Komputasi Gerak Benda Jatuh Relativistik dengan Variasi Percepatan Gravitasi dan Gesekan Menggunakan Bahasa Reduce

Tri Hartanti dan Arief Hermanto
Jurusan Fisika FMIPA UGM Sekip Utara Yogyakarta 55281

Abstrak

Studi ini melaporkan perhitungan penyelesaian beserta ralat komputasinya dari sebuah persamaan diferensial yang berkaitan dengan gerak benda relativistik dengan variasi percepatan gravitasi dan gesekan menggunakan bantuan sistem aljabar komputer atau bahasa pemrograman Reduce. Metode numerik yang digunakan adalah deret Taylor. Study ini telah berhasil melakukan komputasi dua kondisi antara gerak benda jatuh non relativistik dengan gerak benda dikoreksi relativistik dengan variasi percepatan gravitasi dan gesekan. Dengan memperhatikan adanya ralat pemotongan, diperoleh hasil komputasi jarak yang ditempuh benda $z = 1{,}0999 \pm 0{,}001$ (satuan panjang). Perbedaan nilai antara gerak benda jatuh non relativistik dengan gerak benda yang dikoreksi relativistik dengan variasi percepatan gravitasi dan gesekan adalah sebesar $0{,}005$ (satuan panjang).

Kata kunci: gerak relativistik, polinomial, komputasi, REDUCE

Abstract

This study reported a computational error and its resolution in the computation of a differential equation related to the relativistic motion of objects with variation of gravitational acceleration and friction using the help of a computer algebra system or programming language Reduce with Taylor series as the numerical method. This study has successfully performed two computational conditions between non relativistic falling motion of a body with the relativistic motion of the body corrected by variation of the acceleration of gravity and friction. Taking the truncation error in computation into insideration, we obtained the result of the distance travelled by the body z = 1.0999 ± 0.001 unit of length. The difference between the value of non-relativistic motion of falling body with its corrected relativistic motion with variation of gravitational acceleration and friction is 0.005 unit of length.

Keywords: relativistic motion, polynomials, computation, REDUCE

1. Pendahuluan

Penyelesaian masalah fisika pada dasarnya adalah pemahaman berbagai materi yang berhubungan dengan fenomena-fenomena alam dari sains fisika. Adapun untuk memudahkan pemahaman materi tersebut diperlukan suatu media peraga atau alat penunjang. Beberapa materi yang memerlukan media peraga diantaranya seperti gerak suatu benda. Gerak suatu benda jatuh dipengaruhi oleh percepatan gravitasi yang ada juga gaya gesekan.

Hasil eksperimen selalu harus dinyatakan beserta ralatnya sedangkan hasil perhitungan teoretik biasanya dinyatakan tanpa ralat. Padahal dalam perhitungan teoretik ada ralat yang berasal dari aproksimasi dalam metode numerik (yang disebut ralat pemotongan) dan ralat yang berasal dari kalkulator atau komputer (yang disebut ralat pembulatan). Jika hasil perhitungan teoretik tidak disertai ralatnya dan kemudian dibandingkan dengan hasil eksperimen yang selalu disertai ralat, maka dapat timbul miskonsepsi bahwa perhitungan teoretik adalah eksak sedangkan eksperimen selalu mengandung ralat (Hermanto, 2012a). Ada dua jenis ralat, yaitu ralat pemotongan dan ralat pembulatan. Ralat pemotongan berasal dari metode numeric yang digunakan sedangkan ralat pembulatan berasal dari cara representasi bilangan real dalam komputer. Ralat pembulatan dapat dihilangkan dengan penggunaan bilangan rasional. Penggunaan bilangan rasional ini merupakan salah satu cirri komputasi simbolik.

Pada penelitian sebelumnya dihasilkan bahwa penentuan ralat komputasi penting karena perbedaan antara dua nilai menjadi kabur oleh besarnya ralat. Dalam kasus yang kita ditinjau misalnya adanya gaya penghambat dan faktor relativistik dianggap sebagai koreksi (karena nilai k dan $v(0)$ yang relatif kecil), maka dibandingkan hasil komputasi dengan nilai posisi benda seandainya tidak ada penghambat dan faktor relativistik. Bahasa pemrograman yang mampu melakukan komputasi bilangan rasional dan polinomial (di sini dicontohkan UBASIC) mempunyai potensi sangat besar dalam penyelesaian persamaan diferensial yang dijumpai dalam semua bidang fisika (Hermanto, 2012b).

Tujuan penelitian ini adalah menggunakan metode deret Taylor dan bahasa Reduce dalam menyelesaikan masalah komputasi beserta ralatnya tentang gerak benda jatuh relativistik dengan variasi percepatan gravitasi dan gesekan serta menghitung perbedaan antara gerak jatuh non-relativistik dengan yang dikoreksi relativistik. Penelitian yang dilakukan terutama untuk menunjukkan metode komputasinya. Kita tidak terikat pada gerak benda di permukaan Bumi. Tidak dibahas aplikasi dari komputasi ini.

2. Teori

2.1 Bahasa Pemrograman Reduce

Reduce bahasa pemrograman komputer yang bersifat numerik dan simbolik (Hearn, 2004; Grozin, 2005). Di samping keuntungannya yang bersifat non komersil atau *open source* dengan kapasitas sekitar 22 MB, Reduce juga dapat melakukan banyak hal dalam pemrograman, seperti membuat aplikasi interaktif, sehingga sesuai untuk media penyelesaian masalah fisika yang menyajikan komputasi simbolik dan numerik. Penggunaan bahasa pemrograman Reduce lebih menguntungkan, karena bahasa pemrograman Reduce bisa dioperasikan oleh semua *operating system (OS).*

2.2 Gerak Relativistik Dengan Gesekan Udara dan Percepatan Gravitasi

Akibat adanya efek gesekan fluida, sebuah benda yang jatuh di dalam suatu fluida tidak akan mempunyai percepatan yang tetap. Berdasarkan hukum kedua Newton, dapat kita tulis persamaan sebagai berikut:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv - Dv^2$$

Generalisasi yang benar secara relativistik dari hukum kedua Newton adalah

$$F = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

Persamaan Gaya gravitasi partikel di permukaan Bumi dirumuskan sebagai berikut:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

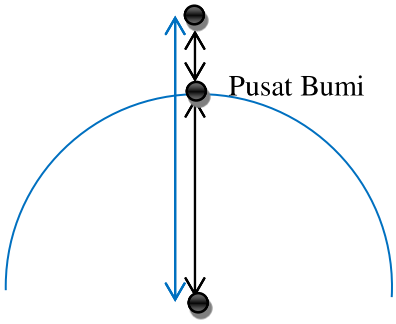
dengan $R = \text{jari} - \text{jari bumi}$,M = massa bumi, m = massa benda, dan G = konstanta umum gravitasi = $6{,}672\ X\ 10^{-8}\ \text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2}$

Pada suatu partikel dalam ruang di mana suatu massa uji m mengalami gaya gravitasi F, maka percepatan gravitasi g adalah (Kibble, 2004)

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Nilai percepatan gravitasi di titik B pada ketinggian h di atas permukaan Bumi adalah

$$g_B = G\frac{M}{(R+h)^2}$$



Gambar 1. Percepatan gravitasi pada ketinggian tertentu di atas permukaan Bumi

3. Komputasi dan Pembahasan

3.1 Penentuan persamaan gerak (1 dimensi)

Gerak jatuh tidak harus bebas, tapi boleh mempunyai kecepatan awal. Jika persamaan gaya adalah

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mv}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}\right] = m\frac{dv}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

dengan F = gaya; v = kecepatan benda; c = kecepatan cahaya di udara = $3\ x\ 10^8$ m/s; Untuk variasi g terhadap ketinggian, di mana persamaan g adalah:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R+z)^2}$$

dengan g = percepatan gravitasi, z = ketinggian, Dalam persamaan ditambahkan suku gesekan, misalnya:

$$k_1 v - k_3 v^3$$

Kita gunakan v berpangkat ganjil supaya selalu berlawanan dengan arah v. Jika gaya gesekan menggunakan$-k_1 v - k_3 v^2$ maka hanya berlaku untuk gerak satu arah, tidak berlaku untuk gerak yang dua arah naik-turun. Sehingga persamaan gerak menjadi:

$$\frac{dv}{dt} = \left[-\frac{GM}{(R+z)^2} - \frac{k_1}{m}v - \frac{k_3}{m}v^3\right]\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

dengan $v = \frac{dz}{dt}$, Ralat yang timbul dalam komputasi hanya ralat pemotongan (*truncation error*). Tujuan pemakaian bilangan rasional disini untuk menghilangkan ralat pembulatan.

3.2 Penentuan Nilai Ralat Deret Taylor

Kita harus menaksir nilai $f^{(n)}(c)$ di mana $0 \le c \le t_1$. Ini digunakan untuk menentukan nilai ralat deret Taylor:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}t^n$$

sehingga jika kita menghitung di $t = t_1$ maka ralatnya adalah $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,{t_1}^n$ untuk pendekatan sampai n suku.

Jika f mempunyai $n+1$ derivasi kontinyu pada interval 0 sampai x, maka (Hille, 1990).

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

di mana, $R_{n+1}(x)$ merupakan ralat pemotongan

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

dengan mengintegralkan suku kanan, maka dapat di lihat

$$|R_{n+1}(x)| \le \left(\max_{t\in I}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\right)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\max_{t\in I}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ merupakan nilai maksimum untuk semua n dengan I adalah interval antara 0 sampai x.

3.3 Penggunaan Program Reduce Hukum Newton Relativistik

Dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\frac{dv}{dt} = \left[-\frac{GM}{(R+z)^2} - \frac{k}{m}v - \frac{D}{m}v^3\right]\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Kita menggunakan v sampai pangkat 3 saja dari penderetan. Untuk variasi g dan koreksi relativistik dapat diubah ke dalam bentuk binomial Newton

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n\, a^{n-r} b^r$$

C merupakan bentuk kombinasi $C_r^n = \frac{n!}{r!n-r!}$

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

persamaan g menjadi:

$$\mathrm{g} = (\mathrm{R}+\mathrm{z})^{-2} = \frac{1}{\mathrm{R}^2} - \frac{2\mathrm{z}}{\mathrm{R}^3} + \frac{3\mathrm{z}^2}{\mathrm{R}^4} - \frac{4\mathrm{z}^3}{\mathrm{R}^5} + \cdots \qquad (3)$$

Sedang persamaan koreksi relativistik menjadi:

$$(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2})^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right)^3 + \cdots \qquad (4)$$

Sebagai catatan untuk penterjemahan ke dalam bahasa Reduce $v = \frac{dz}{dt}$ sedang $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ selanjutnya kita tulis sebagai $y(2)$ di Reduce yang artinya derivatif orde 2, yaitu $y(2) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Dengan nilai $R = 1$, maka variasi g dapat dituliskan menjadi:

$$g = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots$$

Persamaan untuk $y(2)$ akan diperoleh dari:

$$\frac{dv}{dt} = \left[-1 + 2z - 3z^2 + 4z^3 - \cdots + \left(-\frac{k}{m}v - \frac{D}{m}v^3\right)\right]\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^3 + \cdots\right)$$

Untuk penterjemahan ke dalam program Reduce (dengan $y = f(x)$) digunakan $v = df(f,x)$ dan z merupakan suatu fungsi posisi yang dapat kita sebut sebagai f sedangkan

$k = 1, m = 1, D = 1$ dan $c = 1$ dengan satuan yang dikonversikan, sehingga persamaan $y(2)$:

$$y(2) = [-1 + 2 * f - 3 * f\hat{}2 + 4 * f\hat{}3 - \cdots + (-df(f,x) - df(f,x)\hat{}3\,)\,](1 - 1.5 * df(f,x)\hat{}2 + 0.375 * df(f,x)\hat{}4 + 0.0625 * df(f,x)\hat{}6 + \cdots\,) \quad (5)$$

Persamaan $y(2)$ merupakan persamaan utama dalam rancangan program Reduce. Dalam notasi ilmiah tanda * sebagai perkalian dan ^ sebagai pemangkatan.

3.4 Ralat Pemotongan

Ralat pemotongan untuk variasi g, karena pangkat terakhir 3, maka $(1+z)^{-2}$ diderivatifkan terhadap z hingga derivatif ke-4, yaitu:

$$\frac{d^4}{dz^4}(1+z)^{-2} = 120(1+z)^{-6}$$

Ralat untuk $z = 0{,}1$ adalah maksimum dari $120(1+z)^{-6}$ di antara 0 sampai dengan z, misal dengan menaksir 3 titik seperti $z = 0, z = \frac{1}{2}z$ dan $z = z$. Ralatnya adalah

$$\frac{M(z)^4}{4!} = \frac{120(0{,}1)^4}{24} = 0{,}0005$$

Ralat pemotongan untuk variasi koreksi relativistik $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}$, karena pangkat terakhir 3, maka $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}$ diderivatifkan terhadap v^2 hingga derivatif ke-4, sehingga hasil derivatifnya adalah:

$$\frac{d^4}{dx^4}(1-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{16\sqrt{-x+1}(x^2-2x+1)}$$

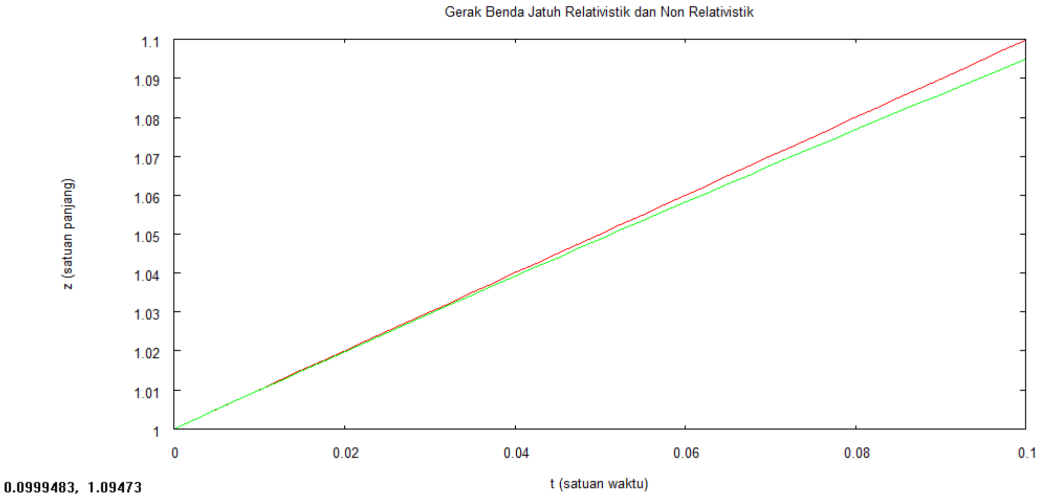
Ralat untuk $x = 0{,}1$ adalah maksimum dari $\frac{9}{16\sqrt{-x+1}(x^2-2x+1)}$ di antara 0 sampai dengan x, misal dengan menaksir 3 titik seperti $x = 0, x = \frac{1}{2}x$ dan $x = x$. Ralatnya adalah

$$\frac{M(x)^4}{4!} = \frac{9(0{,}1)^4}{311{,}4\sqrt{0{,}9}} = \frac{0.7320087176(0{,}1)^4}{24} = 0.00000305004$$

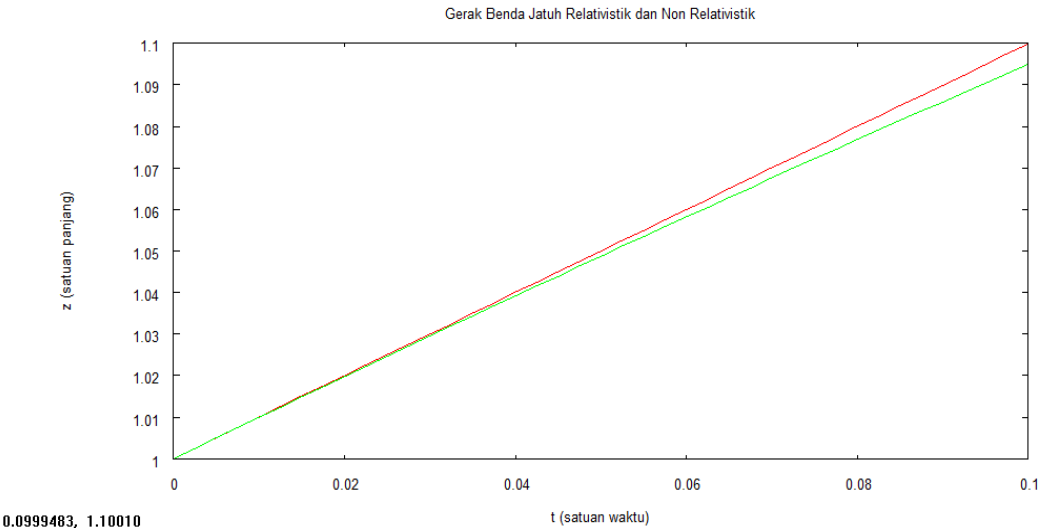
Ralat yang lain ϵ_1 diperoleh dari persamaan yang diperoleh dari reduce dengan memasukan nilai $z0 = 1, v0 = 1$, sehingga $z = \frac{768+768t-64t^3-39t^4}{768}$ dimana $\frac{39t^4}{768} = \frac{39(0a.1)^4}{768} = \frac{13}{2560000}$ merupakan salah satu ralat. Jadi total ralat adalah

$$\epsilon e^t + \epsilon_1 = \left[\left(\frac{120(0{,}1)^4}{24}\right) + \left(\frac{9(0{,}1)^4}{311{,}4\sqrt{0{,}9}}\right)\right]e^{0.9} + \frac{13}{2560000} = 0{,}0012423729$$

Pada $t = 0{,}1$ diperoleh $\bar{z} = 1{,}0999115884$, sehingga hasil $z = 1{,}09991 \pm 0{,}00214$. Perbedaan nilai koreksinya merupakan selisih antara z relativistik dengan z non relativistik atau $\Delta z = z(t) - z^*$. Karena pada ralat pemotongan menggunakan $t = 0{,}1$ maka $\Delta z = 0.00537$ seperti yang terlihat pada Gambar 2 dan Gambar 3.



Gambar 2. Perbandingan grafik gerak benda jatuh relativistik dengan non relativistik, koordinat (t, $\boldsymbol{z}*$)



Gambar 3. Perbandingan grafik gerak benda jatuh relativistik dengan non relativistik, koordinat (t, $\boldsymbol{z(t)}$)

4. Kesimpulan

Dalam penelitian ini telah berhasil dilakukan komputasi dua kondisi antara gerak benda jatuh non relativistik dengan gerak benda yang dikoreksi relativistik serta variasi percepatan gravitasi dan gesekan menggunakan bahasa Reduce. Dalam komputasi ada ralat pemotongan sehingga hasil komputasi jarak yang ditempuh benda $z = 1{,}0999 \pm 0{,}001$ (satuan panjang). Perbedaan nilai antara gerak benda jatuh non relativistik dengan gerak benda yang dikoreksi relativistik serta variasi percepatan gravitasi dan gesekan adalah sebesar $0{,}005$ (satuan panjang).

Daftar Pustaka

Grozin, A.G., 2005, *Using Reduce in High Energy physics,* Cambridge University Press. New York

Hearn, A.C., 2004, *Reduce User's Manual Version 3.8.,* Santa Monica, CA, USA.

Hermanto, A., 2012a, Komputasi Solusi Transien Rangkaian Listrik dengan GGL Gayut Waktu dengan Sistem Aljabar Komputer REDUCE, *Jurnal*, Pertemuan Ilmiah XXVI HFI Jateng & DIY, Solo.

Hermanto, A., 2012b, Perhitungan Ralat Komputasi Gerak Benda Relativistik dalam Medium Penghambat dengan Metode Deret Taylor dan Bahasa UBASIC, *Jurnal*, Pertemuan Ilmiah XXVI HFI Jateng & DIY, Purworejo.

Hille, E., 1990, *Calculus: One and Several Variables 6th ed.*, John Wiley & Sons Inc., Canada

Kibble, T.W.B. and Berkshire, F.H., 2004, *Classical Mechanics 5th ed.,* Imperial College Press, London