

# **BIFURKASI *HOPF* PADA MODEL SILKUS BISNIS *KALDOR-KALECKI* TANPA WAKTU TUNDA**

**NURRACHMAWATI<sup>1)</sup> DAN A. KUSNANTO<sup>2)</sup>**

<sup>1)</sup>Mahasiswa Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

<sup>2)</sup>Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

**ABSTRAK.** Dalam penelitian ini dipelajari dinamika pendapatan suatu perusahaan dengan stok modal yang diberikan dalam model *Kaldor-Kalecki* tanpa Waktu Tunda. Selanjutnya dengan menggunakan Teorema Bifurkasi *Hopf* akan ditentukan eksistensi solusi periodik dan keberadaansiklus limit (*limit cycle*) dari model inidan melakukan simulasi untuk beberapa nilai parameter yang terlibat.

**Kata kunci :** model *Kaldor-Kalecki*, kestabilan, bifurkasi *Hopf*, *limit cycle*

## **1. PENDAHULUAN**

Pada awal 1940 (*Kaldor*) dan pada tahun 1939 (*Kalecki*), dalam waktu yang hampir bersamaan menyusun suatu model dinamis yang menghubungkan antara fungsi modal( $K$ ) dan fungsi pendapatan kotor ( $Y$ ) suatu perusahaan. Laju penambahan modal suatu perusahaan akan bergantung pada fungsi investasi ( $I$ ) dan depresiasi modal. Sedangkan laju pendapatan suatu perusahaan akan bergantung pada fungsi investasi dan fungsi simpanan ( $S$ ) yang dilakukan oleh perusahaan tersebut [4].

Bifurkasi merupakan salah satu masalah yang digunakan dalam menganalisis model matematis dalam bidang fisika dan biologi. Titik bifurkasi adalah titik dimana sistem mengalami perubahan secara kualitatif. Perubahan perilaku sistem ini terjadi ketika dilakukan perubahan pada satu atau beberapa parameter model sehingga titik

bifurkasi ini sering disebut sebagai ambang batas parameter [4],[5]. Analisis bifurkasi ini juga banyak digunakan dalam menganalisis model bidang ekonomi [1].

Bifurkasi *Hopf* adalah salah satu jenis bifurkasi, di mana perubahan parameter akan memunculkan limit cycle (siklus limit) dan orbit periodik. Penentuan kondisi bifurkasi *Hopf* dan penentuan orbit solusi (subkritis atau superkritis) merupakan masalah yang tidak mudah dilakukan. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk menunjukkan keberadaan orbit periodik ini, seperti di [1],[2] dan [3].

Dalam penelitian ini akan dicari Bifurkasi *Hopf* dari model bisnis *Kaldor-Kalecki* tanpa waktu tunda. Waktu tunda direpresentasikan sebagai waktu penyimpanan akumulasi modal sebelum digunakan dalam investasi. Sehingga dalam model ini diasumsikan bahwa pendapatan kotor pada saat ini akan langsung dianggap sebagai investasi saat ini juga. Kondisi seperti ini biasanya berlaku untuk perusahaan-perusahaan kecil atau pada perusahaan keluarga.

## 2 METODOLOGI

Penelitian ini dilakukan dengan memilih fungsi investasi dan fungsi simpanan yang memenuhi kondisi tertentu. Selanjutnya fungsi ini disubstitusikan ke model *Kaldor-Kalecki* umum yang diambil pada [2] dan [3]. Dengan melakukan analisis kestabilan titik tetap, akan ditunjukkan keberadaan orbit periodik dengan menggunakan Teorema Bifurkasi *Hopf*.

**2.1 Pemilihan Model:** Pada model siklus bisnis *Kaldor-Kalecki* ([2],[3]) jika diasumsikan tanpa waktu tunda akan diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t), K(t)) - \delta K(t)\end{aligned}\quad (1)$$

dengan

$\alpha$  koefisien penyesuaian di pasar barang ( $\alpha > 0$ )

$\delta$  tingkat depresiasi stok modal ( $\delta \in (0,1)$ ).

Misalkan  $(Y^*, K^*)$  adalah titik tetap dan  $I_Y$ ,  $I_K$ ,  $S_Y$ , dan  $S_K$  menunjukkan turunan yang berkaitan dengan pendapatan kotor ( $Y$ ) dan modal ( $K$ ). Dengan asumsi bahwa  $I_Y > 0$ ,  $S_Y > 0$ ,  $I_K < 0$ ,  $S_K > 0$ ,  $I_{YY} > 0$  untuk  $Y < Y^*$  dan sebaliknya serta  $I_Y(Y^*, K^*) > S_Y(Y^*, K^*)$ , siklus bisnis *Kaldor-Kalecki* tanpa waktu tunda ini menyatakan tidak adanya masa persiapan atau penundaan sampai perlengkapan modal tersedia dan siap untuk digunakan.

**2.2 Pemilihan Fungsi Investasi dan Simpanan:** Dalam penelitian ini dipilih beberapa asumsi. Fungsi simpanan ( $S$ ) bergantung pada pendapatan kotor ( $Y$ ) dan linear,  $S_Y = \gamma \in (0,1)$ . Diasumsikan juga fungsi investasi  $I(Y, K) = I(Y) + I(K)$  di mana  $I(K)$  linear,  $I_K = \beta < 0$  yaitu  $\beta \in (-1,0)$ , sehingga  $I(Y, K) = I(Y) + \beta K$ . Maka model (1) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \alpha (I_Y - S_Y)Y + \alpha (I_K - S_K)K \\ \dot{K} &= I_Y Y + (I_K - \delta)K\end{aligned}\quad (2)$$

dengan

$I_K = \beta$  laju investasi terhadap stok modal  
 $S_Y = \gamma$  laju simpanan terhadap pendapatan kotor.

**2.3 Teorema Bifurkasi Hopf:** Berikut ini diberikan Teorema bifurkasi *Hopf* dari [5]. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v) \quad (3)$$

dengan parameter  $v \in (-v_0, v_0)$  dan  $v_0$  positif serta vektor fungsi  $f \in \mathbb{C}^2(D \times (-v_0, v_0))$  dengan  $D$  adalah daerah asal pada  $\mathbb{R}^2$ . Misalkan bahwa sistem (3) memiliki titik tetap di sekitar setiap  $v$  yaitu  $a(v)$ , sehingga  $f(x, v) = 0 \Rightarrow x = a(v)$ .

Misalkan  $A(v)$  matriks pelinearan dari (3) di sekitar titik tetap  $a(v)$ , maka  $A(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(v)$ . Misalkan bahwa  $A(0)$  memiliki nilai eigen imajiner murni  $\pm iw$ ,  $w \neq 0$ , sehingga  $\text{tr}A(0) = 0, \det A(0) > 0$ . Jika matriks  $B(v)$  didefinisikan oleh  $A(v) = A(0) + vB(v)$ , maka  $\text{tr}B(0) \neq 0$  sehingga terjadi perubahan kestabilan titik tetap yaitu spiral stabil dan spiral takstabil serta ada solusi periodik dari (3) untuk  $v$  di sekitar  $v = 0$  dan  $x$  di sekitar  $a$  dengan periode  $T = \frac{2\pi}{w}$  untuk  $v$  yang kecil.

**2.4 Analisis Kestabilan:** Analisis kestabilan ini diambil dari [6]. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial tak linear  $\dot{x} = f(x)$ . Jika hasil pelinearan di sekitar titik tetap menghasilkan matriks Jacobi  $A$  berukuran  $2 \times 2$  dan memiliki persamaan karakteristik dari  $A$  ialah  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$  dengan  $\tau = \text{tr}(A)$  dan  $\Delta = \det(A)$  maka nilai eigen matriks  $A$  ialah  $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ . Kestabilan titik tetap ditentukan sebagai berikut:

1. Jika  $\Delta < 0$ , maka nilai eigen mempunyai akar *real* yang berbeda tanda, sehingga titik tetap bersifat titik pelana (*saddle point*) takstabil.
2. Jika  $\Delta > 0, \tau > 0$  dan memenuhi kondisi  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , nilai eigen mempunyai akar *real* dengan tanda yang sama yaitu positif, maka titik tetap merupakan simpul taksejati (*node*) takstabil. Jika  $\Delta < 0$ , nilai eigen mempunyai akar *real* dengan tanda yang sama yaitu negatif maka titik tetap menjadi simpul taksejati (*node*) stabil.
3. Jika  $\Delta > 0, \tau > 0$  dan memenuhi kondisi  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ , nilai eigennya merupakan *complex conjugat*, maka titik tetap bersifat spiral takstabil. Jika  $\tau < 0$  maka titik tetap menjadi spiral stabil.
4. Jika  $\tau^2 - 4\Delta = 0, \tau > 0$  dan ada dua vektor eigen bebas linear dengan tanda yang sama yaitu positif, maka titik tetap bersifat simpul sejati (*star node*) takstabil. Jika  $\tau < 0$  dan ada dua vektor eigen bebas linear dengan tanda yang sama yaitu negatif, maka titik tetap bersifat simpul sejati (*star node*) stabil.
5. Jika  $\tau^2 - 4\Delta > 0, \Delta = 0$  dan mempunyai nilai eigen yaitu:  $\lambda_i = 0 \neq \lambda_j$  dengan  $i \neq j$ , maka titik tetap bersifat *simple degenerate*. Jika  $\Delta = \tau = 0$ , maka nilai eigen bernilai 0, sehingga titik tetap bersifat *double degenerate*.
6. Jika  $\tau = 0$ , nilai eigen merupakan imajiner murni, maka titik tetap bersifat *center* yang selalu stabil.

### 3 PEMBAHASAN DAN SIMULASI

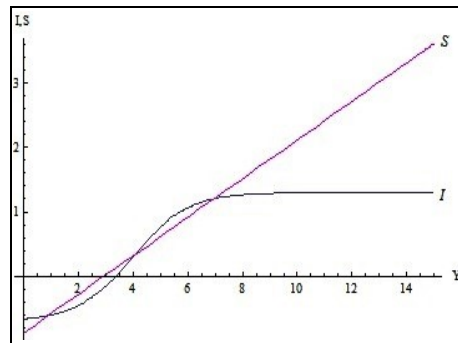
Matriks Jacobi dari persamaan (2) adalah  $J = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - S_Y) & \alpha(I_K - S_K) \\ I_Y & I_K - \delta \end{pmatrix}$ . Dari matriks Jacobi tersebut didapat  $\text{tr } J = \alpha(I_Y - S_Y) + I_K - \delta$  dan  $\det J = \alpha(I_Y - S_Y)(I_K - \delta) - I_Y\alpha(I_K - S_K)$ . Nilai eigennya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha(I_Y - S_Y) + I_K - \delta) \pm \sqrt{(\alpha(I_Y - S_Y) + I_K - \delta)^2 - 4\left(\frac{I_K I_Y \delta - I_Y \delta^2 - 2I_K S_Y \delta + S_Y \delta^2 + S_Y I_K^2 + I_Y S_K \delta - I_Y I_K S_K}{I_Y - S_Y}\right)}}{2}$$

sehingga bifurkasi *Hopf* dapat terjadi apabila diambil nilai  $\alpha = \alpha_{bif}$ , dengan  $\alpha_{bif} = \frac{\delta - I_K}{I_Y - S_Y}$ . Dengan memilih nilai  $\alpha_{bif}$  ini, maka  $\text{tr } J = 0$  dan jika  $\alpha_{bif} \neq \frac{\delta - I_K}{I_Y - S_Y}$  maka  $\text{tr } J \neq 0$ . Berdasarkan Teorema Bifurkasi *Hopf*, maka kondisi terjadinya bifurkasi *Hopf* terpenuhi. Pengambilan nilai  $\alpha_{bif}$  tersebut menyebabkan  $\text{tr } J$  bernilai nol dan dengan mengambil  $I_Y > S_Y$ , maka  $\alpha_{bif}$  adalah suatu konstanta positif.

Ketika sistem melewati  $\alpha_{bif}$  titik tetap akan bersifat spiral, maka berdasarkan Teorema Bifurkasi *Hopf* sistem (2) dapat mengalami bifurkasi *Hopf*. Saat  $\alpha$  lebih kecil dari  $\alpha_{bif}$ , maka titik tetap akan bersifat spiral stabil, karena nilai eigennya berupa kompleks sekawan dengan  $\text{tr } J < 0$ . Sedangkan ketika  $\alpha$  lebih besar dari  $\alpha_{bif}$ , maka titik tetap akan bersifat spiral takstabil karena nilai eigennya berupa kompleks sekawan dengan  $\text{tr } J > 0$ . (lihat bagian 2.4)

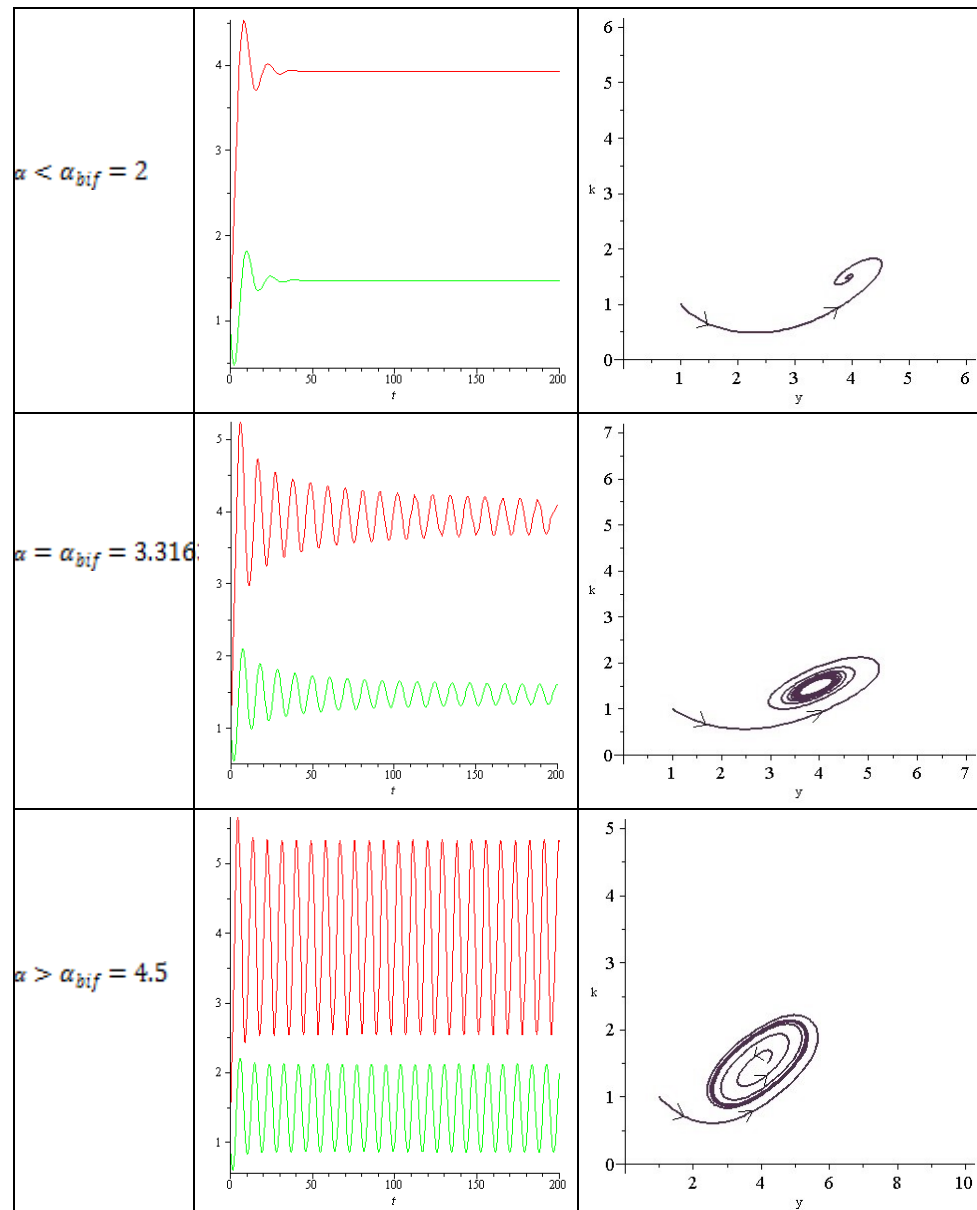
**Simulasi Sistem:** Misalkan fungsi investasi suatu perusahaan adalah  $I(Y, K) = 2 \frac{e^Y}{e^Y + 54} - 0.46K$  dan fungsi simpanan adalah  $S(Y, K) = 0.3Y + 0.01K - 0.9$ . Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa kurva investasi akan meningkat di awal, kemudian pada saat pendapatan kotor  $Y$  bernilai 9 fungsi investasi akan berada pada limit fungsi yaitu di 1.3 dan akan tetap bernilai 1.3 untuk pemberian nilai  $Y$  berikutnya, sedangkan kurva simpanan akan meningkat seiring dengan penambahan nilai  $Y$ .



Gambar 1 Kurva Fungsi Investasi dan Fungsi Simpanan

Dengan tingkat depresiasi stok modal  $\delta$  sebesar 0.2, Dari simulasi diperoleh nilai  $\alpha_{bif}$  yaitu 3.316390697. Untuk simulasi tersebut diperoleh bidang solusi dan bidang fase pada Gambar 2. Pada saat  $\alpha < \alpha_{bif}$ , misal nilai  $\alpha$  yaitu 2 didapat nilai  $\det J$  dan  $\text{tr } J$  yaitu 0.236 dan  $-0.262$  serta nilai eigen yaitu  $\lambda_{1,2} = (-0.131 + 0.468i, -0.131 - 0.468i)$ . Titik tetap berupa spiral stabil. Pada saat  $\alpha = \alpha_{bif}$  yaitu 3.316390697 didapat nilai  $\det J$  dan  $\text{tr } J$  yaitu 0.392 dan 0 serta

nilai eigen yaitu  $\lambda_{1,2} = (0.626i, -0.626i)$ . Titik tetap berupa spiral stabil. Pada saat  $\alpha > \alpha_{bif}$ , misal nilai  $\alpha$  yaitu 4.5 didapat nilai  $\det J$  dan  $\text{tr } J$  yaitu 0.532 dan 0.235 serta nilai eigen yaitu  $\lambda_{1,2} = (0.118 + 0.720i, 0.118 - 0.720i)$ . Titik tetap berupa spiral takstabil.



Gambar 2 Bidang Solusi dan Bidang Fase



Dari Gambar 2, dengan memberikan nilai awal  $y(0)=1$  dan  $k(0)=1$ , didapatkan bidang solusi. Dapat dilihat dinamika siklus bisnis *Kaldor-Kalecki* tanpa waktu tunda, parameter koefisien penyesuaian di pasar barang ( $\alpha$ ) memengaruhi dinamika pendapatan kotor. Hal tersebut karena besarnya laju pendapatan kotor suatu perusahaan dipengaruhi oleh nilai  $\alpha$ . Dengan mengambil nilai  $\alpha$  sebesar 2, 3.316390697, dan 4.5 pergerakan laju pendapatan kotor lebih meningkat dibandingkan dengan laju stok modal. Dapat dilihat juga pada saat  $\alpha < \alpha_{bif}$  dan  $\alpha = \alpha_{bif}$  pendapatan kotor dan stok modal akan berisolasi di awal kemudian menuju

kestabilan. Pada saat  $\alpha > \alpha_{bif}$  pendapatan kotor dan stok modal akan terus berisolasi menuju *limit cycle* sampai periode waktu tertentu, tidak stabil.

Dari simulasi didapatkan titik tetap yaitu  $(Y^*, K^*) = (0.633K + 3, 3.030 \frac{e^Y}{e^Y + 54})$ . Dengan mengambil nilai  $Y$  dan  $K$  yaitu 1.5 dan 3.9, maka didapat nilai titik tetap yaitu (3.95, 1.448). Dari plot bidang fase dapat dilihat bahwa pada saat  $\alpha < \alpha_{bif}$  titik tetap kearah dalam yaitu menuju kestabilan, yang berarti posisi perusahaan menjadi stabil kedepannya. Pada saat  $\alpha = \alpha_{bif}$ , titik tetap juga kearah dalam yaitu menuju kestabilan dan orbit periodiknya stabil asimtotik.

Pada saat  $\alpha > \alpha_{bif}$ , titik tetap ke arah luar yaitu menuju ketakstabilan, yang berarti posisi perusahaan menjadi tidak stabil kedepannya dan terdapat *limit cycle* stabil. *Limit cycle* stabil membuktikan bahwa pendapatan kotor dan stok modal akan menuju kesuatu nilai tertentu. Dengan adanya *limit cycle* berarti dinamika mikro ekonomi perusahaan khususnya mengenai pendapatan kotor dan stok modal mempunyai siklus dengan periode tertentu.

## 5 KESIMPULAN

Siklus bisnis *Kaldor-Kalecki* tanpa waktu tunda dapat terjadi bifurkasi *Hopf* dengan mengubah parameter koefisien penyesuaian di pasar barang dari kecil menjadi besar dari batas koefisien penyesuaian di pasar barang yang telah ditetapkan. Hal ini menyebabkan terjadinya pertukaran kestabilan titik tetap dan adanya siklus limit (*limit cycle*) dalam dinamika siklus bisnis tersebut. Titik tetap yang semula memiliki kestabilan spiral stabil menjadi spiral takstabil dan terdapat *limit cycle* didalamnya, sehingga terjadi bifurkasi *Hopf*. Dengan menetapkan fungsi investasi, fungsi simpanan, dan tingkat depresiasi stok modal akan diperoleh suatu nilai koefisien penyesuaian di pasar barang saat terjadinya bifurkasi *Hopf*. Dari simulasi, dengan mengambil nilai koefisien penyesuaian di pasar barang kecil dan sama dengan dari koefisien penyesuaian di pasar barang saat terjadinya bifurkasi, maka kestabilan titik tetap spiral stabil. Hal ini berarti posisi suatu perusahaan yaitu pendapatan kotor dan stok modal berada pada posisi stabil. Dengan mengambil nilai koefisien penyesuaian di pasar barang besar dari koefisien penyesuaian di pasar barang saat terjadinya bifurkasi, maka kestabilan titik tetap spiral takstabil, perusahaan berada pada posisi tidak stabil.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hallegatte S, Ghil M, Dumas P, and Horcade JC. 2007. Business Cycle, Bifurcation and Chaos in a Neo-Classical Model with Investment Dynamics. *Journal of Economic Behavior & Organization* 67(1): 57-77.
- [2] Kaddar A, Talibi H. 2009. Hopf Bifurcation and Stability of Limit Cycle in a Delayed Kaldor-Kalecki Model. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 14(3): 333-343.
- [3] Krawiec A, Szydłowski M. 2001. The Kaldor-Kalecki Model of Bisnis Cycle as a Two-Dimensional Dynamical System. *Nonlinear Mathematical Physics* 8 : 288-271.
- [4] Lorenz HW. 1993. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, 2<sup>nd</sup> ed. New York: Springer-Verlaag.
- [5] Murray JD. 1993. *Mathematical Biology*, 2<sup>nd</sup> Corrected Edition. New York: Springer-Verlag.
- [6] Tu PNV. 1994. *Dynamic System, An Introduction with Application in Economics and Biology*. Hiedelberg, Germany: Springer-Verlag.