

## PENDUGAAN PARAMETER DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV DUA WAKTU SEBELUMNYA

**B. SETIAWATY DAN S. F. NIKMAH**

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

**Abstrak:** Pendugaan parameter deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya dilakukan menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization*. Dari kajian ini diperoleh algoritma untuk menduga parameter model.

**Kata kunci:** Rantai Markov, *Hidden* Markov, Deret waktu *Hidden* Markov, Metode *Expectation Maximization*.

### 1. PENDAHULUAN

Tulisan ini merupakan kajian tentang pendugaan parameter untuk deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya. Pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulangnya menggunakan metode *Expectation Maximization* (Metode EM). Dari kedua metode tersebut kemudian diturunkan suatu algoritma yang dapat dipakai secara umum untuk menduga parameter model deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya.

Tulisan ini dimulai dengan definisi model deret waktu *Hidden* Markov dua waktu sebelumnya beserta sifat-sifatnya. Pada bagian 3 dibahas Pendugaan Parameter model dan terakhir pada bagian 4 dibahas pendugaan ulang parameter dan algoritmanya.

### 2. MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV DUA WAKTU SEBELUMNYA

Pasangan proses stokastik  $\{X_k, Y_k, k\} \in \mathbb{N}$  yang terdefinisi pada ruang peluang  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dan mempunyai nilai pada  $S \times Y$  disebut model *hidden*

Markov apabila  $\{X_k\}$  adalah rantai Markov dengan *state* berhingga dan diasumsikan bahwa rantai Markov  $\{X_k\}$  tidak diamati. Sehingga  $\{X_k\}$  tersembunyi (*hidden*) di balik proses observasi  $\{Y_k\}$ . Banyaknya elemen dari  $S$  disebut ukuran (orde) dari model *hidden* Markov.

Pada bagian ini dibahas model *hidden* Markov yang merupakan deret waktu yang mempertimbangkan dua waktu sebelumnya dan berbentuk:

$$Y_t - \mu_{X_t^*} = \phi_1 \left( Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}^*} \right) + \phi_2 \left( Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}^*} \right) + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

di mana:

- $\{\varepsilon_t\}$  adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan menyebar normal  $N(0, \sigma^2)$ .
- $\{Y_t\}$  adalah proses yang diamati dan bernilai skalar
- $\{X_t^*\}$  adalah rantai Markov dengan ruang *state*  $S^* = \{1, 2\}$  dan  $P^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$  merupakan matriks peluang transisinya, dengan  $p_{ji}^* = P(X_t^* = j | X_{t-1}^* = i)$
- $\mu(X_t^*) = \langle \mu, X_t^* \rangle = \mu_{X_t^*}$ , dengan  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  menyatakan hasil kali dalam di  $R^N$ .
- $\mu_1, \mu_2, \phi_1$  dan  $\phi_2$  adalah konstanta real.

Perhatikan bahwa model ini dicirikan oleh parameter  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2)$ . Dengan menggunakan metode EM akan diduga parameter  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2)$  dari data  $Y$ .

Dalam kasus ini  $Y_t$  tidak hanya bergantung pada  $X_t^*$  tetapi juga bergantung pada  $X_{t-1}^*$  dan  $X_{t-2}^*$  sehingga agar tetap memenuhi sifat Markov perlu didefinisikan proses baru  $X_t$  di mana

$$\begin{aligned} X_t &= 1, \text{ jika } X_t^* = 1, X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\ X_t &= 2, \text{ jika } X_t^* = 1, X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\ X_t &= 3, \text{ jika } X_t^* = 2, X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\ X_t &= 4, \text{ jika } X_t^* = 2, X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 1 \\ X_t &= 5, \text{ jika } X_t^* = 1, X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\ X_t &= 6, \text{ jika } X_t^* = 1, X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\ X_t &= 7, \text{ jika } X_t^* = 2, X_{t-1}^* = 1 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2 \\ X_t &= 8, \text{ jika } X_t^* = 2, X_{t-1}^* = 2 \text{ dan } X_{t-2}^* = 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Lemma 2.1:**

$\{X_t\}$  merupakan rantai Markov dengan ruang state  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  dan matriks peluang transisi  $P$  sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11}^* & 0 & 0 & 0 & p_{11}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^* & 0 & 0 & 0 & p_{12}^* & 0 \\ p_{21}^* & 0 & 0 & 0 & p_{21}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{22}^* & 0 & 0 & 0 & p_{22}^* & 0 \\ 0 & p_{11}^* & 0 & 0 & 0 & p_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{12}^* & 0 & 0 & 0 & p_{12}^* \\ 0 & p_{21}^* & 0 & 0 & 0 & p_{21}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22}^* & 0 & 0 & 0 & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

**Bukti:** Lihat Setiawaty (2007)

Selanjutnya karena  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  bebas stokastik identik maka dapat diperoleh fungsi sebaran bagi  $\varepsilon_t$  sebagai berikut.

$$F_{\varepsilon_t}(y_t) = P(\varepsilon_t \leq y_t) = \int_0^{y_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_t - 0)^2}{2\sigma^2}\right\} d\varepsilon_t = \int_0^{y_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_t)^2}{2\sigma^2}\right\} d\varepsilon_t. \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh fungsi sebaran bagi  $Y_t$

$$\begin{aligned} F_{Y_t}(y_t) &= P(Y_t \leq y_t) \\ &= P\left(\phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}}^*\right) + \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}}^*\right) + \mu_{X_t}^* + \varepsilon_t \leq y_t\right) \\ &= P\left(\varepsilon_t \leq \left(y_t - \mu_{X_t}^*\right) - \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}}^*\right) - \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}}^*\right)\right). \end{aligned}$$

Misalkan

$$v = \left(y_t - \mu_{X_t}^*\right) - \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}}^*\right) - \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}}^*\right)$$

maka

$$F_{Y_t}(y_t) = \int_0^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_t)^2}{2\sigma^2}\right\} d\varepsilon_t$$

dan

$$\begin{aligned} f_{Y_t}(y_t) &= \frac{\partial}{\partial y_t} F_{Y_t}(y_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(v)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{\partial v}{\partial y_t} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(\left(y_t - \mu_{X_t}^*\right) - \phi_1\left(Y_{t-1} - \mu_{X_{t-1}}^*\right) - \phi_2\left(Y_{t-2} - \mu_{X_{t-2}}^*\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Misalkan  $\{Y_t\}$  adalah medan- $\sigma$  yang dibangun oleh  $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_t\}$ . Karena  $\{X_t\}$  merupakan rantai Markov 8-state maka terdapat 8 fungsi kerapatan peluang bagi  $\{Y_t\}$ . Kumpulan fungsi kerapatan peluang tersebut dilambangkan dengan  $\eta_t$ .

$$\begin{aligned}
 h_t = & \begin{bmatrix} f(y_t | X_t = 1, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 2, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 3, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 4, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 5, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 6, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 7, Y_{t-1}; q) \\ f(y_t | X_t = 8, Y_{t-1}; q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_1) - f_1(Y_{t-1} - m_1) - f_2(Y_{t-2} - m_1))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_1) - f_1(Y_{t-1} - m_2) - f_2(Y_{t-2} - m_1))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_2) - f_1(Y_{t-1} - m_1) - f_2(Y_{t-2} - m_1))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_2) - f_1(Y_{t-1} - m_2) - f_2(Y_{t-2} - m_1))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_1) - f_1(Y_{t-1} - m_1) - f_2(Y_{t-2} - m_2))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_1) - f_1(Y_{t-1} - m_2) - f_2(Y_{t-2} - m_2))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_2) - f_1(Y_{t-1} - m_1) - f_2(Y_{t-2} - m_2))^2}{2s^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{((y_t - m_2) - f_1(Y_{t-1} - m_2) - f_2(Y_{t-2} - m_2))^2}{2s^2}\right\} \end{bmatrix} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Misalkan  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  melambangkan vektor  $(8 \times 1)$  di mana elemen ke- $j$  pada vektor merepresentasikan  $P\{X_t = j | Y_{t-1}; \theta\}$  dan  $\otimes$  me-lambangkan perkalian elemen per elemen, maka

$$\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t = \begin{bmatrix} P\{X_t = 1 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 2 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 3 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 4 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 5 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 6 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 7 | Y_{t-1}; \theta\} \\ P\{X_t = 8 | Y_{t-1}; \theta\} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f(y_t | X_t = 1, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 2, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 3, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 4, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 5, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 6, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 7, Y_{t-1}; \theta) \\ f(y_t | X_t = 8, Y_{t-1}; \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Misalkan  $\mathbf{1}' = (1,1,1,1,1,1,1)$ , maka

$$\begin{aligned}
 f(y_t | Y_{t-1}; \theta) &= \mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t) \\
 &= P(X_t = 1 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 2 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 3 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 4 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_1))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 5 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 6 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_1) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 7 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_1) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2))^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad + P(X_t = 8 | Y_{t-1}; \theta) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{((y_t - \mu_2) - \phi_1(Y_{t-1} - \mu_2) - \phi_2(Y_{t-2} - \mu_2))^2}{2\sigma^2}\right\}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk memilih nilai awal bagi  $\hat{\xi}_{t|t-1}$  adalah dengan membuat  $\hat{\xi}_{1|0}$  sama dengan vektor dari peluang tak bersyarat  $\pi = [\pi_i]'$  yang memenuhi sifat *ergodic*, yaitu  $\pi = P\pi$  dan  $\sum_{i=1}^8 \pi_i = 1$ .

Perhatikan bahwa

$$P(X_t = j | Y_t, \theta) = \frac{P(y_t, X_t = j | Y_{t-1}, \theta)}{f(y_t | Y_{t-1}, \theta)}$$

sehingga  $\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t}{\mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t)}$ , selain itu  $\hat{\xi}_{t+1|t} = P\hat{\xi}_{t|t}$  dan  $\hat{\xi}_{t+m|t} = P^m \hat{\xi}_{t|t}$ .

### 3. PENDUGAAN PARAMETER

Penduga  $\hat{\theta}$  diperoleh dengan memaksimalkan fungsi log *likelihood*

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | Y_{t-1}; \theta).$$

Dengan membuat turunan pertama dari fungsi log *likelihood* terhadap parameter  $\theta$  sama dengan nol maka berdasarkan persamaan 2.8 diperoleh penduga parameter  $\hat{\theta}$  sebagai berikut.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{\sum_{t=2}^T [Ap^2 + Br^2 + Cs^2 + D\hat{\phi}_2^2 + Eq^2 + F + G\hat{\phi}_1]} \left\{ \sum_{t=2}^T [Apz + B(rz + r\hat{\phi}_1\hat{\mu}_2) - C(sz - s\hat{\mu}_2) - D(\hat{\phi}_2z - \hat{\phi}_2q\hat{\mu}_2) + E(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_2) + F(z + s\hat{\mu}_2) - G(\hat{\phi}_1z + \hat{\phi}_1r\hat{\mu}_2)] \right\} \quad (3.1)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^T [B\hat{\phi}_1^2 + C + Dq^2 + E\hat{\phi}_2^2 + Fs^2 + Gr^2 + H p^2]} \left\{ \sum_{t=2}^T [-B(\hat{\phi}_1z - \hat{\phi}_1r\hat{\mu}_1) + C(z + s\hat{\mu}_1) + D(qz + q\hat{\phi}_2\hat{\mu}_1) - E(\hat{\phi}_2z - \hat{\phi}_2q\hat{\mu}_1) - F(sz - s\hat{\mu}_1) + G(rz + \hat{\phi}_1r\hat{\mu}_1) + H(pz)] \right\} \quad (3.2)$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{1}{\sum_{t=2}^T [Ac^2 + Bd^2 + Cc^2 + Dd^2 + Ec^2 + Fd^2 + Gc^2 + H d^2]} \left\{ \sum_{t=2}^T [A(ac - \phi_2ce) + B(ad - \phi_2de) + C(bc - \phi_2ce) + D(bd - \phi_2de) + E(ac - \phi_2cf) + F(ad - \phi_2df) + G(bc - \phi_2cf) + H(bd - \phi_2df)] \right\} \quad (3.3)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^T [Ae^2 + Be^2 + Ce^2 + De^2 + Ef^2 + Ff^2 + Gf^2 + H f^2]} \left\{ \sum_{t=2}^T [A(ae - \phi_1ce) + B(ae - \phi_1de) + C(be - \phi_1ce) + D(be - \phi_1de) + E(af - \phi_1cf) + F(af - \phi_1df) + G(bf - \phi_1cf) + H(bf - \phi_1df)] \right\} \quad (3.4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\sum_{t=2}^T [A + B + C + D + E + F + G + H]} \left\{ \sum_{t=2}^T [A(a - \phi_1c - \phi_2e)^2 + B(a - \phi_1d - \phi_2e)^2 + C(b - \phi_1c - \phi_2e)^2 + D(b - \phi_1d - \phi_2e)^2 + E(a - \phi_1c - \phi_2f)^2 + F(a - \phi_1d - \phi_2f)^2 + G(b - \phi_1c - \phi_2f)^2 + H(b - \phi_1d - \phi_2f)^2] \right\} \quad (3.5)$$

dengan:

$$a = (y_t - \hat{\mu}_1), \quad b = (y_t - \hat{\mu}_2), \quad c = (y_{t-1} - \hat{\mu}_1)$$

$$d = (y_{t-1} - \hat{\mu}_2), \quad e = (y_{t-2} - \hat{\mu}_1), \quad f = (y_{t-2} - \hat{\mu}_2)$$

$$\begin{aligned}
 p &= (1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2), \quad r = (1 - \hat{\phi}_2), \quad q = (1 - \hat{\phi}_1) \\
 s &= (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2), \quad z = (y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1} - \hat{\phi}_2 y_{t-2}) \\
 A &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 1 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 1, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 B &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 2 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 2, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 C &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 3 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 3, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 D &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 4 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 4, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 E &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 5 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 5, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 F &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 6 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 6, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 G &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 7 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 7, Y_{t-1}; \hat{\theta}) \\
 H &= \frac{1}{f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta})} P(X_t = 8 | Y_{t-1}; \hat{\theta}) f(y_t | X_t = 8, Y_{t-1}; \hat{\theta}).
 \end{aligned}$$

Untuk menduga parameter  $P$  digunakan formula (3.6) berikut yang diperoleh dari Hamilton (1990).

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T P(X_t = j, X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta})}{\sum_{t=2}^T P(X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta})} \tag{3.6}$$

di mana menurut Kim (1994)

$$\begin{aligned}
 &P(X_t = j, X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta}) \\
 &= P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta}) \times P(X_{t-1} = i | X_t = j, Y_T; \hat{\theta}) \\
 &\approx P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta}) \times P(X_{t-1} = i | X_t = j, Y_T; \hat{\theta}) \\
 &= \frac{P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta}) \times P(X_{t-1} = i, X_t = j | Y_T; \hat{\theta})}{P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta})} \\
 &= \frac{P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta}) \times P(X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta}) \times P(X_t = j | X_{t-1} = i)}{P(X_t = j | Y_T; \hat{\theta})} \\
 &= \frac{\hat{\zeta}_{t|T}^{(j)} \cdot \hat{\zeta}_{t-1|T}^{(i)} \cdot a_{ji}}{\hat{\zeta}_{t|T}^{(j)}}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

dan 
$$P(X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta}) = \sum_{j=1}^4 P(X_t = j, X_{t-1} = i | Y_T; \hat{\theta}) = \sum_{j=1}^4 \frac{\hat{\zeta}_{t|T}^{(j)} \cdot \hat{\zeta}_{t-1|T}^{(i)} \cdot a_{ji}}{\hat{\zeta}_{t|T}^{(j)}}.$$

#### 4. PENDUGAAN ULANG PARAMETER DAN ALGORITMA

Karena persamaan (3.1) sampai (3.7) tak linear, maka tidak mungkin untuk memperoleh  $\hat{\theta}$  secara analitik sebagai fungsi dari  $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_T\}$ . Sehingga untuk mencari penduga kemungkinan maksimum digunakan algoritma iteratif dari metode EM.

**4.1 Metode *Expectation Maximization* (Metode EM):** Algoritma EM dikembangkan oleh Baum and Petrie (1966) dengan ide dasar sebagai berikut.

Misalkan  $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$  adalah koleksi ukuran peluang yang terdefinisi pada ruang  $(\Omega, \mathcal{G})$  dan kontinu absolut terhadap  $P_0$ . Misalkan  $Y \subset \mathcal{G}$ . Definisikan fungsi *likelihood* untuk menentukan penduga parameter  $\theta$  berdasarkan informasi  $Y$  sebagai

$$L(\theta) = E_0 \left[ \frac{dP_\theta}{dP_0} \middle| Y \right]$$

dan penduga maksimum *likelihood* didefinisikan sebagai

$$\hat{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

Secara umum penduga maksimum *likelihood*  $\hat{\theta}$  sulit dihitung secara langsung. Algoritma EM memberikan suatu metode iteratif untuk mengaproksimasi  $\hat{\theta}$ , dengan prosedur sebagai berikut.

**Langkah 1:** Set  $p = 0$  dan pilih  $\hat{\theta}_0$ .

**Langkah 2:** [Langkah-E]

$$\text{Set } \theta^* = \hat{\theta}_p \text{ dan hitung } Q(\theta, \theta^*) = E_{\theta^*} \left[ \log \frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}} \middle| Y \right].$$

**Langkah 3:** [Langkah-M]

$$\text{Tentukan } \hat{\theta}_{p+1} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} Q(\theta, \theta^*).$$

**Langkah 4:**  $p \leftarrow p + 1$

Ulangi langkah 2 sampai kriteria berhenti dipenuhi.

**Catatan:**

1. Barisan  $\{\hat{\theta}_p : p \geq 0\}$  memberikan barisan  $\{L(\hat{\theta}_p) : p \geq 0\}$  yang tak turun.

2. Menurut ketaksamaan Jensen,

$$Q(\hat{\theta}_{p+1}, \hat{\theta}_p) \leq \log L(\hat{\theta}_{p+1}) - \log L(\hat{\theta}_p).$$

3.  $Q(\theta, \theta^*)$  disebut *pseudo-loglikelihood* bersyarat.



**4.2 Pendugaan ulang parameter menggunakan metode EM:** Dengan menggunakan metode EM diperoleh algoritma untuk menduga ulang parameter model. Algoritma tersebut sebagai berikut.

**Langkah 1:**

Tentukan banyaknya data  $T$  yang akan diamati serta tentukan juga nilai  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_T)$  dan matriks transisi  $P$ .

Beri nilai awal bagi  $\hat{\theta}$  yang dilambangkan dengan  $\hat{\theta}^{(0)} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2)$ .

Set  $k = 1$

**Langkah 2:**

Tentukan fungsi kerapatan bersyarat bagi  $y_t$ , yaitu  $\eta_t$  seperti pada persamaan 2.8, untuk setiap  $t = 1, 2, \dots, k$

**Langkah 3:**

Penarikan kesimpulan optimal dan peramalan untuk setiap waktu  $t$  pada contoh dapat diperoleh melalui iterasi:

**3.1.** Tentukan nilai awal  $\hat{\xi}_{1|0} = \pi$

**3.2.** Beri nilai awal  $i = 1$

**3.3.** Untuk  $t = i$ , cari nilai dari

$$f(y_t | Y_{t-1}; \hat{\theta}^{(m)}) = \mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1}) \otimes \eta_t$$

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t)}{\mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t)}$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = P \cdot \hat{\xi}_{t|t}$$

$$i = i + 1$$

**3.4.** Ulangi mulai dari langkah (3.3)

Stop jika  $t = k$ .

**Langkah 4:**

Tentukan nilai dari  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2$  yang ditentukan oleh persamaan 3.1 s/d 3.5.

**Langkah 5:**

Beri nama parameter yang dihasilkan pada langkah 4 dengan  $\hat{\theta}^{(k+1)} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2)$

**Langkah 6:**

Cari  $P$  yang baru menggunakan hasil Kim, C.J (1994) dan Hamilton, J. D. (1994), yaitu:

$$\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} = \hat{\xi}_{t|t}^{(j)} \otimes \left\{ P' \cdot \left[ \hat{\xi}_{t+1|T}^{(j)} (\div) \hat{\xi}_{t+1|t}^{(j)} \right] \right\}$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T \frac{\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} \times \hat{\xi}_{t-1|t-1}^{(i)} \times p_{ij}}{\hat{\xi}_{t|t}^{(j)}}}{\sum_{t=2}^T \sum_{j=1}^2 \frac{\hat{\xi}_{t|T}^{(j)} \times \hat{\xi}_{t-1|t-1}^{(i)} \times p_{ij}}{\hat{\xi}_{t|t}^{(j)}}}$$

**Langkah 7:**

Gunakan parameter yang sudah dihasilkan untuk menentukan dugaan bagi  $\hat{Y}_k$

$$E[Y_k | X_k = j, Y_{k-1}; \hat{\theta}] = \hat{\phi}_1(y_{k-1} - \hat{\mu}_{X_{k-1}}^*) + \hat{\phi}_2(y_{k-2} - \hat{\mu}_{X_{k-2}}^*) + \hat{\mu}_{X_k}^*$$

$$\hat{Y}_k = E[Y_k | Y_{k-1}; \hat{\theta}] = \int y_k \cdot f(y_k | Y_{k-1}; \hat{\theta}) dy_k = \sum_{j=1}^N \hat{\xi}_{k|k-1} E[Y_k | X_k = j, Y_{k-1}; \hat{\theta}]$$

•  
jika  $k < T$ ,  $k = k + 1$ , ulangi langkah 2.

**DAFTAR PUSTAKA**

- [1]. **Baum, L.E. and Petrie, T.** 1966. Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37:1554-1563.
- [2]. **Hamilton, J. D.** 1990. Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics*, 45: 39 -70.
- [3]. **Hamilton, J. D.** 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.
- [4]. **Kim, C. J.** 1994. Dynamic linear models with Markov-Switching. *Journal of Econometrics*, 60: 1- 22.
- [5]. **Setiawaty, B.** 2007. *Laporan Hibah Penelitian PHK A2*, Departemen Matematika FMIPA IPB.