

PROSES FISI GELOMBANG SOLITER INTERFACIAL

JAHARUDDIN

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, IPB
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

Abstrak : Penurunan persamaan gerak bagi gelombang interfacial dilakukan dengan metode asimtotik. Domain fluida yang ditinjau berupa dasar yang tidak rata. Dalam penurunan persamaan gerak diasumsikan bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga. Persamaan gerak yang diperoleh berupa persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Kajian bagi proses fisis gelombang soliter interfacial dilakukan dengan menggunakan persamaan KdV. Grafik yang menyatakan hubungan antara kedalaman fluida dengan perambatan beberapa soliter diberikan.

Kata kunci: Persamaan Dasar, Persamaan KdV, dan Gelombang soliter Interfacial.

1. PENDAHULUAN

Fluida dua lapisan adalah fluida yang terdiri atas dua lapisan, dan masing-masing lapisan mempunyai rapat massa yang konstan. Persamaan gerak gelombang pada fluida dua lapisan dinyatakan dalam peubah simpangan gelombang interfacial, yaitu gelombang internal di batas kedua lapisan fluida. Formulasinya yang eksplisit dan sederhana memungkinkan diperolehnya pemahaman masalah gelombang internal. Beberapa penelitian yang dilakukan di laut memberikan suatu data bahwa beberapa perairan dapat didekati dengan fluida dua lapisan, lihat [3].

Salah satu gelombang interfacial yang banyak dipelajari adalah gelombang soliter interfacial, yaitu suatu gelombang interfacial yang merambat dengan bentuk dan kecepatan yang tidak berubah. Di laut, gelombang ini terdeteksi melalui SAR (*Synthetic Aperture Radar*) sebagai pola gelap terang yang tampak teratur (seperti sebuah paket gelombang yang bergerak teratur) di permukaan air laut. Pola ini dipercaya sebagai manifestasi dari gelombang interfacial. Hal ini sesuai dengan hasil pengukuran yang dilakukan oleh Holloway dan Pelinovsky (2001) dalam [4]. Gelombang ini teramati muncul di beberapa tempat, seperti di Laut Andaman (Thailand)[6], dan di laut Sulu (Philipina)[1]. Paket gelombang yang muncul ini merupakan hasil dari proses fisis gelombang soliter interfacial selama terjadinya perambatan gelombang pada dasar yang tidak rata.

Dalam tulisan ini akan dikaji secara matematika proses fisis gelombang soliter interfacial. Untuk itu akan ditinjau fluida yang takmampat (*incompresible*) dan tak kental (*inviscid*) dengan domain fluida dibatasi oleh batas bawah berupa dasar yang tidak rata dan batas atas berupa permukaan yang rata. Penurunan persamaan gerak gelombang dilakukan dengan metode asimtotik [5]. Selain itu, digunakan juga asumsi fluida dangkal, yaitu panjang gelombang internal yang ditinjau jauh lebih besar dari kedalaman fluida. Penurunan persamaan gerak gelombang internal pada dasar yang tidak rata dan kajian proses fisis gelombang internal dengan kerapatan fluida dalam bentuk fungsi eksponensial telah dilakukan oleh Djordjevic dan Redekopp dalam [2]. Selain menurunkan persamaan gerak gelombang interfacial pada fluida dua lapisan, tulisan ini juga akan mengkaji proses fisis gelombang soliter interfacial. Selanjutnya dibahas pula hubungan antara banyaknya gelombang soliter (soliton) yang merambat pada fluida dua lapisan dan parameter perbandingan ketebalan kedua lapisan pada fluida dua lapisan. Grafik hubungan kedua besaran tersebut digambarkan dengan bantuan software MAPLE 12.

2. PERSAMAAN GERAK

Untuk memformulasikan model persamaan gerak untuk gelombang interfacial, maka dimulai dengan meninjau suatu fluida takmampat dan takkental dengan permukaan bebas yang rata, dan diukur pada keadaan setimbang di $z = h$, dan terbatas di bawah oleh batas kaku yang tidak rata di $z = b(x)$. Dimisalkan pula aliran fluida bergerak dalam dua dimensi, yaitu pada arah horizontal x , dan pada arah vertikal z . Selain itu, dimisalkan pula u dan w masing-masing menyatakan kecepatan partikel fluida dalam arah sumbu x dan dalam arah sumbu z . Rapat massa dan tekanan masing-masing dinyatakan oleh ρ dan p , sedangkan g percepatan gravitasi. Persamaan dasar fluida diberikan oleh masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} u_x + w_z &= 0 \\ \rho_t + u\rho_x + w\rho_z &= 0 \\ \rho(u_t + uu_x + wu_z) + p_x &= 0 \\ \rho(w_t + uw_x + ww_z) + p_z + g\rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan syarat batas:

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{di } z &= h \\ w &= ub_x & \text{di } z &= b(x) \\ p &= 0 & \text{di } z &= h. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Berikut ini akan diturunkan persamaan gerak gelombang internal dengan metode asimtotik. Oleh karena itu diasumsikan bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga, dimana pengertian panjang dan waktu yang hingga didasarkan pada pemilihan suatu parameter positif ε sehingga peubah fisis x dan t dapat dituliskan dalam peubah baru berikut:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{3/2} x \\ \tau &= \varepsilon^{1/2} \left(\int \frac{1}{c(\xi)} d\xi - t \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan c kecepatan phase gelombang linear. Selanjutnya peubah takbebas dari persamaan dasar (2.1) dan syarat batas (2.2) dinyatakan dalam uraian asimtotik berikut:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \varepsilon^3 U^{(3)} + \dots \\ w &= \varepsilon^{3/2} W^{(1)} + \varepsilon^{5/2} W^{(2)} + \varepsilon^{7/2} W^{(3)} + \dots \\ p &= \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots \\ \rho &= \rho_o + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \varepsilon^3 \rho^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

yang masing-masing bergantung pada peubah ξ , z , dan τ , sedangkan $\rho_o(z)$ menyatakan rapat massa fluida dalam keadaan setimbang. Jika persamaan (2.4) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.1) dan syarat batas (2.2), maka koefisien ε dan $\varepsilon^{3/2}$ memberikan masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} U_\tau^{(1)} + W_z^{(1)} &= 0 \\ -\rho_\tau^{(1)} + \rho_{oz} W^{(1)} &= 0 \\ -\rho_o U_\tau^{(1)} + \frac{1}{c} P_\tau^{(1)} &= 0 \\ P_z^{(1)} + \rho^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan syarat batas:

$$W^{(1)} = 0, \quad \text{di } z = h \text{ dan } z = b(\xi). \quad (2.6)$$

Koefisien ε^2 dan $\varepsilon^{5/2}$ memberikan masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} U_\tau^{(2)} + W_z^{(2)} &= -N_1 \\ -\rho_\tau^{(2)} + \rho_{oz} W^{(2)} &= -N_2 \\ -\rho_o U_\tau^{(2)} + \frac{1}{c} P_\tau^{(2)} &= -N_3 \\ P_z^{(2)} + \rho^{(2)} &= N_4, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan syarat batas:

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= 0, \quad \text{di } z = h \\ W^{(2)} &= U^{(1)} b_\xi, \quad \text{di } z = b(\xi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

dimana

$$\begin{aligned} N_1 &= U_\xi^{(1)} \\ N_2 &= \frac{1}{c} U^{(1)} \rho_\tau^{(1)} + W^{(1)} \rho_z^{(1)} \\ N_3 &= \left(\frac{1}{c} \rho_o U^{(1)} - \rho^{(1)} \right) U_\tau^{(1)} + \rho_o W^{(1)} U_z^{(1)} + P_\xi^{(1)} \\ N_4 &= \rho_o W_\tau^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), diperoleh masalah nilai batas untuk $W^{(1)}$ berikut:

$$\left(c^2 \rho_o W^{(1)}\right)_z - \rho_{oz} W^{(1)} = 0, \quad (2.10)$$

$$W^{(1)} = 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi).$$

Dengan metode pemisahan variabel, penyelesaian masalah nilai batas (2.10) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$W^{(1)} = A_\tau(\xi, \tau)\phi(z) \quad (2.11)$$

dengan $A(\xi, \tau)$ adalah fungsi sembarang yang akan ditentukan, sedangkan $\phi(z)$ memenuhi masalah nilai batas berikut:

$$\left[c^2 \rho_o \phi\right]_z - \rho_{oz} \phi = 0 \quad (2.12)$$

$$\phi = 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi).$$

Masalah nilai batas untuk $W^{(2)}$ diperoleh dari persamaan (2.7) dan (2.8), yaitu

$$\left[c^2 \rho_o W^{(2)}\right]_z - \rho_{oz} W^{(2)} = N \quad (4.13)$$

$$W^{(2)} = 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi),$$

dengan

$$N = -\left(\frac{1}{c} N_3 + \rho_o N_1\right)_z + \left(\frac{1}{c^2} (N_2 - N_{4\tau})\right) \quad (2.14)$$

$$R = U^{(1)} b_\xi.$$

Dengan demikian diperoleh dua masalah nilai batas untuk $\phi(z)$ dan $W^{(2)}$ yang masing-masing diberikan pada persamaan (2.12) dan (2.13). Masalah nilai batas (2.13) memiliki penyelesaian, jika memenuhi kondisi terselesaikan berikut:

$$\int_b^h (\phi L W^{(2)}) dz = c^2 \rho_o (\phi W_z^{(2)} - W^{(2)} \phi_z) \Big|_{z=b}^{z=h} \quad (2.15)$$

dengan operator L berikut:

$$L = \frac{\partial}{\partial z} \left[(c^2 \rho_o) \frac{\partial}{\partial z} \right] - \rho_{oz}$$

Berdasarkan persamaan (2.15) dapat ditentukan persamaan untuk $A(\xi, \tau)$ yang merupakan persamaan gerak gelombang internal. Selanjutnya, dimisalkan simpangan gelombang internal pada kedalaman z dinyatakan oleh $\zeta(\xi, z, \tau)$.

Karena $W^{(1)}$ menyatakan kecepatan partikel fluida dalam arah horizontal dan dirumuskan dalam persamaan (2.11), yaitu $W^{(1)} = A_\tau(\xi, \tau)\phi(z)$, maka

$$\zeta = \varepsilon A(\xi, \tau)\phi(z) + \varepsilon^2 \zeta^{(2)} + \varepsilon^3 \zeta^{(3)} + \dots$$

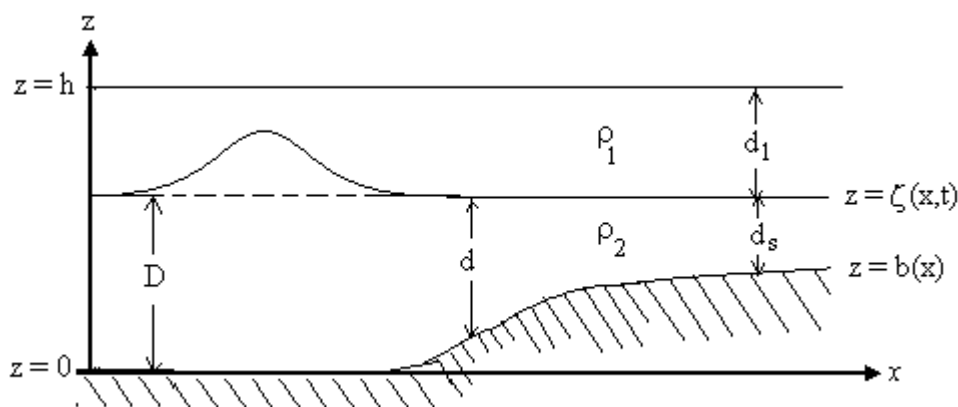
Pada fluida dua lapisan di interface (batas kedua lapisan fluida) diasumsikan $\phi = 1$ sehingga simpangan gelombang interfacial pada orde pertama adalah fungsi $A(\xi, \tau)$. Pada bagian berikut akan dibahas persamaan untuk $A(\xi, \tau)$ pada fluida dua lapisan. Kemudian berdasarkan persamaan untuk $A(\xi, \tau)$ tersebut akan dikaji proses fisi gelombang soliter interfacial.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas proses fisi gelombang interfacial. Gelombang soliter interfacial adalah gelombang soliter yang terjadi di batas antara kedua lapisan fluida pada fluida dua lapisan. Penurunan persamaan gerak gelombang interfacial dilakukan dengan memisalkan rapat massa fluida dua lapisan yang ditinjau berbentuk:

$$\rho_o(z) = \begin{cases} \rho_2 & , b(x) \leq z \leq 0 \\ \rho_1 & , 0 < z \leq h. \end{cases} \quad (3.1)$$

Misalkan h total kedalaman fluida, dan ketebalan lapisan atas adalah d_1 . Pada lapisan bawah dibatasi oleh kurva $z = b(x)$ dengan ketebalan yang bervariasi, yakni mulai dari perairan dangkal dengan ketebalan konstan d_s , kemudian bervariasi dengan ketebalan $d(x)$ lalu ke perairan yang dalam dengan ketebalan konstan D . Domain fluida dua lapisan tersebut diberikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Domain fluida dua lapisan

Jika kondisi fisis fluida dua lapisan ρ_0 pada persamaan (3.1) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.15), maka diperoleh persamaan untuk $A(\xi, \tau)$ berikut:

$$\frac{1}{4} \frac{d'}{d} \frac{\rho_2 d_1}{\rho_1 d + \rho_2 d_1} A + A_{\xi} + \frac{3c(\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d^2)}{2(d_1 d)^2} A A_{\tau} + \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d}{6c} A_{\tau\tau\tau} = 0 \quad (3.2)$$

dengan kecepatan phase c memenuhi persamaan berikut:

$$c^2 = \frac{d_1 d}{\rho_1 d + \rho_2 d_1}.$$

Selanjutnya diperkenalkan transformasi berikut:

$$A(\xi, \tau) = f(\xi)\eta(\xi, \tau),$$

dengan

$$f(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\rho_1 d(\xi) + \rho_2 d_1}{d(\xi)}},$$

maka persamaan (3.2) menjadi:

$$\eta_{\xi} + \mu \eta \eta_{\tau} + \lambda \eta_{\tau\tau\tau} = 0 \quad (3.3)$$

dengan koefisien variabel berbentuk:

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{f}{cd_1d} \frac{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d^2}{\rho_2 d_1 + \rho_1 d^2}, \quad \lambda = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d}{6c}$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dengan koefisien bergantung pada variabel ξ . Penyelesaian gelombang soliter interfacial dari persamaan KdV (3.3) berbentuk:

$$\eta(\xi, \tau) = a \operatorname{sech}^2 \beta(\tau - \xi / c_1)$$

dengan

$$c_1 = \frac{\mu a}{3} \quad \text{dan} \quad \beta^2 =$$

Gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilamana $\mu > 0$ dan berupa depresi bilamana $\mu < 0$. Untuk kasus d konstan, gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilamana $\rho_2 d_1^2 > \rho_1 d^2$, dan berupa depresi bilamana $\rho_2 d_1^2 < \rho_1 d^2$. Dengan demikian gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilaman perbedaan rapat massa kedua lapisan cukup kecil. Persamaan (3.3) tersebut akan digunakan untuk mengkaji proses fisi gelombang soliter interfacial. Selanjutnya gelombang interfacial yang memiliki sejumlah N gelombang soliter (soliton) dinyatakan dalam bentuk:

$$\eta(\xi, \tau) = N(N+1) \operatorname{sech}^2 \beta(\tau - \xi / c_1).$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3), maka hubungan antara banyaknya soliton dan ketebalan dari setiap lapisan fluida dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 D}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_s} \frac{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d_s^2}{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 D^2} \left(\frac{D}{d_s} \right)^{5/4} \left(\frac{\rho_1 D + \rho_2 d_1}{\rho_1 d_s + \rho_2 d_1} \right)^{3/4} \quad (3.4)$$

Selanjutnya didefinisikan besaran berikut:

$$\delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, \quad D_\infty = \frac{d_1}{D}, \quad H = \frac{d_s}{D}$$

maka persamaan (3.4) menjadi

$$\frac{N(N+1)}{2} = H^{-5/4} \frac{(1+\delta) + D_\infty}{(1+\delta)H + D_\infty} \cdot \frac{D_\infty^2(1+\delta) - H^2}{D_\infty^2(1+\delta) - 1} \left(\frac{D_\infty(1+\delta) + 1}{D_\infty(1+\delta) + H} \right)^{3/4} \quad (3.5)$$

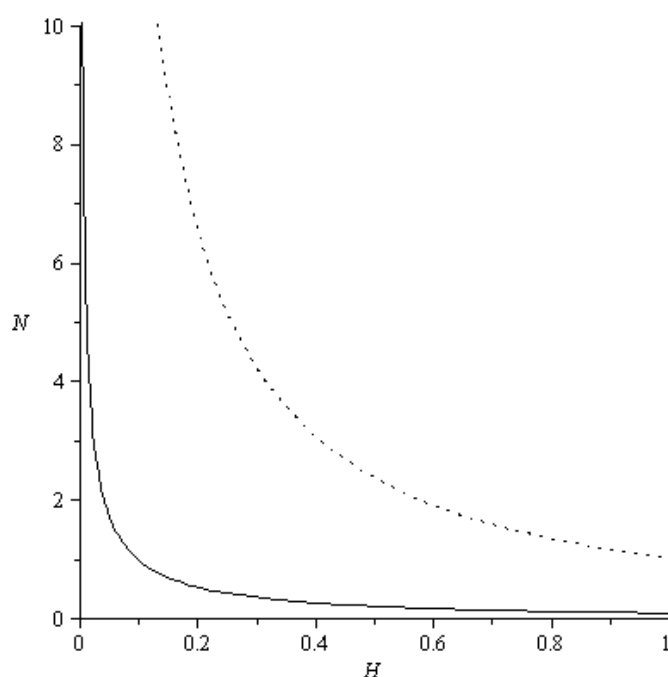
Jika diasumsikan bahwa rapat massa lapisan bawah ρ_2 mendekati rapat massa lapisan atas ρ_1 , maka $\delta \ll 1$ sehingga orde pertama uraian deret Taylor dari ruas kanan persamaan (3.5) terhadap δ di sekitar $\delta = 0$ memberikan persamaan berikut:

$$\frac{N(N+1)}{2} = H^{-5/4} \frac{H - D_\infty}{1 - D_\infty} \left(\frac{D_\infty + 1}{D_\infty + H} \right)^{3/4} \quad (3.6)$$

Persamaan (3.5) merupakan persamaan yang akan digunakan untuk mengkaji fisi gelombang soliter. Besaran D_∞ menyatakan perbandingan antara ketebalan

lapisan bawah yang menuju perairan dalam dan ketebalan lapisan atas, sedangkan besaran H menyatakan perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Untuk kasus $D_\infty \ll 1$ diperoleh bahwa fungsi $N(N+1)/2$ mendekati fungsi $H^{-5/4}$, sedangkan untuk kasus $D_\infty \gg 1$, fungsi $N(N+1)/2$ mendekati fungsi H^{-1} .

Gambar 3 berikut ini menunjukkan pengaruh besaran H terhadap banyaknya gelombang soliter untuk kasus $D_\infty \ll 1$ dan $D_\infty \gg 1$.



Gambar 3 Hubungan antara banyaknya soliton dan H untuk kasus $D_\infty \ll 1$ (garis putus-putus), dan $D_\infty \gg 1$ (garis utuh)

Untuk kasus $D_\infty \ll 1$, proses fisis terjadi bilamana besaran H sangat kecil. Untuk kasus $D_\infty \gg 1$, suatu gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi dua gelombang soliter ($N = 2$) bilamana besaran $H = 0,57$ yang dihitung berdasarkan persamaan (3.6), atau dapat dilihat dalam Gambar 3. Selain itu, pada kasus ini untuk $H = 0,31$ dan $H = 0,16$ berturut-turut diperoleh bahwa gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi empat dan delapan gelombang soliter. Dengan demikian apabila lapisan atas lebih tipis dibandingkan dengan lapisan di bawahnya, maka peningkatan fisis gelombang soliter interfacial bergantung pada H , yaitu perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Semakin kecil nilai H , semakin banyak gelombang soliter yang terjadi.

4. KESIMPULAN

Penurunan persamaan gerak gelombang pada fluida dua lapisan dengan batas bawah berupa dasar tidak rata-rata dilakukan dengan metode asimtotik. Dalam metode asimtotik ini, digunakan parameter yang didefinisikan berdasarkan asumsi bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga. Persamaan gerak gelombang interfacial yang diperoleh berupa persamaan KdV dengan koefisien bergantung pada variabel. Persamaan KdV yang dihasilkan sesuai untuk mengkaji proses fisis gelombang soliter interfacial. Hubungan antara banyaknya gelombang soliter (soliton) yang merambat pada fluida dua lapisan dan parameter perbandingan ketebalan kedua lapisan pada fluida dua lapisan diperoleh dengan bantuan software MAPLE 12.

Jika kasus ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dalam lebih besar dari ketebalan lapisan atas, maka fungsi $N(N+1)/2$ dengan N banyaknya gelombang soliter mendekati fungsi $H^{-5/4}$ dimana H menyatakan perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Sebaliknya, jika kasus ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dalam lebih tipis dari ketebalan lapisan atas, maka fungsi $N(N+1)/2$ mendekati fungsi H^{-1} . Pada kasus pertama, proses fisis terjadi bilamana besaran H sangat kecil. Sedangkan pada kasus kedua, suatu gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi dua gelombang soliter, bilamana besaran $H = 0,57$. Selain itu, pada kasus ini untuk $H = 0,31$ dan $H = 0,16$ berturut-turut diperoleh bahwa gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi empat dan delapan gelombang soliter. Jadi, apabila lapisan atas lebih tipis dibandingkan dengan lapisan di bawahnya, maka peningkatan fisis gelombang soliter interfacial bergantung pada H , yaitu perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Semakin kecil nilai H , semakin banyak gelombang soliter yang terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Apel, J.R., J.Holbrook, A.K. Liu, J.J.Tsai.** 1985. The Sulu Sea Internal Soliton Experiment. *J. Phys. Oceanography*, **15**: 1625-1651.
- [2]. **Djordjevic, V.D., L.G. Redekopp.** 1978. The Fission and Disintegration of Internal Solitary Waves Moving over Two-Dimensional Topography. *J. Phys. Oceanography*, **8**: 1016-1024..
- [3]. **Gerkeema, T.** 1994. *Nonlinear Dispersive Internal Tides: Generation Model For a Rotating Ocean*. Ph.D-Thesis, Univ. of Utrecht, The Netherlands.
- [4]. **Holloway, P., E. Pelinovsky.** 2001. Internal Tides Transformation and Oceanic Internal Solitary Waves, dalam *Stratified Flows*, Bab 2, Grimshaw, R. Editor, Kluwer. Dordrecht, 29-59.
- [5]. **Hinch, E.J.** 1992. *Perturbation Methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [6]. **Osborne, A.R., T.L. Burch.** 1980. Internal Solitons in the Andaman Sea, *Science*, **208**: 451-460.