PENGGUNAAN METODE HOMOTOPI PADA MASALAH PERAMBATAN GELOMBANG INTERFACIAL

JAHARUDDIN

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Metode homotopi merupakan suatu metode pendekatan analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah taklinear. Metode homotopi tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah gelombang internal pada fluida dua lapisan. Persamaan gerak gelombang interfacial yang diperoleh berupa persamaan diferensial taklinear. Dengan metode homotopi diperoleh suatu rumus rekursif dari basis-basis penyelesaian masalah perambatan gelombang interfacial. Penyelesaian pendekatan awal dimisalkan dalam bentuk gelombang soliter.

Kata kunci: metode homotopi, gelombang interfacial, dan masalah taklinear.

1. PENDAHULUAN

Gelombang internal adalah gelombang yang terjadi di bawah permukaan laut sehingga tidak teramati secara kasat mata. Keberadaan gelombang internal ini diakibatkan oleh rapat massa air laut yang tidak konstan. Perbedaan rapat massa ini diakibatkan oleh perbedaan suhu dan kadar garam pada setiap lapisan. Gelombang internal ini berada pada batas antara dua lapisan air dengan rapat massa berbeda. Salah satu bentuk gelombang internal yang banyak dikaji adalah gelombang soliter internal, yaitu gelombang internal yang merambat dengan bentuk dan kecepatan yang tidak berubah. Gelombang internal ini terdeteksi melalui SAR (*Synthetic Aperture Radar*) sebagai pola gelap terang yang tampak teratur di permukaan laut.

Model persamaan bagi gerak gelombang internal umumnya berbentuk tak linear. Model berupa persamaan taklinear biasanya sulit diselesaikan secara analitik. Masalah tak linear ini menarik perhatian peneliti sejak pertengahan abad ke-19 untuk mendapatkan suatu metode yang efisien untuk menyelesaikannya. Liao dalam (Liao, 1998) memperkenalkan suatu metode yang disebut metode homotopi untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial tak linear.

Dalam tulisan ini akan digunakan metode homotopi untuk menyelesaikan masalah gelombang internal pada fluida dua lapisan. Fluida dua lapisan adalah fluida yang terdiri atas dua lapisan, yang masing-masing mempunyai rapat massa yang konstan. Gelombang internal muncul pada batas kedua lapisan tersebut dan disebut gelombang interfacial. Berdasarkan metode homotopi ini akan dikonstruksi suatu metode numerik untuk menghampiri simpangan dan amplitudo gelombang interfacial. Hasil numerik yang diperoleh akan diimplementasikan dengan menggunakan bantuan *software Maple*.

2. PERSAMAAN GERAK GELOMBANG INTERNAL

Model matematika untuk menjelaskan gerak gelombang internal, digunakan persamaan dasar dalam formulasi Lagrange. Dalam hal ini diasumsikan bahwa fluida yang ditinjau berupa fluida tak mampat dan tak kental dengan batas atas berupa permukaan bebas, dan batas bawah oleh batas rata. Misalkan ξ menyatakan simpangan partikel fluida dari posisi kesetimbangannya, dan bergantung pada koordinat horizontal x dan posisi partikel fluida pada keadaan setimbang z, serta waktu t. Rapat massa dalam keadaan setimbang dinyatakan oleh ρ_o. Persamaan gerak gelombang internal diturunkan dengan menggunakan metode asimtotik (Jaharuddin, 2004). Berdasarkan metode asimtotik, pada orde rendah, simpangan partikel fluida dinyatakan dalam bentuk:

$$\xi(x,z,t) = A(x,t)\phi(z) \tag{2.1}$$

dengan fungsi $A(x,t)$ memenuhi persamaan berikut:

$$A_t + \mu A A_x + \delta A_{xxx} = 0. \tag{2.2}$$

Koefisien μ dan δ masing-masing memenuhi:

$$\mu = \frac{3\int_{-h}^{0} \rho_o c\ \phi_z^3 dz}{2\int_{-h}^{0} \rho_o \phi_z^2 dz}, \qquad \delta = \frac{\int_{-h}^{0} \rho_o c\ \phi^2 dz}{2\int_{-h}^{0} \rho_o \phi_z^2 dz}. \tag{2.3}$$

Fungsi ϕ adalah penyelesaian masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} \left(\rho_o c^2 \phi_z\right)_z + \rho_o N^2 \phi = 0, &\qquad -h < z < 0 \\ \phi = 0, &\qquad \text{di } z = -h \\ c^2 \phi_z = g\phi &\qquad \text{di } z = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan h, N, c, dan g masing-masing menyatakan kedalaman fluida, frekuensi Brunt-Väisälä, kecepatan gelombang, dan percepatan gravitasi. Masalah nilai batas untuk ϕ pada persamaan (2.4) dapat dipandang sebagai masalah nilai eigen dengan nilai eigen $c^{(n)}$ dan fungsi eigen $\phi^{(n)}$ yang berkaitan, n=0,1,2,$\cdots$ dengan $c^{(n)} > c^{(n+1)}$. Mode pertama, yaitu pasangan (ϕ^1,$c^{(1)}$) yang akan digunakan, karena kecepatan phase gelombang untuk mode ini yang terbesar dan fungsi eigennya mempunyai satu nilai ekstrim di dalam domain fluida (Grimshaw, 1997). Karena persamaan diferensial dalam masalah nilai eigen di atas berbentuk linear, maka penyelesaian masalah nilai eigen tersebut memuat perkalian dengan hanya satu konstanta. Konstanta ini dipilih sedemikian sehingga fungsi ϕ bernilai satu pada titik ekstrimnya ($z = z_m$). Pemilihan ini menyatakan bahwa *A(x,t)* merupakan simpangan gelombang internal di $z = z_m$.

Persamaan gerak gelombang internal pada persamaan (2.2) diasumsikan memiliki penyelesaian berbentuk gelombang berjalan. Oleh karena itu, misalkan $A(\theta) = aU(\theta)$, dengan $\theta = \varepsilon(x - ct)$ dan ε suatu parameter. Dengan demikian persamaan (2.2) menjadi

$$-cU_\theta + \mu aUU_\theta + \varepsilon^2 \delta U_{\theta\theta\theta} = 0. \tag{2.5}$$

Salah satu gelombang berjalan yang dikaji adalah gelombang soliter. Penyelesaian gelombang soliter yang merupakan penyelesaian persamaan (2.5) berbentuk: $U(\theta) = \sec h^2 \beta\theta$ dengan $\beta^2 = a\mu / 12\delta$ dan $c_1 = a\mu / 3$ dengan c_1 merupakan koreksi kecepatan phase gelombang. Selanjutnya dengan memisalkan penyelesaian dalam bentuk gelombang soliter, maka diperoleh hubungan $c = \varepsilon^2$ sehingga persamaan (2.5) menjadi

$$c\delta U_{\theta\theta\theta} + \mu aUU_\theta - cU_\theta = 0. \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) merupakan persamaan bagi gerak gelombang internal yang akan diselesaikan dengan metode homotopi.

3. ANALISIS METODE

Pada bagian ini akan dibahas metode homotopi untuk menjelaskan gerak gelombang soliter internal. Model matematika yang ditinjau diberikan oleh persamaan (2.6). Dalam metode ini, suatu operator linear $\mathfrak{L}$ dan operator taklinear $\mathfrak{N}$ dipilih berdasarkan persamaan (2.6), yaitu

$$\mathfrak{L}\left[\Phi(\theta;q)\right] = \left(\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Phi(\theta;q),$$

$$\mathfrak{N}\left[\Phi(\theta;q)\right] = c\delta\frac{\partial^3\Phi}{\partial\theta^3} + \mu\Lambda(q)\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - c\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{3.1}$$

dengan $\Lambda(q)$ dan $\Phi(\theta;q)$ merupakan dua fungsi real yang bergantung pada suatu parameter $q \in [0,1]$. Jadi, terdapat pemetaan: $U(\theta) \to \Phi(\theta;q)$, dan $a \to \Lambda(q)$. Pemetaan - pemetaan tersebut dikonstruksi dengan memperhatikan nilai parameter *q* yang berubah dari 0 ke 1, yang mengakibatkan $\Phi(\theta;q)$, dan $\Lambda(q)$ masing - masing berubah dari pendekatan awal menjadi penyelesaian eksak $U(\theta)$ dan *a*. Persamaan (2.6) memberikan persamaan untuk deformasi orde nol berikut:

$$(1-q)\mathfrak{L}[\Phi(\theta;q) - \phi_0(\theta)] = qp\mathfrak{N}[\Phi(\theta;q), \Lambda(q)]. \tag{3.2}$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2), maka untuk *q* = 0 diperoleh

$$\Phi(\theta;0) = \phi_0(\theta), \text{ dan } \Lambda(0) = a_0$$

yang masing - masing merupakan pendekatan awal untuk $U(\theta)$ dan a. Selanjutnya, untuk q = 1 diperoleh

$$\Phi(\theta;1) = U(\theta), \text{ dan } \Lambda(1)=a.$$

Pemilihan pendekatan awal tersebut menjamin adanya fungsi $\Phi(\theta;q)$ yang dapat diturunkan hingga m kali terhadap q.

Turunan ke m dari fungsi $\Phi(\theta;q)$, dan $\Lambda(q)$ terhadap q di q = 0 masing-masing dinotasikan sebagai berikut:

$$\phi_m(\theta) = \left.\frac{\partial^m \Phi(\theta;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0}, \text{ dan } a_m = \left.\frac{d^m \Lambda(q)}{dq^m}\right|_{q=0}$$

Deret Taylor dari fungsi $\Phi(\theta;q)$, dan $\Lambda(q)$ di sekitar q = 0 masing-masing adalah:

$$\Phi(\theta;q) = \Phi(\theta;0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(\theta)}{m!} q^m = \phi_0(\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(\theta)}{m!} q^m$$

dan

$$\Lambda(q) = \Lambda(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{m!} q^m = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{m!} q^m.$$

Dengan demikian untuk q = 1 diperoleh

$$U(\theta) = \phi_0(\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\phi_m(\theta)}{m!}, \tag{3.3}$$

$$a = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{m!}. \tag{3.4}$$

Hasil ini menunjukkan hubungan antara penyelesaian persamaan (2.6) dan pendekatan awal $\phi_0(\theta)$, dan a_0.

Berikut ini akan ditentukan $\phi_m(\theta)$, dan a_{m}. Jika kedua ruas persamaan (3.2) diturunkan terhadap q hingga m kali dan dihitung di $q=1$ kemudian dibagi m!, maka diperoleh bentuk deformasi orde-m berikut:

$$\mathfrak{L}\left(\phi_{\mathrm{m}}(\theta) - \chi_m \phi_{\mathrm{m-1}}(\theta)\right) = pR_m(\vec{\phi}_{m-1}, \vec{a}_{m-1}) \tag{3.5}$$

dengan

$$R_m(\vec{\phi}_{m-1}, \vec{a}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathfrak{N}[\Phi, \Lambda]}{\partial \mathrm{q}^{\mathrm{m-1}}} \Big|_{q=0}$$

dan $\vec{\phi}_m = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots \phi_m)$, $\vec{a}_m = (a_0, a_1, a_2, \cdots a_m)$ Berdasarkan bentuk operator $\mathfrak{N}$ pada persamaan (3.1), diperoleh bentuk R_m berikut:

$$R_m(\vec{\phi}_{m-1}, \vec{a}_{m-1}) = c\frac{d^3\phi_{m-1}}{dq^3} + \mu \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{i} a_j \phi_{i-j} \frac{d\phi_{m+i-1}}{dq} - c\frac{d\phi_{m-1}}{dq} \tag{3.6}$$

Jika persamaan (3.6) disubstitusikan ke persamaan (3.5) dan berdasarkan persamaan (3.1) dengan syarat awal

$$U(0)=1, U'(0)=0, \text{ dan } U(\infty)=0,$$

maka penyelesaian persamaan (3.5) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\phi_m(\theta)=C_1\exp(-\theta)+C_2\exp(\theta)+C_3+\phi_m^*(\theta) \qquad (3.7)$$

dimana $\phi_m^*(\theta)$ adalah penyelesaian khusus dari persamaan (3.5) dan $\vec{a}_m, m=1,2\cdots$ akan ditentukan berikut. Jika persamaan (3.7) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.4), maka diperoleh:

$$C_1=-\phi_m^*(0), \quad C_2=C_3=0, \text{ dan } \phi_m^*(0)+\frac{d\phi_m^*}{dq}\Big|_{q=0}=0. \qquad (3.8)$$

Berdasarkan persamaan (3.8), $\vec{a}_m, m=1,2\cdots$ dapat ditentukan.

Berikut ini langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan (2.6) dengan metode homotopi. Misalkan diberikan pendekatan awal dari persamaan (2.6), yaitu ϕ_0 dan a_0. Penyelesaian untuk orde ke-m yaitu ϕ_m dan $a_m, m=1,2...$ dari persamaan (3.3) dan (3.4) dilakukan sebagai berikut.

1. Tentukan $R_m(\vec{\phi}_{m-1}, \vec{a}_{m-1})$ dari persamaan (3.6).
2. Tentukan $\phi_m^*(\theta)$ dari persamaan (3.5) dan (3.7).
3. Tentukan a_m dari persamaan (3.7) dan (3.8).
4. Tentukan $\phi_m(\theta)$ dari persamaan (3.7) dengan C_1,C_2 dan C_3 dari persamaan (3.8), dan fungsi $\phi_m^*(\theta)$ dari hasil langkah kedua.
5. Tentukan penyelesaian persamaan (2.6) berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4).

Berdasarkan penyelesaian persamaan (2.6), maka diperoleh penyelesaian persamaan (2.2), yaitu $A(\theta)=aU(\theta)$, dengan $\theta=\varepsilon(x-ct)$ yang merupakan simpangan gelombang internal. Amplitudo gelombang internal diperoleh berdasarkan hasil dari langkah ketiga di atas.

4. APLIKASI PADA FLUIDA DUA LAPISAN

Untuk mengaplikasikan hasil-hasil yang diperoleh pada bagian sebelumnya, maka pada bagian ini akan ditinjau fluida dua lapisan, yang masing-masing mempunyai rapat massa yang konstan. Dalam hal ini gelombang internal muncul pada batas kedua lapisan tersebut. Gelombang ini biasa disebut gelombang interfacial. Untuk itu, misalkan rapat massa fluida dua lapisan ini diberikan dalam bentuk:

$$\rho_O(z)=\begin{cases}\rho_1 & -h<z\le z_m\\ \rho_2 & z_m\le z<0.\end{cases}$$

Penyelesaian masalah nilai eigen (2.4) berbentuk:

$$\phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z+h}{h-z_m} & ,-h<z\le -z_m\\[2ex] \dfrac{g}{c^2-gz_m}\left(z+\dfrac{c^2}{g}\right) & ,-z_m\le z<0.\end{cases}$$

Jika pendekatan Boussinesq ($\rho_1\approx\rho_2$) digunakan, maka diperoleh

$$c^2=\frac{g' z_m(h-z_m)}{h},\quad g'=\frac{g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2}$$

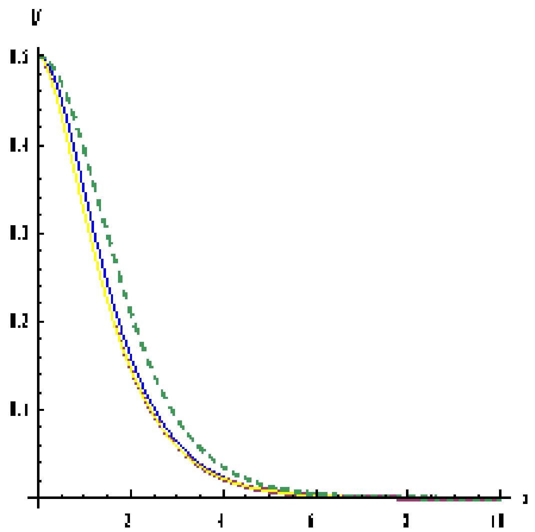
dengan $g'=\dfrac{g(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2}$. Berdasarkan persamaan (2.3) diperoleh

$$\mu=\frac{3c(2z_m-h)}{2z_m(h-z_m)}\quad\text{dan}\quad \delta=\frac{c}{6}z_m(h-z_m).$$

Perhitungan eksplisit dilakukan dengan data-data berikut: $g'=0.05,\ h=1$ dan $z_m=0.1h.$ Berdasarkan data tersebut diperoleh $c=0.07,\ \mu=-0.93,\ \delta=0.001.$ Selanjutnya, dalam metode homotopi yang akan digunakan, misalkan pendekatan awalnya berbentuk:

$$\phi_0(\theta)=\sec h^2(6,2\theta)\ \text{dan}\ \ a_0=0,$$

Gambar 4.1 menunjukkan grafik fungsi $A(\theta)=aU(\theta),$ dengan $U(\theta)$ merupakan penyelesaian persamaan (2.2) untuk beberapa orde.



Gambar 2. Simpangan gelombang interfacial menggunakan metode homotopi untuk orde 2 (....), orde 3 (- - -), dan penyelesaian gelombang soliter (garis penuh)

Berdasarkan Gambar 4.1, diperoleh bahwa amplitudo gelombang interfacial adalah 0,5 satuan. Selain itu, semakin tinggi orde dalam metode homotopi yang digunakan, simpangan gelombang interfacial semakin mendekati amplitudo gelombang soliter. Ini berarti metode homotopi cocok digunakan untuk menyelesaikan masalah perambatan gelombang interfacial. Perhitungan yang digunakan dalam metode ini juga sangat sederhana.

5 KESIMPULAN

Persamaan gerak gelombang interfacial diturunkan berdasarkan asumsi fluida tak mampat dan tak kental pada fluida dua lapisan. Penyelesaian masalah perambatan gelombang interfacial dilakukan dengan menggunakan metode homotopi. Metode homotopi adalah suatu metode pendekatan analitik untuk menentukan penyelesaian dari suatu masalah taklinear. Dalam metode ini diperlukan suatu operator linear dan taklinear yang dipilih berdasarkan persamaan gerak gelombang interfacial. Berdasarkan pemilihan ini, diperoleh suatu rumus rekursif terhadap basis-basis dari penyelesaian persamaan gerak gelombang interfacial. Orde dalam metode ini ditentukan berdasarkan banyaknya basis yang digunakan.

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini berupa hampiran untuk simpangan gelombang interfacial. Gelombang interfacial yang terjadi pada kedalaman 0,1 satuan, diperoleh kecepatan gelombang sebesar 0,07 satuan dan amplitudo gelombang interfacial adalah 0,5 satuan. Selain itu, semakin tinggi orde dalam metode homotopi yang digunakan, simpangan gelombang interfacial semakin mendekati amplitudo gelombang soliter. Ini berarti metode homotopi cocok digunakan untuk menyelesaikan masalah perambatan gelombang interfacial. Perhitungan yang digunakan dalam metode ini juga sangat sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. **Grimshaw, R.** 1997. Internal Solitary Waves, dalam *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, Bab 1, Liu, P.L.F., Editor, World Scientific Pub. Company, Singapore **3**:1-30.

[2]. **Jaharuddin.** 2007. Formulasi Lagrange untuk Menggambarkan Gerak Gelombang Internal di Atmosfir. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, **6**:37-46..

[3]. **Liao.** 2004. *Beyond Pertubation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, London, New York Washington, D.C.