OPTIMASI MODEL INVESTASI, PRODUKSI DAN KONSUMSI DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI LOGARITMA SEBAGAI FUNGSI UTILITAS

(Optimization of Model of Investment , Production and Consumption Using Logarithm Function as The Utility Function)

Sugiyarto Surono[1] dan Ismail Bin Mohd[2]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Science
Ahmad Dahlan University, Yogyakarta, Indonesia
sugiyartonf@yahoo

[2]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
University College of Science and Technology Malaysia
Mengabang Telipot 21030 KualaTerengganu, Malaysia
ismailmohd@yahoo.com

ABSTRAK

Penanaman modal, produksi dan konsumsi adalah tiga hal yang berkaitan. Total kekayaan dan pemasukan dari suatu proses produksi berubah setiap saat dan digambarkan senantiasa mengikuti model gerakan random Brownian. Makalah ini membicarakan bagaimana kita dapat memilih model investasi dengan menentukan jumlah konsumsi yang optimal. Adapun fungsi utilitas yang digunakan adalah fungsi logaritma sehingga dengan mengasumsikan kontrol konsumsi dan tingkat suku bunga bank adalah konstan maka penyelesaian ekplisit dapat diperoleh.

Kata kunci: Fungsi utilitas, optimal kontrol, persamaan diferensial stokastik, model gerakan Brown.

ABSTRACT

Investment, production and consumption are the three factors interconnected. The worth of capital and income production is change by time through random Brownian motion. In this paper, it will be discussed how to choose the investme nt model or sum consumptions policies to maximize the expected discounted of utility function. In this paper, the utility function to be used is the logarithmic function utility and by assuming that consumption control and interest rate are constant. Then by this manner the explicit solution can be obtained.

Keywords: Utility function, optimal control, stochastic differential equations, Brownian motion.

Makalah diterima 17 September 2005.

1. PENDAHULUAN

Salah satu Model stokastik dalam ekonomi adalah berkaitan dengan total produksi dan jumlah hutang dari suatu perusahaan. Nilai suatu kekayaan dilambangkan dengan K_t yang nilainya senantiasa berubah setiap waktu mengikuti jumlah investasi yang ada.

Pergerakan nilai kekayaan suatu perusahaan dan jumlah pemasukan dari suatu proses produksi dapat digambarkan mengikuti model gerakan Brown. Masalah dari penanam modal dalam hal ini, investor adalah senantiasa berkeinginan untuk memaksimumkan jumlah konsumsi atau pembelanjaan dari total nilai kekayaannya sehingga diperoleh keuntungan yang maksimum. Fungsi tujuan yang berkaitan dengan masalah diatas adalah memaksimum-kan nilai

$$J = E\int_0^{\infty} e^{-dt}U\left(C_t\right)dt \qquad (1.1)$$

beserta pembatas

$$d>0,\ c_t=0, \text{dan } X_t>0, \qquad (1.2)$$

dengan $U(C_t)$ adalah fungsi utilitas dengan (Fleming dan Pang , 2004),

$$C_t=c_tX_t \qquad (1.3)$$

Dalam menyelesaikan permasalahan ini diperlukan kajian mengenai teori probabilitas yang merupakan dasar dari penyelesaian dalam bidang stokastik, demikian juga pengertian dasar dalam matematika keuangan (Steel, 2000).

Makalah ini dibagi menjadi lima bagian yaitu dalam Bagian 1 memaparkan latar belakang penelitian dan literatur yang berkenaan dengan makalah ini. Bagian 2, menyediakan beberapa definisi dan teorma yang berhubungan dengan makalah ini. Bagian 3 dipaparkan tentang rumusan masalah dari makalah ini dan dalam Bagian 4 disajikan diskusi dan penyelesaian dari rumusan masalah tersebut. Bagian 5 disertakan kesimpulannya.

2. DEFINISI DAN TEOREMA

2,1 Definisi 2.1 (Steel, 2000)

Koleksi variabel random $\{X(t),\ t\ =0\}$ dikatakan mengikuti proses model gerakan Brown jika,

(i) X(0) = 0,

(ii) $\{X(t),t=0\}$ senantiasa tetap dan naik secara Independent,

(iii) Untuk setiap $t>0$, $X(t)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi s^2t.

Berdasarkan definisi diatas jika $s = 1$, maka proses tersebut dinamakan model gerakan Brown standar dan dinotasikan sebagai $\{B(t),t=0\}$ dan ini dapat ditunjukkan,

$$E\left(\frac{X(t)}{s}\right)=\frac{1}{s}E(X(t))=0, \qquad (2.1)$$

dan
$$Var\left(\frac{X(t)}{s}\right)=\frac{1}{s^2}Var(X(t))=\frac{s^2t}{s^2}=t, \qquad (2.2)$$

Dapat disimpulkan bahwa secara umum proses model gerakan Brown yang diberikan dalam Definisi 2.1, dapat dibawa kebentuk proses standar dengan memisalkan $X(t)/s$ sebagai variabel random.

2.2 Definisi 2.2 (Kao dan Edward, 1996)

Dimisalkan $B(t)$ memenuhi sifat proses model gerakan Brown standar, dan $X = \{X(t),\ t=0\}$ adalah proses stokastik maka persamaan yang didefinisikan

$$dX(t)=m(X(t),t)dt+s(X(t),t)dB(t)$$

disebut persamaan diferensial stokastik.

2.3 Teorema 2.1 Ito's Lemma

(Oksendal, 1995)

Jika $F(X_t,t)$ fungsi yang dapat didiferensialkan dua kali terhadap t dan X_t adalah proses random dengan persamaan diferensial Ito

$$dX_t = b(X_t)dt + s(X_t)dB(t),$$

maka

$$dF = F_X \, dX_t + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} s_t^{\,2} dt \, .$$

3. RUMUSAN MASALAH

Misalkan N_t dan P_t melambangkan jumlah unit produksi dan satuan unit harga pada waktu *t*. Maka total dari pendapatan K_t adalah

$$K_t = N_t P_t \qquad (3.1)$$

Jika I_t adalah investasi rata-rata, maka dapat diperoleh,

$$I_t \, dt = P_t dN_t$$

yang menggambarkan bahwa perubahan jumlah investasi sama dengan harga persatuan unit produksi dikalikan dengan perubahan jumlah produksi. Dengan mendiferen-sialkan persamaan (3.1) terhadap t maka diperoleh,

$$dK_t = N_t dP_t + P_t dN_t = N_t P_t \frac{dP_t}{P_t} + P_t dN_t$$

$$= K_t \frac{dP_t}{P_t} + P_t dN_t = K_t \frac{dP_t}{P_t} + I_t dt \, . \qquad (3.2)$$

Dimisalkan bahwa Y_t menunjukkan rata-rata pemasukan dari suatu proses produksi maka dapat dituliskan persamaan sebagai berikut,

$$Y_t dt = b_t N_t dt \qquad (3.3)$$

dengan b_t adalah koefisien produktifitas.

Jika L_t dan C_t masing-masing melambangkan jumlah hutang dan konsumsi rata-rata pada waktu *t*, maka persamaan perubahan jumlah hutang dapat dituliskan sebagai berikut,

$$dL_t = \left[r_t L_t + I_t + C_t - Y_t \right] dt, \qquad (3.4)$$

dengan r_t adalah tingkat suku bunga rata-rata. Diandaikan bahwa tingkat suku bunga bank adalah konstan.

Dengan menggunakan hubungan antara K_t dan L_t maka total kekayaan pada waktu *t* yang dinotasikan dengan X_t adalah,

$$X_t = K_t - L_t \, . \qquad (3.5)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) hingga (3.4) serta dengan mendiferensialkan persamaan (3.5) terhadap *t* maka diperoleh persamaan,

$$dX_t = K_t \frac{dP_t}{P_t} + I_t dt - r_t L_t dt - I_t dt - C_t dt + b_t N_t dt \qquad (3.6)$$

$$= X_t \left[\frac{K_t}{X_t} \frac{dP_t}{P_t} - r_t \left(\frac{K_t - X_t}{X_t} \right) dt - \frac{C_t}{X_t} dt + b_t \frac{K_t}{P_t} \frac{1}{X_t} \; dt \right] \qquad (3.7)$$

Dengan perantaran persamaan (1.3) dan $k_t = K_t / X_t$, dan tingkat suku bunga dianggap konstan ($r_t = r$) diperoleh,

$$dX_t = X_t \left[k_t \frac{dP_t}{P_t} - \left(r(k_t - 1) + c_t - b_t \frac{k_t}{P_t} \right) dt \right] \qquad (3.8)$$

Pergerakan nilai P_t dimodelkan mengikuti model gerakan Brown $\tilde{w}_t$, persamaan diferensial stokastiknya adalah,

$$dP_t = P_t \left[m(P_t) dt + \tilde{s} \; d\tilde{w}_t \right],$$

dengan $\tilde{s} > 0$, $\tilde{w}_t$ model gerakan Brown standar, dan $\mu(P_t)$ pada persamaan (3.9) mempunyai penyelesaian tunggal yang positif jika $P_o > 0$. Jika $\mu(P_t) = \mu$ (konstan) maka P_t disebut model gerakan Brown logaritma.

Pergerakan produktifitas b_t dimodelkan mengikuti model gerakan Brown w_t yang senantiasa berubah terhadap perubahan waktu

$$b_t dt = b dt + s \, dw_t, \qquad (3.10)$$

dengan $b > 0$, $s > 0$, w_t model gerakan Brown standar. Model gerakan Brown $\tilde{w}_t$ dan w_t dimisalkan berkorelasi dan nilainya

$$E(\tilde{w}_t \cdot w_t) = r \, t \, , \; |r| \le 1 \, . \qquad (3.11)$$

dengan $E(\tilde{w}) \, . \, E(w) = 0$.

Bentuk formal dari persamaan (3.8) sekarang diberikan dalam bentuk,

$$dX_t = X_t\left[\left(m\,(P_t) + \frac{b}{P_t} - r\right)k_t dt + (r - c_t)dt + \tilde{s}\;k_t d\tilde{w}_t + \frac{s\;k_t}{P_t}dw_t\right] \qquad (3.12)$$

Dengan memilih kontrol investasi k_t, kontrol konsumsi c_t dan variabel tetap X_t dan P_t, $d>0$ serta fungsi utilitasnya $U(c_t X_t)$ akan ditentukan berapa nilai variabel kontrol agar diperoleh hasil yang maksimum, hal ini dapat ditulis sebagai berikut

$$J = E\int_0^{\infty} e^{-dt}U(c_t X_t)dt \qquad (3.13)$$

Dengan fungsi pembatasnya $c_t, k_t = 0$ dan $X_t > 0$.

4. DISKUSI DAN PENYELESAIAN MASALAH

Dalam makalah ini digunakan fungsi logaritma sebagai fungsi utilitasnya yaitu,

$$U(C) = \log C\,, \qquad (4.1)$$

dengan $c_t = C_t/X_t$ bernilai konstan c. Berdasarkan asumsi ini kebijakan untuk penanaman modal secara optimal dapat diperoleh

$$J = E\int_0^{\infty} e^{-dt}U(c_t X_t)dt, \quad d > 0$$

$$= E\int_0^{\infty} e^{-dt}\log(c_t X_t)dt$$

$$= E\int_0^{\infty} e^{-dt}(\log c + \log X_t)dt$$

$$= \frac{1}{d}\log c + \int_0^{\infty} e^{-dt}E[\log X_t]dt\,.$$

Dengan mengaplikasikan aturan dalam Teorema 2.1 untuk $D\log X_t$ maka diperoleh,

$$E[\log X_t] = \log X_0 + (r-c)T + \ldots.$$

$$E\left[\int_0^T\left(m(P_t) + \frac{b}{P_t} - r\right)dt - \int_0^T\left(\frac{1}{2}\tilde{s}^2k_t^2 + \frac{s^2k_t^2}{P_t^2} + \frac{\tilde{s}\;s\;k_t^2}{P_t}\,r\right)dt\right]$$

$$E[\log X_t] = \log x_0 + \int_0^T E[Q(k_t, P_t)dt + (r-c)T \qquad (4.3)$$

dengan $x_0 = X_0$ jumlah kekayaan awal,

$$Q(k_t, P_t) = -\frac{a_1(P_t)}{2}k_t^{\,2} + a_2(P_t)\,k_t\,, \qquad (4.4)$$

$$a_1(P_t) = \frac{1}{P_t^{\,2}}(\tilde{s}^2P_t^2 + 2r\,\tilde{s}\;P_t + s^2)\,, \qquad (4.5)$$

$$a_2(P_t) = m(P_t) + \frac{b}{P_t} - r. \qquad (4.6)$$

Jika $P_o>0$, maka diperoleh $P_t>0$. Oleh karena itu untuk setiap P_t, $Q(k_t,P_t)$ adalah maksimum dengan pembatas $k_t = 0$, dengan k_t didefinisikan sebagai berikut

$$k_t = \begin{cases} \frac{a_2(P_t)}{a_1(P_t)} & (a_2(P_t) \geq 0) \\ 0 & (a_2(P_t) < 0) \end{cases} \qquad (4.7)$$

sehingga persamaan (4.3), $E[\log X_t]$ mencapai nilai maksimum jika diberikan k untuk $0=t=T$ dan nilainya seperti disajikan pada persamaan (4.7).Berdasarkan uraian di atas maka diperoleh preposisi sebagai berikut; **Preposisi:** Untuk sebarang $T>0$ dan kontrol konsumsi diketahui konstan ($C_t = c$ untuk $0=t=T$) maka kontrol investasi k_t untuk $0=t=T$ menjadikan $E[\log X_t]$ akan mencapai maksimum.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari bagian empat dapat disimpulkan bahwa untuk sebarang $T>0$, penyelesaian eksplisit dari penyelesaian fungsi tujuan $J = E\int_0^{\infty} e^{-dt}\log(c_t X_t)dt$ dapat (4.2) diperoleh dan fungsi akan mencapai maksimum yang hanya tergantung pada nilai kontrol investasi yaitu k_t dengan asumsi bahwa $c_t=c$ adalah konstan dan $0=t=T$.

DAFTAR PUSTAKA

Oksendal, B., 1995, *Stochastic Differential Equations*, Springer.

Fleming, W, H., and Pang ,T.,2004, *Stochastic Control Model of Investment, Production, and Consumption.*

Kao, P. C., and Edward,1996, *An Introduction to Stochastic Processes*, Duxbury Press.

Steel, M.J, 2000, *Stochastic Calculus and Finance.*