GRUP AUTOMORFISME GRAF KIPAS DAN GRAF KIPAS GANDA

Siti Rohmawati [1], Dr.Agung Lukito, M.S. [2]

[1] Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Jalan Ketintang Gedung C1 Surabaya 60231

[1] Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
Jalan Ketintang Gedung C1 Surabaya 60231

email : siti_rohmawati@yahoo.com [1], gung_lukito@yahoo.co.id [2]

ABSTRAK

Isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri disebut automorfisme graf G. Himpunan semua automorfisme graf G, dinotasikan dengan $\mathcal{A}(G)$, membentuk grup di bawah operasi komposisi fungsi yang dinotasikan dengan $Aut(G)$ disebut grup automorfisme graf G.

Permasalahan yang diangkat dalam penulisan ini adalah bagaimana grup automorfisme graf kipas dan graf kipas ganda. Grup automorfisme graf kipas dengan 3 titik adalah grup simetri berorder-6, grup automorfisme graf kipas dengan 4 titik adalah grup abelian berorder-4, grup automorfisme graf kipas dengan 5 titik atau lebih adalah grup semetri berorder-2. Grup automorfisme graf kipas ganda dengan 4 titik adalah grup abelian berorder-4, grup automorfisme graf kipas ganda dengan 5 titik adalah grup dihedral berorder-8, grup automorfisme graf kipas dengan 6 titik atau lebih adalah grup abelian berorder-4.

Kata Kunci: grup automorfisme graf, graf kipas, graf kipas ganda, grup simetri, grup abelian, grup dihedral.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapanya diantaranya dalam menyelesaikan postman problem yaitu menentukan jarak terdekat yang dilalui oleh seorang tukang post. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*vertex*) dan sisi (*edge*).

Dalam teori graf, terdapat materi homomorfisme graf, isomorfisme graf, dan automorfisme graf. Dalam penulisan ini automorfisme graf akan dikembangkan lebih khusus yaitu bagaimana automorfisme graf kipas dan graf kipas ganda, selanjutnya akan diselidiki bagaimana grup automorfisme graf tersebut.

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui grup automorfisme graf kipas dan graf kipas ganda.

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode literatur.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut **titik** dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut **sisi** sedemikian hingga setiap elemen (e) dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G [1].

2.1.2 Terhubung Langsung (Adjacent) dan Terkait Langsung (Incident)

Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = (u, v)$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sebuah sisi di G. Maka titik u dan titik v disebut terhubung langsung (*adjacent*) di G; sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v di G; u dan v titik-titik akhir sisi e; sisi e terkait (*incident*) dengan titik u dan juga titik v [1].

2.1.3 Derajat Titik

Derajat titik v di graf G ditulis dengan $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v [4].

2.1.4 Permutasi

Diberikan sebanyak n obyek berbeda. Sebuah permutasi-k dari n objek, $k \leq n$ dan $k, n \in \mathbb{N}$ adalah sebuah jajaran dari k objek yang urutannya diperhatikan.

Misalnya diberikan tiga objek berbeda, katakan a, b, dan c. Jajaran seperti ab adalah permutasi-2 dari tiga objek tersebut [2].

2.1.5 Isomorfisme Graf

Dua graph G dan H dikatakan Isomorfisme (*Isomorfik*), ditulis $G \cong H$, jika:

(i) terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$

(ii) banyak sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G, sama dengan banyak sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi satu-satu dengan titik u dan titik v [1].

2.1.6 Automorfisme Graf

Automorfisme graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme dari G merupakan permutasi himpunan titik-titik, $V(G)$, atau sisi-sisi graf G, $E(G)$. Jika φ adalah automorfisme graf G dan $v \in V(G)$ maka $deg\ \varphi(v) = deg\ v$ [4].

$deg\ \varphi(v)$ adalah banyak sisi di G *(kodomain)* yang terkait langsung (*incident*) dengan $\varphi(v)$, $\varphi(v)$ adalah hasil pemetaan v dari G (*domain*) ke G (*kodomain*).

2.1.7 Graf Komplit

Sebuah graf komplit (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi [1].

2.1.8 Graf Lintasan

Graf yang berupa lintasan dengan n titik disebut graf lintasan dan dilambangkan dengan P_n [1].

2.1.9 Graf Kipas

Graf kipas F_n ($n \geq 2$) adalah jumlah graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n, yaitu $F_n=K_1+P_n$, diperoleh dengan menghubungkan semua titik dari P_n, ke titik K_1, masing-masing dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi [7].

Dalam penulisan ini titik K_1 dimisalkan dengan v_0 ,dan dinyatakan sebagai titik pusat graf kipas.

2.1.10 Graf Kipas Ganda

Graf kipas ganda dF_n ($n \geq 2$) adalah jumlah graf komplit $2K_1$ dan graf lintasan P_n, yaitu $F_n=2K_1+P_n$, diperoleh dengan menghubungkan semua titik pada P_n, ke dua titik tambahan ($2K_1$), masing-masing dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+2)$ titik dan $(3n-1)$ sisi [7].

Dalam penulisan ini titik $2K_1$ dimisalkan dengan v_0 dan $v_{0'}$, dan dinyatakan sebagai titik pusat graf kipas ganda.

2.2 Operasi Biner

Operasi biner * pada himpunan S adalah aturan mengawankan setiap pasangan terurut $(a , b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen di S [9].

Berdasarkan definisi tersebut dapat disimpulkan apabila setiap dua elemen $a,b \in S$ maka $(a*b) \in S$. atau dapat pula dikatakan bahwa operasi * merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S. Operasi * pada S bersifat tertutup.

2.3 Grup

2.3.1 Definisi Grup

Diketahui G himpunan dan $*$ operasi biner pada G. Himpunan G disebut grup terhadap operasi $*$ jika dan hanya jika memenuhi empat aksioma berikut :

1. G bukan himpunan kosong
2. Untuk setiap $a,b,c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Terdapat $e \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$
4. Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$.

Aksioma 2 disebut juga dengan sifat asosiatif. $e \in G$ pada aksioma 3 disebut dengan elemen identitas. $a' \in G$ pada aksioma 4 disebut dengan invers a terhadap operasi $*$.

Teorema 2.1
Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan S_Ω adalah himpunan semua fungsi bijektif dari Ω ke Ω. S_Ω adalah grup dibawah operasi komposisi fungsi.

2.3.2 Order Grup

Diketahui *(G, *)* grup. Order dari grup *(G, *)* adalah banyaknya elemen grup *(G, *)*, dinyatakan dengan $|G|$.

2.3.3 Grup Abelian

Diketahui *(G, *)* grup. Grup *(G, *)* disebut grup abelian, atau grup komutatif jika hukum komutatif berlaku: yakni, jika $ab=ba$ untuk setiab $a,b \in G$

2.3.4 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan S_Ω adalah himpunan semua fungsi bijektif dari Ω ke Ω (memuat permutasi Ω). S_Ω dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup (Berdasarkan teorema 2.1). Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω [6].

Pada kasus khusus $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $(S_\Omega, \circ)$ merupakan grup simetri yang memuat $n!$ elemen, dinotasikan dengan S_n, yaitu grup simetri berorder-$n!$.

2.3.5 Grup Dihedral

Diketahui G himpunan simetri-simetri dari segi n-beraturan, untuk setiap n adalah anggota bilangan bulat positif $n \geq 3$, dan $\circ$ operasi komposisi pada G. $(G, \circ)$ membentuk grup yang disebut grup dihedral berorder-$2n$, dinotasikan D_n.

2.4 Grup Automorfisme Graf Sederhana

Himpunan semua automorfisme graf G, dinotasikan dengan $\mathcal{A}(G)$, membentuk grup di bawah operasi komposisi fungsi yang dinotasikan dengan $Aut(G)$ [3].

3. PEMBAHASAN

3.1 Automorfisme Graf Kipas

a. Teorema 3.1 :

Terdapat 6 automorfisme graf kipas F_2, yaitu:

$\varphi_1 = (v_0)(v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_2 = (v_0\ v_1)(v_2)$

$\varphi_3 = (v_0)(v_1\ v_2)$ $\quad \varphi_4 = (v_0\ v_2)(v_1)$

$\varphi_5 = (v_0\ v_2\ v_1)$ $\quad \varphi_6 = (v_0\ v_1\ v_2)$

dan membentuk grup simetri berorder-6 (S_3).

Bukti :

Graf kipas F_2 terdiri dari tiga titik. Misalkan $V(F_2) = \{v_0, v_1, v_2\}$. Jelaslah tiap-tiap titik berderajat 2, $deg\ \varphi(v_n) = deg\ v_n = 2$, $v_n \in V(F_2)$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 6. Fungsi-fungsi tersebut semuanya adalah automorfisme.

1. $\varphi_1 = (v_0)(v_1)(v_2)$

Fungsi φ_1 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa:

$(v_0, v_2) \in E(F_2) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_2)) \in E(F_2)$

Begitu pula untuk sisi $(v_0, v_1), (v_1, v_2) \in E(F_2)$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_1 juga anggota $E(F_2)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:

$\varphi_2 = (v_0\ v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_3 = (v_0)(v_1\ v_2)$

$\varphi_4 = (v_0\ v_2)(v_1)$ $\quad \varphi_5 = (v_0\ v_2\ v_1)$

$\varphi_6 = (v_0\ v_1\ v_2)$

$\mathcal{A}(F_2) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau $(\mathcal{A}(F_2), \circ)$ merupakan grup simetri yang memuat $3!$ elemen, dinotasikan dengan S_3, yaitu grup simetri berorder-*6*.

Jadi, grup automorfisme graf kipas F_2 adalah grup simetri berorder-6 (S_3).

b. Teorema 3.2 :

Terdapat 4 automorfisme graf kipas F_3, yaitu:

$\varphi_1 = (v_0)(v_1)(v_2)(v_3)$ $\quad \varphi_2 = (v_0)(v_1\ v_3)(v_2)$

$\varphi_3 = (v_0\ v_2)(v_1)(v_3)$ $\quad \varphi_4 = (v_0\ v_2)(v_1\ v_3)$

dan membentuk grup abelian berorder-4.

Bukti :

Graf kipas F_3 terdiri dari empat titik; misalkan, $V(F_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 24. Tetapi, yang merupakan automorfisme adalah 4 fungsi, yaitu:

1. $\varphi_1 = (v_0)(v_1)(v_2)(v_3)$

Fungsi φ_1 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa:

$(v_0, v_2) \in E(F_2) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_2)) \in E(F_2)$

Begitu pula untuk sisi (v_0, v_1), (v_0, v_3), (v_1, v_2), dan $(v_2, v_3) \in E(F_2)$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_1 juga anggota $E(F_2)$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:

$\varphi_2 = (v_0)(v_1\ v_3)(v_2)$ $\quad \varphi_3 = (v_0\ v_2)(v_1)(v_3)$

$\varphi_4 = (v_0\ v_2)(v_1\ v_3)$

Tabel 3.1: Tabel Cayley $((F_3), \circ)$

$\circ$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

Berdasarkan tabel 3.1

$$\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_m \ , \forall\ \varphi_m , \varphi_n \in \mathcal{A}(F_3)$$

$\mathcal{A}(F_3) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ terhadap operasi komposisi fungsi ° atau $(\mathcal{A}(F_3), \circ)$ merupakan grup abelian dengan 4 elemen.

Jadi, grup automorfisme graf kipas F_3 adalah grup abelian berorder-4.

c. Teorema 3.3 :

Terdapat 2 automorfisme graf kipas F_n untuk $n \geq 4$ yaitu:

a. *Untuk n genap:*
   $\varphi_1=(v_0)(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ldots(v_n)$ *dan*
   $\varphi_2=(v_0)(v_1\ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})\ldots(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1})$

b. *Untuk n ganjil:*
   $\varphi_1=(v_0)(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ldots(v_n)$ *dan*
   $\varphi_2=(v_0)(v_1\ v_n)\ (v_2\ v_{n-1})\ \ldots\ (v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1})(v_{\frac{n+1}{2}})$

   dan membentuk grup simetri berorder-2 (S_2).

Bukti :

a. Untuk n genap:
   - ❖ $\varphi_1=(v_0)(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ldots(v_n)$
     fungsi identitas adalah automorfisme.
   - ❖ $\varphi_2 = (v_0)(v_1\ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})\ldots(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1})$
     Fungsi φ_2 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa untuk $n \geq 4$:
     $(v_0, v_1) \in E(F_n) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \in E(F_n)$
     Begitu pula untuk sisi (v_0,v_2), …, (v_0,v_n), (v_1,v_2), …, (v_{n-1},v_n) $\in E(F_n)$ dengan $n \geq 4$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_2 juga anggota $E(F_n)$ dengan $n \geq 4$.

a. Untuk n ganjil:
   - ❖ $\varphi_1=(v_0)(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ldots(v_n)$
     fungsi identitas adalah automorfisme.
   - ❖ $\varphi_2 = (v_0)(v_1\ v_n)(v_2\ v_{n-1})\ldots\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$
     Fungsi φ_2 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa untuk $n \geq 4$:
     $(v_0, v_1) \in E(F_n) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \in E(F_2)$
     Begitu pula untuk sisi (v_0,v_2), …, (v_0,v_n), (v_1,v_2), (v_2,v_3), …, (v_{n-1},v_n) $\in E(F_n)$ dengan $n \geq 4$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_2 juga anggota $E(F_n)$ dengan $n \geq 4$.

$\mathcal{A}(F_n) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ terhadap operasi komposisi fungsi ° atau $(\mathcal{A}(F_n), \circ)$ untuk $n \geq 4$ merupakan grup simetri yang memuat $2!$ elemen, dinotasikan dengan S_2, yaitu grup simetri berorder-2.

Jadi, grup automorfisme graf kipas F_n untuk $n \geq 4$ adalah grup simetri berorder-2 (S_2).

3.2 Automorfisme Graf Kipas Ganda

a. Teorema 3.4 :

Terdapat 4 automorfisme graf kipas ganda dF_2 yaitu:

$\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_2 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ v_2)$
$\varphi_3 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ v_2)$

dan membentuk grup abelian berorder-4.

Bukti :

Graf kipas ganda dF_2 isomorfik dengan graf kipas F_3. Graf kipas ganda dF_2 terdiri dari empat titik; misalkan, $V(dF_2) = \{v_0, v_{0'}, v_1, v_2\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 24. Tetapi, yang merupakan automorfisme adalah 4 fungsi, yaitu:

1. $\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)$
   Fungsi φ_1 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa:
   $(v_0, v_2) \in E(dF_2) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_2)) \in E(dF_2)$
   Begitu pula untuk sisi (v_0,v_1), $(v_{0'},v_1)$, $(v_{0'},v_2)$, dan (v_1,v_2) $\in E(dF_2)$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_1 juga anggota $E(dF_2)$.

   Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:

$\varphi_2 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ v_2)$ $\quad \varphi_3 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)$
$\varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ v_2)$

Tabel 3.2: Tabel Cayley *$((dF_2), \circ)$*

°	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

Berdasarkan tabel 3.2

$$\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_m \ , \forall\ \varphi_m , \varphi_n \in \mathcal{A}(dF_2)$$

$\mathcal{A}(dF_2) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ terhadap operasi komposisi fungsi ° atau $(\mathcal{A}(dF_2), \circ)$ merupakan grup abelian dengan 4 elemen.

Jadi, grup automorfisme graf kipas dF_2 adalah grup abelian berorder-4.

b. Teorema 3.5 :

Terdapat 8 automorfisme graf kipas ganda dF_3 yaitu:

$\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)$ $\quad \varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)$
$\varphi_3 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ v_3)(v_2)$ $\quad \varphi_4 = (v_0\ v_1)(v_{0'}\ v_3)(v_2)$
$\varphi_5 = (v_0\ v_3)(v_{0'}\ v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_6 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ v_3)(v_2)$
$\varphi_7 = (v_0\ v_3\ v_{0'}\ v_1)(v_2)$ $\quad \varphi_8 = (v_0\ v_1\ v_{0'}\ \ v_3)(v_2)$

dan membentuk grup dihedral berorder-8 (D_4).

Bukti :

Graf kipas ganda dF_3 terdiri dari lima titik; misalkan, $V(dF_3) = \{v_0, v_{0'}, v_1, v_2, v_3\}$. Banyak permutasi yang mungkin adalah 120. Tetapi, yang merupakan automorfisme adalah 8 fungsi, yaitu:

1. $\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)$
   Fungsi φ_1 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa:
   $(v_0, v_1) \in E(dF_3) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \in E(dF_3)$
   Begitu pula untuk sisi (v_0, v_2), (v_0, v_3), $(v_{0'}, v_1)$, $(v_{0'}, v_2)$, $(v_{0'}, v_3)$, (v_1, v_2) dan $(v_2, v_3) \in E(dF_3)$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_1 juga anggota $E(dF_3)$.
   Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:

$\varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)$ $\varphi_3 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ v_3)(v_2)$
$\varphi_4 = (v_0\ v_1)(v_{0'}\ v_3)(v_2)$ $\varphi_5 = (v_0\ v_3)(v_{0'}\ v_1)(v_2)$
$\varphi_6 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ v_3)(v_2)$ $\varphi_7 = (v_0\ v_3\ v_{0'}\ v_1)(v_2)$
$\varphi_8 = (v_0\ v_1\ v_{0'}\ v_3)(v_2)$

φ_1, φ_3, φ_7, φ_8 adalah automorfisme yang diperoleh dari proses rotasi.

φ_2, φ_4, φ_5, φ_6 adalah automorfisme yang diperoleh dari proses refleksi.

$\mathcal{A}(dF_3) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8\}$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau $(\mathcal{A}(dF_3), \circ)$ merupakan grup dihedral dengan 8 elemen, dinotasikan dengan D_4, yaitu grup dihedral berorder-8.

Jadi, grup automorfisme graf kipas dF_3 adalah grup dihedral berorder-8 (D_4).

c. Teorema 3.6 :

Terdapat 4 automorfisme graf kipas ganda dF_n untuk $n \geq 4$, yaitu:

a. Untuk n genap:

$\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
$\varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
$\varphi_3 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$
$\varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$

b. Untuk n ganjil:

$\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots(v_n)$
$\varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
$\varphi_3 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$
$\varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n+1}{2}-1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}+1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$

dan membentuk grup abelian berorder-4.

Bukti :

a. Untuk n genap:
- ❖ $\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
  Fungsi identitas adalah automorfisme.
- ❖ $\varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
  Fungsi φ_2 adalah automorfisme karena dapat diperlihatkan bahwa untuk $n \geq 4$:
  $(v_0, v_1) \in E(dF_n) \rightarrow (\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \in E(dF_n)$
  Begitu pula untuk sisi (v_0, v_2), …, (v_0, v_n), $(v_{0'}, v_1)$, $(v_{0'}, v_2)$, …,$(v_{0'}, v_n)$, (v_1, v_2), …, $(v_{n-1}, v_n) \in E(dF_n)$ dengan $n \geq 4$ maka pemetaan sisi-sisi tersebut oleh φ_2 juga anggota $E(dF_n)$, $n \geq 4$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:

$\varphi_3 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$
$\varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1}\right)$

b. Untuk n ganjil:
- ❖ $\varphi_1 = (v_0)(v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
  fungsi identitas adalah automorfisme.
- ❖ $\varphi_2 = (v_0\ v_{0'})(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)\ \dots\ (v_n)$
  Fungsi $\varphi_2 = (v_0)(v_1\ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})\dots(v_{\frac{n}{2}}\ \ v_{\frac{n}{2}+1})$ adalah automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa sisi $(v_0, v_1) \in E(dF_n)$ dengan $n \geq 4$ maka $(\varphi(v_0), \varphi(v_1)) = (v_{0'}, v_1) \in E(dF_n)$ artinya terdapat sisi $(v_{0'}, v_1)$ pada graf itu sendiri. Begitu pula untuk sisi (v_0, v_2), …, (v_0, v_n), $(v_{0'}, v_1)$, $(v_{0'}, v_2)$, …,$(v_{0'}, v_n)$, (v_1, v_2), …, $(v_{n-1}, v_n) \in E(dF_n)$ dengan $n \geq 4$ maka bayangan dari sisi-sisi tersebut oleh φ_2 juga ada di $E(dF_n)$ dengan $n \geq 4$.

Hal yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi lainnya dibawah ini, yaitu:
- ❖ $\varphi_3 = (v_0)(v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n+1}{2}+1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$
- ❖ $\varphi_4 = (v_0\ v_{0'})(v_1\ \ v_n)(v_2\ \ v_{n-1})(v_3\ \ v_{n-2})(v_4\ \ v_{n-3})\ \dots\left(v_{\frac{n+1}{2}+1}\ \ v_{\frac{n+1}{2}-1}\right)\left(v_{\frac{n+1}{2}}\right)$

Tabel 3.3: Tabel Cayley $((dF_{n\geq 4}), \circ)$

$\circ$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

Berdasarkan tabel 3.3

$$\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_m\ , \forall\ \varphi_m\ , \varphi_n\ \in \mathcal{A}(dF_{n\geq 4})$$

$\mathcal{A}(dF_n) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8\}$ terhadap operasi komposisi fungsi $\circ$ atau $(\mathcal{A}(dF_n), \circ)$, $n \geq 4$ merupakan grup abelian dengan 4 elemen.

Jadi, grup automorfisme graf kipas dF_n untuk $n \geq 4$ adalah grup abelian berorder-4.

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

- Grup automorfisme graf kipas dengan 3 titik adalah grup simetri berorder-6 (S_3).
- Grup automorfisme graf kipas dengan 4 titik adalah grup abelian berorder-4.
- grup automorfisme graf kipas dengan 5 titik atau lebih adalah grup simetri berorder-2 (S_2).
- Grup automorfisme graf kipas ganda dengan 4 titik adalah grup abelian berorder-4.
- Grup automorfisme graf kipas ganda dengan 5 titik adalah grup dihedral berorder-8 (D_4).
- Grup automorfisme graf kipas ganda dengan 6 titik atau lebih adalah grup abelian berorder-4.

4.2 Saran

Dalam penulisan ini hanya dicari grup automorfisme graf kipas dan graf kipas ganda. Selain graf tersebut masih banyak graf-graf yang lain. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkan dengan mencari grup automorfisme graf-graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

[2] Budayasa, Ketut. 2008. *Matematika Diskrit.* Surabaya : Unesa University Press Surabaya.

[3] Cameron,Peter J. 2001. *Automorphisms of graphs*. Draft. Queen Mary: University of London [Online]. Tersedia di : http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.109.1920&rep=rep1&type=pdf. [Diakses Tanggal 24 April 2012].

[4] Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition*. California: Wadsworth, Inc.

[5] Damayanti, Reni Tri. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang [Online]. Tersedia di http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/chapter_iii/07610029-reni-tri-damayanti.ps. [Diakses Tanggal 23 Maret 2012].

[6] Dummit, David Steven dan Foote, Richard M. 1999. *Abstract Algebra Second Edition*. India: Replika Press.

[7] Mahfudiyah, Lutvi. 2008. *Pelabelan Graceful pada Graf Kipas F_n dan Graf Kipas Ganda dF_n, n Bilangan Asli dan $n \geq 2$.* Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang [Online]. Tersedia di: http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/04510023-lutvi-mahfudiyah.ps.[Diakses Tanggal 27 Maret 2012].

[8] Rosyidah, Himmah. 2010. *Grup Automorfisme dari Graf Lengkap, dan Graf Sikel*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang [Online]. Tersedia di : http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/06510038-himmah-rosidah.ps. [Diakses Tanggal 14 Februari 2012].

[9] Wallace D.A.R. 1998. *Groups, Rings, and Fields* . Springer- Verlag