BILANGAN RAMSEY SISI DARI $\hat{r}(P_3, P_n)$

(Ramsey Number from the Side $\hat{r}(P_3, P_n)$)

Chairul Imron[1] dan Edy Tri Baskoro[2]

[1]Jurusan Matemática, FMIPA ITS Surabaya
imron-its@matematika.its.ac.id

[2]Departemen Matematika, FMIPA ITB Bandung
ebaskoro@dns.math.itb.ac.id

ABSTRAK

Pada paper ini akan ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey sisi dari $\hat{r}(P_3, P_n)$ untuk *n* = 13, 14, 15 adalah 20, 23, 24. Ditunjukkan pula bahwa $\hat{r}(P_3, P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_1)$ dengan *n* = *k+l-1* untuk *n* ganjil dan *k, l* genap.

Kata kunci: Bilangan Ramsey sisi, Graph lintasan

ABSTRACT

In this paper it will be shown that Ramsey numbers from the side $\hat{r}(P_3, P_n)$ from *n* = 13, 14, 15 are 20, 23, 24. It is also shown that $\hat{r}(P_3, P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_1)$ with *n* = *k+l-1* for *n* odd and *k, l* even integer

Keywords: Side Ramsey number, Lane graph

Makalah diterima tanggal 2 April 2006

1. PENDAHULUAN

Diberikan dua graph *F* dan *H*, notasi *G ? (F, H)* menyatakan bahwa setiap pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada semua sisi graph *G* akan mengakibatkan *G* memuat subgraph *F* berwarna merah atau memuat subgraph *H* berwarna biru. Bilangan Ramsey klasik $r(F, H)$ adalah banyaknya simpul minimum dari suatu graph *G* yang bersifat *G ? (F, H)*, sedangkan bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(F, H)$ adalah banyaknya sisi minimum dari suatu graph *G* yang bersifat *G ? (F, H)*.

Pada paper ini akan dikaji bilangan Ramsey sisi untuk kombinasi graph lintasan P_3 dengan graph lintasan P_n dengan *n* = 13, 14, 15, sedangkan untuk *n* = 3, 4,..., 12 sudah dikaji (Erdõs *dkk*, 1978). Pada paper ini, akan dikaji pula hubungan antara *n* = genap dengan *n* ganjil untuk *n* = 15.

2. NOTASI DAN DEFINISI

Graph *G* yang biasanya ditulis dengan *G(V,E)* terdiri dari himpunan tak kosong simpul yang biasanya disimbolkan dengan *E(G)*. Setiap *u*, *v*Î *V (G)* tersebut dengan simpul dari graph *G* dan *e* = *(u,v)* merupakan pasangan terurut dari simpul yang disebut dengan sisi dari graph *G* . Untuk memudahkan, sisi *e* = *(u,v)* sering ditulis dengan *uv*. Oreder dari *G* dinotasikan dengan ¦ V (G)¦ yaitu banyaknya simpul dalam graph *G*, sedangkan bayaknya sisi dinotasikan dengan $|E(G)|$. Derajat dari suatu simpul v di G adalah banyaknya simpul yang bertetangga dengan v.

Dua simpul dikatakan bebas jika dua simpul tersebut tidak bertetangga, sedangkan suatu himpunan $S \subseteq V(G)$ dikatakan himpunan bebas jika setiap dua simpul di S adalah bebas dalam G. Dengan cara yang sama, dua sisi di G dikatakan saling bebas jika dua sisi tersebut mempunyai empat simpul yang berbeda. Himpunan $T \subseteq E(G)$ dikatakan himpunan sisi bebas jika setiap dua sisi yang berbeda di T adalah bebas dalam G.

Definisi 2.1 *Bilangan Ramsey $r(k,l)$ didefinisikan sebagai bilangan minimum N sedemikian hingga pewarnaan X dari himpunan sisi K_N dinotasikan dengan $E(K_N)$ dimana K_N memuat K_k merah atau K_l biru sebagai subgraph. Pewarnaan X merupakan fungsi dari $\{(i,j) | i \neq j$ dan $i,j \in \{1,2,...,N\}\}$ ke $\{merah, biru\}$*

3. BILANGAN RAMSEY SISI

Bilangan ramsey sisi dari $\hat{r}(P_3, P_n)$ adalah banyaknya sisi pada suatu graph G sedemikian hingga ditemukan lintasan P_3 berwarna merah atau luntasan P_n berwarna biru yang merupakan subgraph dari G.

Telah dihitung oleh Nuraeni (2005), untuk n = 3, 4, 5, ...,12, seperti tertera pada Tabel 1.

Tabel 1 : Bilangan Ramsey Sisi

P_n	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$\hat{r}(P_3, P_n)$	3	5	6	8	10	12	13	16	16	19

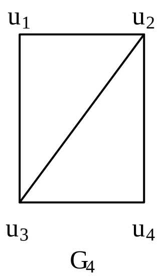
Teorema-teorema berikut merupakan sebagian penjelasan dari Tabel 1.

Teorema 3.1. (Erdõs *dkk*, 1978)

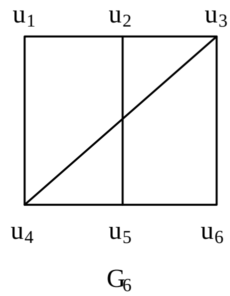
$$\hat{r}(P_3, P_4) = 5, \hat{r}(P_3, P_6) = 8, \hat{r}(P_3, P_8) = 12$$

Bukti: Perhatikan Gambar 1, ambil X sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_4. Andaikan G_4 tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan X tersebut akan memuat P_4 biru. Untuk menunjukkan adanya P_4 biru, lihat Gambar 1 yaitu kontruksi graph G_4 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_4)| = 4$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_4)| = 5$. Oleh karena itu, hanya ada dua sisi yang dapat berwarna merah yang tidak membentuk lintasan P_3. Hal tersebut mengakibatkan G_4 memuat P_4 biru.

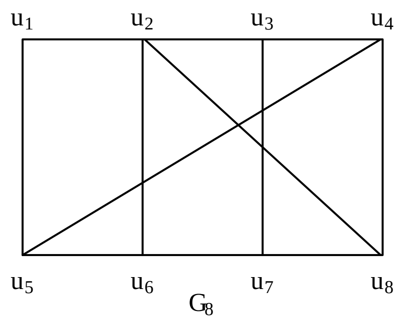
Ambil satu sisi sebarang di G_4, sehingga $|E(G_4)| = 4$, kemudian warnai biru. Karena $|E(G_4)| = 4$, maka tidak ditemukan P_4 biru yang diharapkan. Jadi $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$ dan perhatikan bahwa graph G_4 dapat diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau simpul u_2.



Gambar 1: n = 4



Gambar 2 : n = 6



Gambar 3 : n = 8

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$. Perhatikan Gambar 2, yaitu kontruksi graph G_6 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_6)| = 6$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_6)| = 8$, dimana :

$V(G_6) = \{u_i | i = 1,2,...,6\}$
$E(G_6) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, dengan
$E_1 = \{u_i u_i + 1 | i = 1,2\}$
$E_2 = \{u_i u_i + 1 | i = 4,5\}$
$E_3 = \{u_i u_i + 3 | i = 1,2,3\}$
$E_4 = \{u_3 u_4\}$

Dengan memperhatikan graph G_6, jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_6 biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tiga sisi yang saling bebas yang terletak di :S

1. tiga merah di E_3
2. satu merah di E_1, satu merah di E_2 dan satu merah di E_3
3. satu merah di E_1, satu merah di E_2 dan satu merah di E_3
4. satu merah di E_1, satu merah di E_2, satu merah di E_3 dan satu merah di E_4

Dengan memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan sisi berwarna biru yang diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau u_6.

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_8) = 12$. Perhatikan Gambar 3, yaitu kontruksi graph G_8 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_8)| = 8$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_8)| = 12$, dimana :

$V(G_8) = \{u, | i = 1,2,...,8\}$
$E(G_8) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$, dengan
$E_1 = \{u_i u_i + 1 | i = 1,2,3\}$
$E_2 = \{u_i u_i + 1 | i = 5,6,7\}$
$E_3 = \{u_i u_i + 4 | i = 1,2,3,4\}$
$E_4 = \{u_2 u_8\}$
$E_5 = \{u_4 u_5\}$

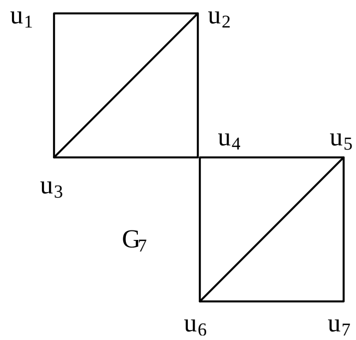
Dengan memperhatikan graph G_8, jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_8 biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum empat sisi yang saling bebas yang terletak di :

1. empat merah di E_3
2. dua merah di E_3, satu merah di E_1 dan satu merah di E_2
3. dua merah di E_1, dan dua merah di E_2
4. satu merah di E_1, satu merah di E_2, satu merah di E_3 dan satu merah di E_4

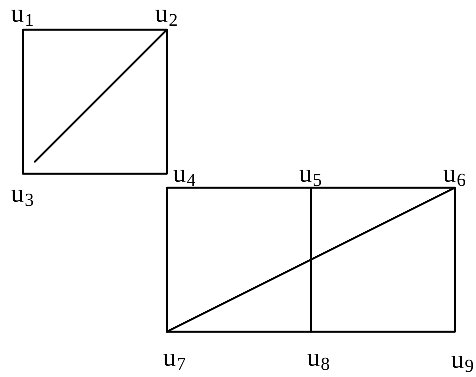
Dengan memperhatikan letak merah di empat sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan sisi berwarna biru yang diawali atau diakhiri pada simpul u_i.

Berikut teorema yang lainnya, merupakan penjelasan dari tabel di atas.

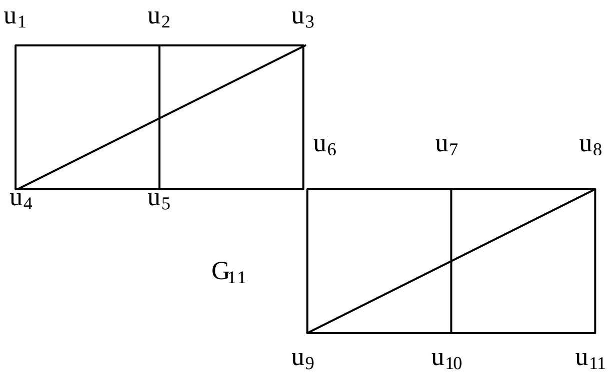
Teorema 3.2 (Erdõs *dkk*, 1978)
$\hat{r}(P_3, P_7) = 10, \hat{r}(P_3, P_9) = 13, \hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$



Gambar 4: $n = 7$



Gambar 5: $n = 9$



Gambar 6: $n = 11$

Bukti: Perhatikan Gambar 4, ambil x sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_7. Andaikan G_7 tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_7 biru. Untuk menunjukkan adanya P_7 biru, lihat Gambar 4 yaitu kontruksi graph G_7 dengan jumlah simpul sebanyak , $|V(G_7)|$ = 7 dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_7)|$ = 10.

Perhatikan kembali kontruksi graph G_7, sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari dua graph G_4 dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_1 dari graph bagian bawah. Telah dijelaskan diatas bahwa G_4 dapat diawali atau diakhiripada simpul u_1. Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat ditemukan P_7 biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_7) = 10$

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_9) = 13$. Perhatikan Gambar 5, yaitu kontruksi graph G_9 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_9)|$ = 9 dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_9)|$ = 13, dengan cara yang sama, perhatikan kembali kontruksi graph G_9, sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari graph G_4 (bagian atas graph G_9) dan graph G_6 (bagian bawah graph G_9) dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_4 pada G_4 dan simpul u_1 pada G_6. telah dijelaskan di atas bahwa G_4 dapat diakhiri pada simpul u_2 dan G_6 dapat diawali pada simpul u_1. Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat ditemukan P_9 biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_9) = 13$

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$. Perhatikan Gambar 6, yaitu kontruksi graph G_{11} dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{11})|$ =11 dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_{11})|$ =16, dengan cara yang sama pula, perhatikan kembali kontruksi graph G_{11}, sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari dua graph G_6 dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_6 dan simpul u_1. Telah dijelaskan di atas bahwa G_6 dapat diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau u_6. Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat ditemukan P_{11} biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$

Dari pembuktian Teorema 3.2, dapat diduga bahwa bilangan ramsay yang lebih besar lagi, perhatikan dugaan di bawah ini.

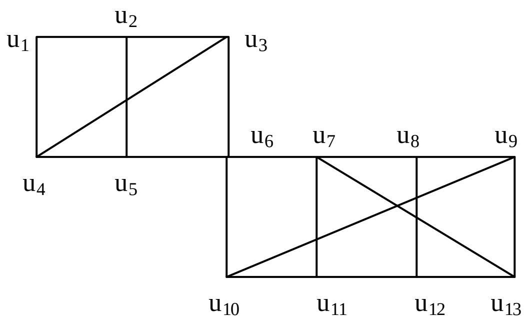
Dugaan 3.3 $\hat{r}(P_3 P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_l)$ dimana $n = k + i - 1$ untuk $n = 7$ ganjil, k dan l genap.

Bukti. Telah dihitung oleh Nuraeni, bahwa $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$, dengan mengambil $l = k = 4$ maka
$\hat{r}(P_3, P_7) = \hat{r}(P_3, P_4) + \hat{r}(P_3, P_4) = 5 + 5 = 10$
sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Begitu juga untuk n =9, untuk $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$ dan $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$, dengan mengambil k = 4 dan l = 6 maka
$\hat{r}(P_3, P_9) = \hat{r}(P_3, P_4) + \hat{r}(P_3, P_6) = 5 + 8 = 13$
sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Sedangkan untuk n = 11, $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$, dengan mengambil $k = l = 6$ maka
$\hat{r}(P_3, P_{11}) = \hat{r}(P_3, P_6) + \hat{r}(P_3, P_6) = 8 + 8 = 16$
sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Teorema 3.4 $\hat{r}(P_3, P_{13}) = 20$



Gambar 7: n = 13

Bukti. Perhatikan Gambar 7, ambil x sebarang pewarna 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{13}. Andaikan G_{13} tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_{13} biru. Untuk menunjukkan adanya P_{13} biru, lihat Gambar 7 yaitu kontruksi graph G_{13} degan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{13})|$ =13 dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_{13})|$ =20. dimana:

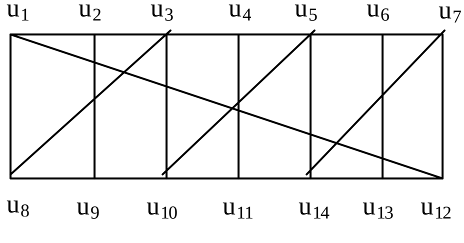
$V(G_{13}) = \{u_i | i = 1,2,...,13\} = \{u_i | i = 1,2,...,6\} \cup \{u_i | i = 6,7,...,13\}$ atau
$V(G_{13}) = V(G_6) \cup V(G_8)$ sedangkan $V(G_6) \cap V(G_8) = \{u_6\}$ yang merupakan simpul penghubung antara graph G_6 dan graph G_8.
$E(G_{13}) = E(G_6) \cup E(G_8)$

Katakan bahwa blok-atas adalah subgraph G_{13} bagian atas yang sama dengan graph G_6 dan blok-bawah adalah subgraph G_{13} bagian bawah yang sama dengan graph G_8. Dengan memperhatikan graph G_{13}, jumlah sisi yang mungkin diberi warna agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{13} biru, maka sisi-sisi yang mugkin dapat diberi warna merah adalah maksimum enam sisi yang saling bebas yang terletak di :

1. tiga merah di blok-atas dan tiga merah di blok-bawah
2. dua merah di blok-atas dan empat merah di bliok-bawah

Kejadian 1. Perhatikan kembali uraian dari G_6 yang merupakan blok-atas, telah dibuktikan di atas bahwa G_6 dapat ditemukan lintasan biru yang berakhir pada simpul u_6 atau simpul terakhir. Sedangkan tiga merah terletak pada blok-bawah yang berbentuk G_8 dan telah terbukti dapat dicari lintasan biru yang diawali dari simpul terakhir dari blok diawali dari simpul awal, jadi dapat ditemukan lintasan P_{13} biru. Begitu juga untuk kejadian 2. Sehingga memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{13} biru.

Teorema 3.5 $\hat{r}(P_3, P_{14}) = 23$



Gambar 8: $n = 14$

Bukti. Perhatikan Gambar 8, ambil *x* sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{14}. Andaikan G_{14} tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan *x* tersebut akan memuat P_{14} biru. Untuk menunjukkan adanya P_{14} biru, lihat Gambar 8 yaitu kontruksi graph G_{14} dengan jumlah simpul sebanyak

$|V(G_{14})| = 14$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_{14})| = 23$. dimana :

$V(G_{14}) = \{u_i | i = 1,2,...,14\}$
$E(G_6) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$, dengan

$E_1 = \{u_iu_{i+1} | i = 1,2,...,6\}$
$E_2 = \{u_iu_{i+1} | i = 8,9,...,13\}$
$E_3 = \{u_iu_{i+7} | i = 1,2,...,7\}$
$E_4 = \{u_iu_{i+5} | i = 3,5,7\}$
$E_5 = \{u_1u_{14}\}$

Dengan memperhatikan graph G_{14}, jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{14} biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tujuh sisi yang saling bebas dengan komposisi peletakan lihat Tabel 2

Tabel 2: Letak Merah

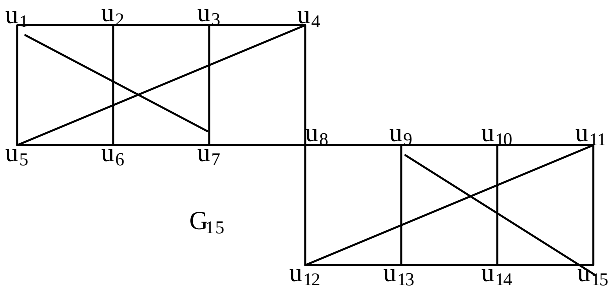
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
-	-	7	-	-
-	-	3	3	1
1	1	5	-	-
1	1	4	1	-
1	1	2	2	1
2	2	3	-	-
2	2	2	1	-
2	2	1	2	-
3	3	-	1	-

Dengan memperhatikan letak merah di tujuh sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{14} biru.

Teorema 3.6 $\hat{r}(P_3, P_{15}) = 24$

Bukti. Perhatikan Gambar 9, ambil *x* sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{15}. Andaikan G_{15} tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_{15} biru. Unruk menunjukkan adanya P_{15} biru, lihat Gambar 9 yaitu kontruksi graph G_{15} dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{15})| = 24$. dimana :

$V(G_{15}) = \{u_i | i = 1,2,...,15\} = \{u_i | i = 1,2,...,8\} \cup \{u_i | i = 8,9,...,15\}$ atau
$V(G_{15}) = V(G_8) \cup V(G_8)$ sedangkan $V(G_8) \cup V(G_8) = \{u_8\}$ yang merupakan simpul penghubung antara graph G_8 atas dan graph G_8 bawah.
$E(G_{13}) = E(G_8) \cup E(G_8)$



Gambar 9: $n = 15$

Katakan bahwa blok-atas adalah subgraph G_{15} bagian atas yang sama dengan graph G_8 dan blok-bawah adalah subgraph G_{15} bagian bawah yang sama dengan graph G_8. Dengan memperhatikan graph G_{15}, jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{15} biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tujuh sisi yang saling bebas yang terletak di:

1. empat merah di blok-atas dan tiga merah di blok-bawah
2. tiga merah di blok-atas dan empat merah di blok-bawah

Kejadian 1. Perhatikan kembali uraian dari g_8 yang merupakan blok-atas (G_8 yang terbalik), telah dibuktikan diatas bahwa G_8 dapat ditemukan lintasan biru yang berakhir pada simpul u_1 atau simpul awal. Sedangkan empat merah terletak pada blok-bawah yang berbentuk G_8 dan telah terbukti dapat dicari lintasan biru yang diawali dari simpul awal yaitu u_1. Jadi blok-atas diakhiri pada simpul terakhir dan blok-bawah diawali dari simpul awal, jadi dapat ditemukan lintasan P_{15} biru. Begitu juga untuk kejadian 2. Sehingga memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{15} biru.

4. KESIMPULAN

Paper ini memberikan kontribusi pada penentuan bilangan Ramsey sisi. Khusus bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(P_3, P_n)$ untuk $n = 13$, 14, 15, untuk n yang lebih besar belum ditemukan dan sebagai batasan bahwa $\hat{r}(P_3, P_n) \leq 2n-1$ untuk $n = 3$ yang telah ditemukan oleh Nuraeni.

DAFTAR PUSTAKA

P. Erdõs, R.J. Faudree, C.C. Rousseau, R.H. Schlep, 1978, *The Size Ramsey Number*, Periodica Mathematica Hungaria, Vol. 9 (1-2), 145-161.

R.J. Faudree, J. Seehan, 1983, *Size Ramsey Number for Small-Order Graphs*, Journal of Graph Theory, Vol. 7, 35-55.

Y. Nuraeni, 2005, *Bilangan Ramsey Sisi Untuk Graf Lintasan*, Tesis S2, Departemen Matematika FMIPA ITB.