

PEMROGRAMAN FRAKSIONAL LINEAR

FARIDA HANUM

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor, Indonesia

ABSTRAK. Pemrograman Fraksional Linear (*Linear Fractional Programming*) merupakan pengoptimuman fungsi objektif yang berupa fungsi rasional. Dalam tulisan ini akan dibahas Pemrograman Fraksional Linear (PFL) dan penyelesaiannya dengan menggunakan Transformasi Charnes-Cooper yang mengubah pemrograman fraksional linear menjadi pemrograman linear, dan penyelesaian PFL dengan menggunakan Algoritme Dinkelbach. Selain itu, dibahas pula salah satu aplikasi PFL dalam masalah transportasi.

1. PENDAHULUAN

Dalam beberapa aplikasi masalah pemrograman taklinear, fungsi objektif yang dimaksimumkan atau diminimumkan berupa rasio dari dua buah fungsi. Dalam terapan lain, fungsi objektif dapat mempunyai lebih dari satu rasio. Masalah pengoptimuman rasio sering disebut Pemrograman Fraksional (*Fractional Programming/FP*). Jika hanya satu rasio yang dioptimalkan, maka masalah tersebut dinamakan Pemrograman Fraksional Rasio Tunggal (*single-ratio FP*), sedangkan jika lebih dari satu rasio yang dioptimalkan dinamakan Pemrograman Fraksional yang Diperumum (*generalized FP*) atau *max-min FP* (Schaible & Shi 2004, Frenk & Schaible 2004). Pemrograman Fraksional Linear (PFL) adalah salah satu jenis dari PF, yaitu bila fungsi-fungsi dalam fungsi objektif masalah PFL merupakan fungsi *affine* (linear dan konstan) dan daerah solusi fisibelnya merupakan polihedron yang merupakan himpunan konveks.

Bentuk umum dari PFL adalah sebagai berikut:
Minimumkan/maksimumkan fungsi objektif

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}, \quad (1.1)$$

terhadap

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad (1.3)$$

dengan $m_1 \leq m_2 \leq m$, $n_1 \leq n$, dan $D(x) \neq 0$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di S , dengan S adalah himpunan solusi fisibel (daerah fisibel) yang didefinisikan oleh kendala (1.2) dan (1.3). Karena $D(x) \neq 0 \forall x \in S$, maka tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa

$$D(x) > 0, \forall x \in S. \quad (1.4)$$

Kasus $D(x) < 0$ tetap dapat diselesaikan dengan metode yang sama dengan cara mengalikan $P(x)$ dan $D(x)$ pada fungsi objektif masing-masing dengan (-1) . Diasumsikan pula bahwa semua kendala dalam sistem (1.2) saling bebas linear sehingga *rank* dari matriks $A = (a_{ij})_{m \times n}$ adalah m . Karena untuk menentukan nilai x yang meminimumkan $Q(x)$ dapat dilakukan dengan menentukan nilai x yang memaksimumkan $-Q(x)$, maka untuk selanjutnya, masalah PFL yang dibahas dalam tulisan ini adalah masalah maksimisasi.

Dalam Bajalinov (2003) diberikan beberapa definisi yang akan digunakan dalam pembahasan masalah PFL sebagai berikut. Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi kendala (1.2) dan (1.3) disebut **solusi fisibel** masalah PFL (1.1) – (1.3). Jika vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah solusi fisibel dari masalah maksimisasi (minimisasi) PFL (1.1) – (1.3) dan memberikan nilai maksimal (minimal) untuk fungsi objektif $Q(x)$ pada himpunan fisibel S , maka vektor x adalah **solusi optimal** dari masalah maksimisasi (minimisasi) PFL (1.1) – (1.3). Suatu masalah maksimisasi (minimisasi) PFL dikatakan **dapat diselesaikan** (*solvable*) jika himpunan fisibelnnya takkosong dan fungsi objektif $Q(x)$ mempunyai batas atas (bawah) hingga di S . Jika himpunan fisibel $S = \emptyset$, maka masalah PFL tersebut dikatakan **takfisibel**. Jika fungsi objektif $Q(x)$ dari masalah maksimisasi (minimisasi) PFL tidak mempunyai batas atas (bawah) yang hingga, maka masalah PFL tersebut dikatakan **takterbatas** (*unbounded*).

Dalam Bajalinov (2003) dikemukakan pula bahwa dalam banyak kasus PFL adalah suatu Pemrograman Linear (PL) dengan melihat nilai-nilai d_j dan p_j . Sebagai contoh: jika $d_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ dan $d_0 = 1$, maka PFL (1.1) – (1.3) adalah suatu PL. Bazaraa *et al.* (1979) mengemukakan bahwa jika S merupakan himpunan konveks, maka fungsi Q merupakan fungsi pseudokonveks dan pseudokonkaf di S sehingga diperoleh kesimpulan antara lain maksimum lokal juga merupakan maksimum global di daerah fisibelnya.

Beberapa metode penyelesaian PFL sudah dibahas, antara lain metode grafik (Bajalinov 2003), Metode Tantawy (Tantawy 2007), Algoritme Kombinasi (Shi 2001), metode titik interior dan masalah dual (Schaible & Shi 2004) dll. Dalam tulisan ini PFL akan diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks dengan terlebih dahulu mengubah PFL menjadi PL melalui transformasi Charnes-Cooper (Bajalinov 2003). Dalam bagian berikutnya akan dibahas pula algoritme Dinkelbach (Schaible 1976) yang bisa juga digunakan untuk menyelesaikan pemrograman fraksional yang taklinear. Selain metode penyelesaian, dalam tulisan ini juga diberikan beberapa aplikasi PFL di beberapa bidang beserta contoh numeriknya.

2. TRANSFORMASI CHARNES - COOPER

Transformasi ini akan mengubah PFL menjadi PL. Akan ditunjukkan bahwa solusi optimal dari PFL dapat diperoleh dari solusi optimal PL.

Misalkan diberikan PFL dalam bentuk umum (1.1) – (1.3) dan didefinisikan variabel-variabel

$$t_j = \frac{x_j}{D(x)}, j = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 = \frac{1}{D(x)}, \quad (2.1)$$

dengan

$$D(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0. \quad (2.2)$$

Dengan menggunakan $t_j, j = 0, 1, \dots, n$, maka fungsi objektif $Q(x)$ dapat dituliskan dalam bentuk maksimumkan/minimumkan

$$L(t) = \sum_{j=0}^n p_j t_j. \quad (2.3)$$

Karena $D(x) > 0 \forall x \in S$, maka semua kendala dalam (1.2) dan (1.3) dapat dikalikan dengan $\frac{1}{D(x)}$ sehingga diperoleh kendala-kendala

$$\left. \begin{array}{l} -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \\ -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \geq 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ -b_i t_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

dan

$$t_j \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n_1. \quad (2.5)$$

Hubungan antara variabel x_j dan t_j dapat diperoleh dengan mengalikan masing-masing persamaan pada (2.2) dengan $\frac{1}{D(x)}$ sehingga diperoleh kendala baru

$$\sum_{j=0}^n d_j t_j = 1. \quad (2.6)$$

Masalah PL (2.3) – (2.6) disebut suatu *analog linear* dari masalah PFL.

Jika himpunan fisibel S terbatas dan karena fungsi $D(x)$ linear, $D(x) > 0, \forall x \in S$, maka lema berikut dapat dibuktikan.

Lemma 2.1. *Jika vektor $t = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ adalah solusi fisibel dari masalah PL (2.3) – (2.6), maka $t_0 > 0$.*

Proof. Misalkan vektor-vektor

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad \text{dan} \quad t' = (t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$$

berturut-turut adalah solusi fisibel dari masalah asli PFL (1.1) – (1.3) dan masalah PL (2.3) – (2.6). Andaikan $t'_0 = 0$. Karena x' merupakan solusi fisibel dari masalah asli PFL (1.1) – (1.3), maka x' memenuhi kendala (1.2) – (1.3), dan karena t' solusi fisibel dari PL (2.3) – (2.6), maka t' memenuhi kendala (2.4) – (2.5). Jika masing-masing kendala yang terkait dengan t' dikalikan dengan $\lambda > 0$ dan kemudian menambahkannya dengan kendala yang berpadanan yang terkait dengan x'

maka akan diperoleh

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j + \lambda t'_j) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j + \lambda t'_j) \geq b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j + \lambda t'_j) = b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

dan

$$(x'_j + \lambda t'_j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1.$$

Ini berarti bahwa vektor $x' + \lambda t'$ adalah solusi fisibel dari masalah PFL asli untuk sembarang λ positif. Tetapi λ dapat diambil sebesar mungkin sehingga himpunan fisibelnya takterbatas. Kontradiksi dengan asumsi bahwa S terbatas. \square

Sekarang akan ditunjukkan kaitan solusi optimal masalah PFL dengan solusi optimal masalah analog linearinya.

Theorem 2.2. *Jika vektor $t^* = (t_0^*, t_1^*, \dots, t_n^*)$ adalah solusi optimal dari masalah PL (2.3) – (2.6), maka vektor $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan solusi optimal dari masalah asli PFL (1.1) – (1.3) dengan*

$$x_j^* = \frac{t_j^*}{t_0^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Proof. Bukti pernyataan yang diberikan hanya untuk masalah maksimasi. Bukti untuk masalah minimisasi dapat dilakukan dengan cara serupa.

Karena vektor t^* solusi optimal masalah maksimasi dari masalah analog linear (2.3) – (2.6), maka berlaku

$$L(t^*) \geq L(t), \quad \forall t \in T$$

dengan T adalah himpunan fisibel masalah analog linear (2.3) – (2.6). Andaikan vektor x^* bukan solusi optimal dari masalah maksimasi PFL (1.1) – (1.3). Maka terdapat vektor lain $x' \in S$ sehingga $Q(x') \geq$

$Q(x^*)$. Tetapi,

$$\begin{aligned} Q(x^*) &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j^* + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j^* + d_0} \stackrel{2.8}{=} \frac{\sum_{j=1}^n p_j \frac{t_j^*}{t_0^*} + p_0}{\sum_{j=1}^n d_j \frac{t_j^*}{t_0^*} + d_0} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j t_j^* + p_0 t_0^*}{\sum_{j=1}^n d_j t_j^* + d_0 t_0^*} \stackrel{2.6}{=} \frac{\sum_{j=1}^n p_j t_j^* + p_0 t_0^*}{1} \stackrel{2.3}{=} L(t^*). \end{aligned}$$

Ini berarti

$$Q(x') \geq L(t^*). \quad (2.9)$$

Karena vektor x' merupakan solusi fisibel dari masalah asli PFL (1.1) – (1.3) maka dapat ditunjukkan

$$t' = (t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_n),$$

dengan

$$t'_0 = \frac{1}{D(x')}, t'_j = \frac{x'_j}{D(x')}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

adalah solusi fisibel dari masalah analog linear (2.3) – (2.6) dan memenuhi

$$L(t') \geq L(t^*).$$

Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa vektor t^* merupakan solusi optimal dari masalah maksimisasi PFL (1.1) – (1.3). Jadi vektor x^* haruslah merupakan solusi optimal dari masalah maksimisasi PFL (1.1) – (1.3). \square

Contoh:

Misalkan diberikan masalah PFL

$$\text{maksimumkan } Q(x) = \frac{8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7}$$

terhadap kendala

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Dengan Transformasi Charnes-Cooper diperoleh masalah PL yang berpadanan dengan PFL ini yaitu

$$\text{maksimumkan } L(t) = 4t_0 + 8t_1 + 9t_2 + 4t_3$$

terhadap kendala

$$\begin{aligned} 7t_0 + 2t_1 + 3t_2 + 2t_3 &= 1 \\ -3t_0 + t_1 + t_2 + 2t_3 &\leq 0 \\ -4t_0 + 2t_1 + t_2 + 4t_3 &\leq 0 \\ -15t_0 + 5t_1 + 3t_2 + t_3 &\leq 0 \\ t_j &\geq 0, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan LINDO 6.00 diperoleh bahwa solusi PL ini adalah

$$t^* = (0.066667, 0.066667, 0.133333, 0) \text{ dengan } L(t^*) = 2.0,$$

sehingga solusi PFL adalah

$$x^* = (1, 2, 0) \text{ dengan nilai } Q(x^*) = 2.0.$$

3. ALGORITME DINKELBACH

Salah satu metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan *fractional programming* (tidak harus linear) adalah dengan hampiran parametrik yang diberikan oleh Dinkelbach (Schaible 1976). Untuk masalah PFL, metode ini mereduksi solusi PFL menjadi solusi dari beberapa *linear programming*.

Misalkan diberikan masalah PFL dalam bentuk umum (1.1) – (1.3) dan didefinisikan fungsi

$$F(\lambda) = \max_{x \in S} \{P(x) - \lambda D(x)\}, \lambda \in R$$

dengan S menyatakan himpunan fisibel dari masalah (1.1) – (1.3).

Theorem 3.1. *Vektor x^* adalah solusi optimal dari masalah PFL (1.1) – (1.3) jika dan hanya jika*

$$F(\lambda^*) = \max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \quad (3.1)$$

dengan

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)}. \quad (3.2)$$

Proof. Jika vektor x^* adalah solusi optimal dari masalah (1.1) – (1.3), maka

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \forall x \in S.$$

Ini berarti

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \forall x \in S.$$

Jadi

$$\max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0.$$

Sebaliknya, misalkan x^* adalah solusi optimal dari

$$\max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0$$

maka

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \quad \forall x \in S.$$

Ini berarti

$$\begin{aligned} P(x) - \lambda^* D(x) &\leq 0 \\ \frac{P(x)}{D(x)} &\leq \lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)}, \quad \forall x \in S \end{aligned}$$

Jadi x^* adalah solusi optimal dari masalah (1.1) – (1.3). \square

Teorema ini juga memberikan prosedur untuk menentukan solusi optimal dari masalah PFL (1.1) – (1.3). Selain itu, karena $D(x) > 0, \forall x \in S$, maka

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(x) < 0,$$

sehingga fungsi $F(\lambda)$ merupakan fungsi menurun dalam λ .

Algoritme Dinkelbach

Step 1. Ambil $x^{(0)} \in S$, dan hitung $\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$, dan $k := 1$;

Step 2. Tentukan

$$x^{(k)} := \arg \max_{x \in S} \{P(x) - \lambda^{(k)} D(x)\}.$$

Step 3. Jika $F(\lambda^{(k)}) = 0$ maka $x^* = x^{(k)}$ adalah solusi optimal. Stop.

Step 4. Tentukan

$$\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})},$$

misalkan $k := k + 1$. Lanjutkan ke Step 2.

Contoh:

Misalkan diberikan masalah PFL

$$\text{maksimumkan } Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15}$$

terhadap

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Penyelesaian PFL ini dengan menggunakan Algoritme Dinkelbach adalah sebagai berikut:

- $k = 1$

1. $x^{(0)} = (0, 0)^T \in S$

$$\lambda^{(1)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{1}{3}.$$

2. Selesaikan PL

$$\max P(x) - \lambda^{(1)} D(x) \text{ terhadap kendala (3.3),}$$

dan solusinya adalah $x^{(1)} = (0, 3)^T$.

$$F(\lambda^{(1)}) = 1 \neq 0.$$

$$3. \lambda^{(2)} = \frac{P(x^{(1)})}{D(x^{(1)})} = \frac{8}{21} \quad \text{dan}$$

- $k = 2$.

1. Selesaikan PL

$$\max P(x) - \lambda^{(2)} D(x) \text{ terhadap kendala (3.3),}$$

dan solusinya adalah $x^{(2)} = (0, 3)^T$.

$$F(\lambda^{(2)}) = 0.$$

2. Proses selesai dengan solusi PFL adalah $x^* = (0, 3)^T$.

4. APLIKASI

Aplikasi *Fractional Programming* antara lain dalam masalah manajemen pengambilan keputusan seperti maksimisasi produktivitas, maksimisasi *return* dari investasi, minimisasi biaya/waktu, maksimisasi dari output/input (Schaible & Shi 2004, Frenk & Schaible 2004). Aplikasi lain juga muncul dalam bidang lain, seperti dalam bidang kesehatan (Falk *et al.* 1992), bioinformatika (Leber *et al.* 2005), fisika dll. Dalam (Bajalinov 2003) diberikan beberapa aplikasi PFL antara lain dalam masalah transportasi, masalah perencanaan produksi, masalah keuangan, masalah penentuan lokasi dll. Salah satu aplikasi dalam (Bajalinov 2003) untuk masalah transportasi adalah sebagai berikut :

Sebuah perusahaan memiliki tiga gardu listrik yang menyuplai kebutuhan listrik untuk empat kota. Setiap gardu listrik dapat menyuplai listrik dengan kapasitas (dalam juta kwh/*kilowatt-hours*) yang diberikan dalam tabel berikut:

	Gardu 1	Gardu 2	Gardu 3
Suplai (dalam juta kwh)	35	50	40

Kebutuhan listrik pada saat beban puncak untuk masing-masing kota tersebut diberikan dalam tabel berikut:

	Kota 1	Kota 2	Kota 3	Kota 4
Kebutuhan (dalam juta kwh)	45	20	30	30

Ongkos pengiriman 1 juta kwh listrik dari gardu ke masing-masing kota diberikan dalam tabel berikut:

	Kota 1	Kota 2	Kota 3	Kota 4
Gardu 1	\$8	\$6	\$10	\$9
Gardu 2	\$9	\$12	\$13	\$7
Gardu 3	\$14	\$9	\$16	\$5

Keuntungan perusahaan yang diperoleh per 1 juta kwh listrik yang disuplai adalah

	Kota 1	Kota 2	Kota 3	Kota 4
Gardu 1	\$5	\$4	\$4	\$3
Gardu 2	\$6	\$2	\$3	\$4
Gardu 3	\$10	\$5	\$6	\$2

Sekarang, akan diformulasikan masalah tersebut menjadi suatu PFL untuk memaksimumkan keuntungan yang diperoleh per 1 unit ongkos pengiriman. Misalkan didefinisikan x_{ij} adalah kuantitas listrik (dalam kwh) yang dikirimkan dari gardu- i ke kota- j , untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, 3, 4$. Misalkan total keuntungan perusahaan didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} P(x) = & 5x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + \\ & 6x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + \\ & 10x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34}, \end{aligned}$$

dan total ongkos yang dikeluarkan perusahaan adalah

$$\begin{aligned} D(x) = & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\ & 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ & 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}. \end{aligned}$$

Maka fungsi objektif yang harus dimaksimumkan adalah

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

Kendala yang dihadapi perusahaan ada dua macam. Pertama, total listrik yang dikirimkan dari masing-masing gardu tidak dapat melebihi kapasitas setiap gardu (kendala suplai), yaitu

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq 35, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leq 40. \end{aligned}$$

Kedua, setiap kota harus mendapat listrik yang cukup untuk memenuhi permintaannya (kendala permintaan), yaitu

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} & \geq 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & \geq 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & \geq 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & \geq 30. \end{aligned}$$

Selain itu harus dipenuhi kendala ketaknegatifan

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bajalinov EB. 2003. *Linear-Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software*. Springer.
- [2] Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM. 1979. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley, New York.
- [3] Falk JE, Palocsay SW, Sacco WJ, Copes WS, Champion HR. 1992. Bounds on a trauma outcome function via optimization. *Operations Research* 40 (Supplement 1): S86 – S95.
- [4] Frenk JBG & Schaible S. 2004. Fractional Programming. *ERS-2004-074-LIS*. Erasmus Research Institute of Management (ERIM). Tersedia di <http://www.erim.eur.nl> [1 Juli 2008]
- [5] Leber M, Kadelari L, Schönhuth A, Schrader R. 2005. A fractional programming approach to efficient DNA melting temperature calculation. *Bioinformatics* 21(10): 2375 – 2382.
- [6] Marchi E. 2006. Some remarks about the transformation of Charner and Cooper. Tersedia di http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2006/04/1381.pdf [9 Juli 2008]
- [7] Schaible S. 1976. Fractional programming II, on Dinkelbach's Algorithm. *Management Science* 22(8): 868 – 873.
- [8] Schaible S & Shi J. 2004. Recent Development in Fractional Programming: Single Ratio and Max-Min Case. Tersedia di <http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~shi/ss04.pdf> [2 Juli 2008].
- [9] Shi J. 2001. A combined algorithm for fractional programming. *Annals of Operations Research* 103: 135 – 147.
- [10] Tantawy SF. 2007. A new method for solving linear fractional programming problems. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* 1(2): 105 – 108.

