua komponen, yaitu komponen periodik atau komponen siklik dengan periode $\tau > 0$ yang dikalikan dengan komponen tren kuadratik, yang juga tidak diketahui. Dengan kata lain, untuk sebarang titik $s \in [0,\infty)$, kita dapat menuliskan fungsi intensitas λ sebagai berikut

$$\lambda(s) = \left(\lambda_c^*(s)\right) as^2 \tag{1}$$

dengan $\lambda_c^*(s)$ adalah fungsi periodik dengan periode τ dan a merupakan koefisien dari tren kuadratik. Persamaan (1) dapat juga ditulis menjadi

$$\lambda(s) = \left(a\lambda_c^*(s)\right)s^2 \tag{2}$$

dengan $a\lambda_c^*(s)$ adalah fungsi periodik. Jika dinotasikan $\lambda_c(s) = a\lambda_c^*(s)$, maka persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$\lambda(s) = \left(\lambda_c(s)\right)s^2. \tag{3}$$

Karena λ_c adalah fungsi periodik, maka persamaan berikut

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s + k\tau) \tag{4}$$

berlaku untuk setiap $s \in [0,\infty)$ dan $k \in \mathbf{Z}$, dengan $\mathbf{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Karena s diketahui, maka masalah pendugaan fungsi intensitas $\lambda(s)$ dapat disederhanakan menjadi masalah pendugaan komponen periodik $\lambda_c(s)$. Karena $\lambda_c(s)$ adalah fungsi periodik dengan periode τ, maka untuk menduga $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0,\infty)$ cukup diduga nilai $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0,\tau)$.

Pada tulisan ini dipelajari penyusunan penduga konsisten bagi $\lambda_c(s)$ untuk $s \in [0,\tau)$, dengan hanya menggunakan realisasi tunggal $N(\omega)$ dari suatu proses Poisson dengan fungsi intensitas $\lambda(s)$ seperti pada persamaan (3), yang diamati pada interval $[0,n]$.

2.2. Perumusan Penduga: Penduga bagi $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0,\tau)$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])}{2h_n} \tag{5}$$

dengan $N([0,n])$ menyatakan banyaknya kejadian pada interval $[0,n]$ dan h_n adalah barisan bilangan real positif yang konvergen menuju nol, yaitu

$$h_n \downarrow 0 \tag{6}$$

untuk $n \to \infty$. Pada penduga di atas, h_n disebut *bandwidth*.

Untuk menyusun penduga diperlukan data $N([0,n])$, yaitu data realisasi proses Poisson pada interval $[0,n]$, dengan n bilangan real dan n harus relatif besar dibandingkan periode τ. Fungsi intensitas $\lambda(s)$ dapat didekati dengan rata-rata banyaknya kejadian di sekitar s atau pada interval $[s-h_n, s+h_n]$. Oleh karena itu, penduga bagi $\lambda(s)$, dinotasikan dengan $\hat{\lambda}(s)$, diperoleh dengan menentukan rata-rata banyaknya kejadian di sekitar s. Secara matematis dapat ditulis menjadi

$$\hat{\lambda}(s) = \frac{N([s-h_n, s+h_n])}{2h_n}. \tag{7}$$

Berdasarkan sifat keperiodikan λ_c pada persamaan (4), maka didapatkan penduga komponen periodik fungsi intensitas λ di sekitar $s+k\tau$, yaitu $\hat{\lambda}_c(s)$ yang menyatakan rata-rata banyaknya kejadian di sekitar $s+k\tau$ dibagi $(s+k\tau)^2$. Secara matematis dapat ditulis menjadi

$$\hat{\lambda}_c(s) = \frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{(s+k\tau)^2\, 2h_n}. \tag{8}$$

Data yang diamati pada interval $[0,n]$. Dinotasikan $n_\tau \approx \frac{n}{\tau}$ menyatakan banyaknya bilangan bulat k sehingga $s+k\tau \in [0,n]$. Sehingga didapatkan suatu penduga bagi λ_c untuk $s+k\tau \in [0,n]$, yaitu

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])}{2h_n}. \tag{9}$$

Dengan mengganti n_τ dengan $\frac{n}{\tau}$, maka diperoleh penduga komponen periodik $\lambda_c(s)$, yaitu

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])}{2h_n}$$

seperti pada persamaan (5).

2.3. Kekonvergenan *MSE* Penduga

Teorema 1: (Kekonvergenan *MSE* Penduga)
Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dan $n^2 h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$ berlaku, maka

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0 \tag{10}$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c.

Bukti: Berdasarkan Definisi MSE, teorema di atas merupakan akibat dari dua lema berikut, yaitu Lema 4 tentang ketakbiasan asimtotik dan Lema 5 tentang kekonvergenan ragam.

Lema 4: (Ketakbiasan Asimtotik)
Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi, maka

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to \lambda_c(s) \tag{11}$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c. Dengan kata lain, $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ adalah penduga tak bias asimtotik bagi $\lambda_c(s)$.

Bukti: Untuk membuktikan (11) akan diperlihatkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s). \tag{12}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (12) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+k\tau)^2} \frac{\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right)}{2h_n} \tag{13}$$

Karena $\frac{1}{2h_n}$ tidak mengandung indeks k, maka persamaan (13) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{2nh_n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+k\tau)^2} \mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right).$$

Kemudian komponen $\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right)$ pada persamaan (13) dapat dihitung sebagai berikut

$$\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right) = \int_{s+k\tau-h_n}^{s+k\tau+h_n} \lambda(x) I\left(x \in [0,n]\right) dx. \tag{14}$$

Dengan melakukan penggantian peubah $y = x-(s+k\tau)$, persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right) = \int_{-h_n}^{h_n} \lambda(y+s+k\tau) I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy. \tag{15}$$

Dengan menggunakan persamaan (3) dan (4), maka persamaan (15) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right)$$
$$= \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s+k\tau)(y+s+k\tau)^2 I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy. \tag{16}$$

Berdasarkan sifat keperiodikan (4), maka persamaan (16) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right) = \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)^2 I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy. \tag{17}$$

Kemudian kembalikan persamaan (17) ke persamaan (13) sehingga menjadi

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{2nh_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)^2 I\left(y+s+k\tau\in[0,n]\right)dy. \tag{18}$$

Persamaan (18) bisa ditulis menjadi

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)^2}{(s+k\tau)^2}I\left(y+s+k\tau\in[0,n]\right)dy. \tag{19}$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)^2}{(s+k\tau)^2}I\left(y+s+k\tau\in[0,n]\right) = \frac{n}{\tau}+O(1) \tag{20}$$

untuk $n\to\infty$. Jadi persamaan (19) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\left(\frac{n}{\tau}+O(1)\right)dy. \tag{21}$$

Dilakukan operasi perkalian pada ruas kanan persamaan (21) sehingga didapat

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy + \left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy. \tag{22}$$

Suku pertama pada ruas kanan dari persamaan (22) dapat ditulis menjadi

$$= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(y+s)+\lambda_c(s)-\lambda_c(s)\right)dy = \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)\right)dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)dy. \tag{23}$$

Untuk menunjukkan bahwa suku pertama dari persamaan (23) adalah konvergen ke nol, digunakan nilai yang lebih besar, yaitu

$$= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left|\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)\right|dy. \tag{24}$$

Berdasarkan asumsi (6) dan dengan asumsi bahwa s adalah titik Lebesgue bagi λ_c, maka kuantitas pada persamaan (24) konvergen menuju nol jika $n\to\infty$, atau dapat juga ditulis $o(1)$. Sedangkan suku kedua persamaan (23) adalah

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)dy = \lambda_c(s). \tag{25}$$

Dengan menggabungkan hasil yang diperoleh, maka

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)\right)dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)dy = \lambda_c(s)+o(1)$$

untuk $n\to\infty$. Dengan demikian diperoleh bahwa suku pertama ruas kanan persamaan (22) adalah

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy = \lambda_c(s)+o(1)$$

untuk $n\to\infty$. Sedangkan suku kedua pada ruas kanan persamaan (22) adalah

$$\begin{aligned}&\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy\\ &= O\left(\frac{1}{n}\right)\left(\lambda_c(s)+o(1)\right)\\ &= O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= o(1)\end{aligned}$$

untuk $n\to\infty$. Dengan menggabungkan hasil yang diperoleh dari suku pertama dan kedua dari persamaan (22), maka diperoleh

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s)+o(1)$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian Lema 4 terbukti.

Lema 5: (Kekonvergenan Ragam)
Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi, λ_c terbatas di sekitar s dan $n^2 h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0 \tag{26}$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti : Karena $h_n \downarrow 0$ jika $n \to \infty$, maka untuk nilai n yang cukup besar, interval $[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ dan $[s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n]$ tidak tumpang tindih atau tidak *overlap* asalkan $k \neq j$. Akibatnya, berdasarkan sifat inkremen bebas dari proses Poisson, diperoleh bahwa $N[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ dan $N[s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n]$ untuk $k \neq j$ adalah dua peubah acak bebas. Sehingga dapat diperoleh

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^4} Var\left(N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right)\right). \tag{27}$$

Karena N adalah suatu peubah acak Poisson, maka ragam N sama dengan nilai harapan N, sehingga persamaan (27) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^4} \mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right). \tag{28}$$

Perhatikan persamaan (17) menyatakan bahwa

$$\mathbf{E}N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n]\right)$$
$$= \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)^2 I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy.$$

Dengan demikian persamaan (28) dapat ditulis menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^4} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)^2 I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy. \tag{29}$$

Sekarang kita tulis persamaan (29) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s) \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)^2}{(s+k\tau)^4} I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) dy. \tag{30}$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)^2}{(s+k\tau)^4} I\left(y+s+k\tau \in [0,n]\right) = \frac{\pi^2}{6\tau^2} + o(1) \tag{31}$$

untuk $n \to \infty$. Maka persamaan (30) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\left(\frac{\pi^2}{6\tau^2} + o(1)\right) dy. \tag{32}$$

Persamaan (32) diuraikan menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\pi^2}{12n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s) dy + o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s) dy. \tag{33}$$

Karena λ_c terbatas di sekitar s, maka terdapat suatu konstanta K sehingga

$$\lambda_c(s) \le K \tag{34}$$

untuk semua $s \in [-h_n, h_n]$. Kemudian kedua ruas dari pertidaksamaan (34) diintegralkan untuk $s \in [-h_n, h_n]$ dan dikalikan $\frac{1}{2h_n}$, maka

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)ds \le \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}K\ ds. \tag{35}$$

Ruas kanan dari pertidaksamaan (35) adalah

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}K\ ds = K. \tag{36}$$

Maka pertidaksamaan (35) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)ds \le K.$$

Karena K merupakan konstanta, maka dapat ditulis K sama dengan $O(1)$. Sehingga suku pertama persamaan (33) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\pi^2}{12n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy = \frac{\pi^2}{12n^2h_n}O(1)=O\left(\frac{1}{n^2h_n}\right). \tag{37}$$

Berdasarkan asumsi pada Lema 5, bahwa $n^2h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka persamaan (37) sama dengan $o(1)$ untuk $n \to \infty$. Sedangkan suku kedua dari ruas kanan persamaan (33) dapat ditulis menjadi

$$\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)O(1) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2h_n}\right).. \tag{38}$$

Berdasarkan asumsi pada Lema 5, bahwa $n^2h_n \to \infty$, untuk $n \to \infty$, maka ruas kanan persamaan (38) konvergen ke nol atau sama dengan $o(1)$ untuk $n \to \infty$. Dengan menggabungkan hasil dari persamaan (37) dan (38) diperoleh

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian Lema 5 terbukti.

Dari Lema 4 telah diperoleh bahwa $\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to \lambda_c(s)$, yang berarti untuk $n \to \infty$ maka $\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) - \lambda_c(s) \to 0$. Dari Lema 5 telah diperoleh bahwa $Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0$ untuk $n \to \infty$. Akibatnya dengan menggunakan definisi *MSE* (Definisi 22) akan diperoleh

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) + \left(Bias\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)\right)^2 \to 0$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian Teorema 1 terbukti.

2.4. Aproksimasi Asimtotik bagi Bias, Ragam, dan *MSE* Penduga

Teorema 2: (Aproksimasi Asimtotik bagi Bias)

Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi , $nh_n^2 \to \infty$, dan λ_c memiliki turunan kedua $\lambda_c^{''}$ berhingga pada *s*, maka

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c^{''}(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right) \tag{39}$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti: Berdasarkan bukti Lema 4 mengenai ketakbiasan asimtotik, maka nilai harapan dari $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ dapat dituliskan seperti pada persamaan (21). Karena λ_c memiliki turunan kedua pada *s* maka λ_c kontinu pada *s*, mengakibatkan λ_c memiliki nilai yang terbatas di sekitar *s*. Dengan Formula Young (Lema 2), maka diperoleh

$$\lambda_c(x) = \lambda_c(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_c^k(s)}{k!}(x-s)^k + o\left(|x-s|^2\right)$$

untuk $x \to s$. Bila diuraikan menjadi

$$\lambda_c(x) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c^{'}(s)}{1!}(x-s) + \frac{\lambda_c^{''}(s)}{2!}(x-s)^2 + o\left(|x-s|^2\right)$$

untuk $x \to s$.

Misalkan $x = y + s$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\lambda_c(y+s) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c^{'}(s)}{1!}(y) + \frac{\lambda_c^{''}(s)}{2!}(y)^2 + o\left(y^2\right)$$

untuk $y \to 0$. Sehingga kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\,dy \\
&= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \left(\lambda_c(s) + \frac{\lambda_c^{'}(s)}{1!}(y) + \frac{\lambda_c^{''}(s)}{2!}(y)^2 + o\left(y^2\right)\right)dy \\
&= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s)\,dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c^{'}(s)\,y\,dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \frac{\lambda_c^{''}(s)}{2}y^2\,dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} o\left(y^2\right)dy
\end{aligned} \tag{40}$$

untuk $n \to \infty$. Suku pertama dari ruas kanan pada persamaan (40) dapat diuraikan menjadi

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s)\,dy = \lambda_c(s). \tag{41}$$

Suku kedua dari ruas kanan pada persamaan (40) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c^{'}(s)\,y\,dy &= \frac{\lambda_c^{'}(s)}{2h_n}\left(\frac{1}{2}y^2\Big]_{-h_n}^{h_n}\right) \\
&= \frac{\lambda_c^{'}(s)}{2h_n}\left(\frac{1}{2}\left(h_n^2 - h_n^2\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Kemudian suku ketiga dari ruas kanan pada persamaan (40) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \frac{\lambda_c^{''}(s)}{2}y^2\,dy &= \frac{\lambda_c^{''}(s)}{4h_n}\left(\frac{1}{3}h_n^3\Big]_{-h_n}^{h_n}\right) \\
&= \frac{\lambda_c^{''}(s)}{4h_n}\left(\frac{1}{3}\left(h_n^3 + h_n^3\right)\right) \\
&= \frac{\lambda_c^{''}(s)}{4h_n}\left(\frac{2h_n^3}{3}\right) \\
&= \frac{\lambda_c^{''}(s)}{6}h_n^2.
\end{aligned} \tag{43}$$

Suku terakhir dari ruas kanan pada persamaan (40) dapat diuraikan menjadi

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} o\left(y^2\right)dy = o\left(h_n^2\right) \tag{44}$$

untuk $n \to \infty$. Kemudian hasil uraian dari keempat suku pada ruas kanan pada persamaan (40) digabungkan, maka persamaan (40) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\,dy = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c^{''}(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)$$

untuk $n \to \infty$.

Sehingga ruas kanan persamaan (21) menjadi

$$\left(\lambda_c(s)+\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\left(\lambda_c(s)+\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (45)$$

untuk $n\to\infty$. Berdasarkan asumsi $nh_n^2\to\infty$, maka suku kedua dari ruas kanan persamaan (45), yaitu $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sama dengan $o\left(h_n^2\right)$, untuk $n\to\infty$. Sehingga persamaan (45) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\lambda_c(s)+\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)$$

untuk $n\to\infty$. Dengan demikian Teorema 2 terbukti.

Teorema 3: (Aproksimasi Asimtotik bagi Ragam)
Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi, maka

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right) \quad (46)$$

untuk $n\to\infty$ dan asalkan *s* adalah titik Lebesgue bagi λ_c.

Bukti: Berdasarkan bukti Lema 5 mengenai kekonvergenan ragam, maka ragam dari $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ dapat ditulis seperti pada persamaan (33). Pada bukti Lema 4 telah ditunjukkan bahwa $\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)dy=\lambda_c(s)+o(1)$, jika $n\to\infty$.

Kemudian suku kedua ruas kanan dari persamaan (33) sama dengan persamaan (38) dan konvergen menuju nol. Dengan demikian persamaan (33) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)&=\frac{\pi^2}{12n^2h_n}\left(\lambda_c(s)+o(1)\right)+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\\&=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\\&=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right),\end{aligned}$$

untuk $n\to\infty$. Dengan demikian Teorema 3 terbukti.

Teorema 4: (Aproksimasi Asimtotik bagi *MSE*)
Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi dan λ_c memiliki turunan kedua λ_c'' berhingga pada *s*, maka

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)+o\left(h_n^4\right) \quad (47)$$

untuk $n\to\infty$.

Bukti: Berdasarkan definisi *MSE* maka

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\left(Bias\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)\right)^2+Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \quad (48)$$

dengan $Bias\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\mathbf{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)-\lambda_c(s)$. Dengan menggunakan Teorema 2 dan Teorema 3 diperoleh

$$Bias\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)$$

dan

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right).$$

Sehingga ruas kanan persamaan (48) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
&=\left(\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)\right)^2+\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\\
&=\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4+\frac{\lambda_c''(s)}{3}h_n^2o\left(h_n^2\right)+o\left(h_n^4\right)+\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)
\end{aligned}\tag{49}$$

untuk $n\to\infty$. Karena λ_c memiliki turunan kedua λ_c'' berhingga pada s, maka $\frac{\lambda_c''(s)}{3}=O(1)$, akibatnya suku kedua pada ruas kanan persamaan (49) bernilai $o\left(h_n^4\right)$ untuk $n\to\infty$, sehingga diperoleh persamaan (47). Dengan demikian Teorema 4 terbukti.

2.5. Penentuan *Bandwidth* Optimal Asimtotik: Ukuran terbaik dari suatu penduga relatif terhadap kesalahannya adalah penduga dengan *MSE* yang bernilai minimum. Misalkan $M\left(h_n\right)$ yang merupakan fungsi dari h_n, menyatakan suku utama dari $MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)$, yaitu

$$M\left(h_n\right)=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4.$$

Dapat diperoleh nilai h_n yang meminimumkan $M\left(h_n\right)$ untuk n tetap, dengan membuat turunan pertama $M\left(h_n\right)$ sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&M'\left(h_n\right)=0\\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n^2}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{9}h_n^3=0\\
&\Leftrightarrow \frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{9}h_n^3=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2h_n^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{9}h_n^5=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2}\\
&\Leftrightarrow h_n^5=\frac{9\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2\left(\lambda_c''(s)\right)^2}\\
&\Leftrightarrow h_n=\sqrt[5]{\frac{9\pi^2\lambda_c(s)}{12n^2\left(\lambda_c''(s)\right)^2}}\\
&\Leftrightarrow h_n=\sqrt[5]{\frac{9\pi^2\lambda_c(s)}{12\left(\lambda_c''(s)\right)^2}}n^{-\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperiksa apakah h_n yang diperoleh meminimumkan $M\left(h_n\right)$, dengan memeriksa turunan kedua dari $M\left(h_n\right)$, yaitu

$$M''\left(h_n\right)=\frac{\pi^2\lambda_c(s)}{6n^2h_n^3}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{3}h_n^2.$$

Telah kita ketahui bahwa nilai $\pi > 0$, $\lambda_c(s) > 0$, $(\lambda_c''(s))^2 > 0$, $n^2 > 0$, dan *bandwidth* yang bernilai positif, sehingga

$$M''(h_n) > 0.$$

Dengan demikian h_n yang diperoleh meminimumkan $M(h_n)$. Sehingga nilai optimal bagi *bandwidth* adalah

$$h_n = \sqrt[5]{\frac{9\pi^2 \lambda_c(s)}{12(\lambda_c''(s))^2}} n^{-\frac{2}{5}}.$$

Bandwidth optimal yang diperoleh di atas bersifat asimtotik karena kita tidak mengetahui nilai $\lambda_c''(s)$, sehingga konstanta

$$\sqrt[5]{\frac{9\pi^2 \lambda_c(s)}{12(\lambda_c''(s))^2}}$$

juga tidak diketahui.

3. KESIMPULAN

Karena s diketahui, maka masalah pendugaan fungsi intensitas $\lambda(s)$ untuk $s \in [0,\infty)$ dapat disederhanakan menjadi masalah pendugaan komponen periodik $\lambda_c(s)$ untuk $s \in [0,\tau)$. Penduga bagi $\lambda_c(s)$ di titik $s \in [0,\tau)$ adalah

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{\tau}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+k\tau)^2} \frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n] \cap [0,n])}{2h_n}.$$

Dari hasil kajian yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

(i) $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ adalah penduga tak bias asimtotik bagi $\lambda_c(s)$ dan $Var(\hat{\lambda}_{c,n}(s)) \to 0$ untuk $n \to \infty$, sehingga diperoleh $MSE(\hat{\lambda}_{c,n}(s)) \to 0$ untuk $n \to \infty$.

(ii) Aproksimasi asimtotik bagi bias penduga adalah

$$\mathbf{E}(\hat{\lambda}_{c,n}(s)) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6} h_n^2 + o(h_n^2) \text{ untuk } n \to \infty.$$

(iii) Aproksimasi asimtotik bagi ragam penduga adalah

$$Var(\hat{\lambda}_{c,n}(s)) = \frac{\pi^2 \lambda_c(s)}{12n^2 h_n} + o\left(\frac{1}{n^2 h_n}\right)$$

untuk $n \to \infty$.

(iv) Aproksimasi asimtotik bagi *MSE* penduga adalah

$$MSE(\hat{\lambda}_{c,n}(s)) = \frac{\pi^2 \lambda_c(s)}{12n^2 h_n} + \frac{(\lambda_c''(s))^2}{36} h_n^4 + o\left(\frac{1}{n^2 h_n}\right) + o(h_n^4)$$

untuk $n \to \infty$.

(v) *Bandwidth* optimal asimtotik yang meminimumkan aproksimasi asimtotik dari *MSE* penduga adalah

$$h_n = \sqrt[5]{\frac{9\pi^2 \lambda_c(s)}{12(\lambda_c''(s))^2}} n^{-\frac{2}{5}}.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Browder, A. 1996. *Mathematical Analysis: An Introduction. Springer.* New York.

[2] Cressie, N. A. C. 1993. *Statistic for Spatial Data.* Revised Edition. Wiley. New York.

[3] Dudley, R. M. 1989. *Real Analysis and Probability.* Wadsworth & Brooks. Califronia.

[4] Grimmet, G. R. and **D. R. Stirzaker.** 1992. *Probability and Random Processes.* Ed. ke-2. Clarendon Press. Oxford.

[5] Hogg, R.V., A.T. Craig, J.W. McKean. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics.* Ed. ke-6. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey.

[6] Mangku, I. W. 2001. *Estimating the Intensity of a Cyclic Poisson Process* (Ph.D.Thesis). University of Amsterdam. Amsterdam.

[7] Purcell, E. J. and **D. Verberg.** 1998. *Kalkulus dan Geometri Analisis.* Jilid 2. Ed. ke-5. Erlangga, Jakarta.