

**TELAAH TEORITIS BAK-ATOM QUANTUM DOT  
SEMIKONDUKTOR DALAM MEDAN MAGNET LUAR**  
(Theoretical Study of Atomic-like Semiconductor Quantum Dot in the Presence of  
an External Magnetic Field)

Wahyu Tri Cahyanto<sup>2</sup>, Kamsul Abraha<sup>1</sup>, dan Pekik Nurwantoro<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Jurusan Fisika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia 55281

<sup>2</sup> Jurusan Fisika, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, Indonesia, 53123

**ABSTRAK**

Diberikan perhitungan analitik pada fenomena bak atom dalam *quantum dot* semikonduktor yang terkungkung oleh potensial harmonik dua dimensi dalam pengaruh medan magnet luar. Perhitungan ini mengabaikan efek pemecahan Zeeman dan interaksi orbit spin. Paper ini dimaksudkan sebagai pengalaman awal bagi penelitian lanjutan di bidang nanoteknologi di Indonesia. Beberapa fenomena yang diamati pada atom dan inti juga teramati pada *quantum dot* semikonduktor, yang kemudian dikenal sebagai atom buatan. Tampak bahwa kulit atom buatan dapat digambarkan sebagai sejumlah aras-aras energi yang dipenuhi oleh 2, 6, 12,... elektron yang dikenal sebagai “bilangan magis”. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa spektrum Fock-Darwin akan memasuki aras-aras Landau jika frekuensi Siklotron ( $w_c$ ) sangat lebih besar daripada frekuensi yang terkait dengan potensial pengungkung ( $w_0$ ).

**Kata kunci:** *Quantum dot* semikonduktor, pengungkungan elektron, struktur kulit, atom buatan

**ABSTRACT**

Analytical calculation on the atomic-like phenomena is presented in a semiconductor quantum dot trapped by two-dimensional harmonic potential in the presence of a homogeneous magnetic field. The calculation neglects both Zeeman splitting and spin orbit interaction. This paper is proposed as the first sight of advanced research on nanotechnology in Indonesia. Many of the phenomena observed in atoms and nuclei are also observed in the semiconductor quantum dot which is then called an artificial atom. It has been shown that atomic shells can be described by a set of degenerated energy levels filled by 2, 6, 12, ... electrons known as “magic numbers”. The results of the calculations show that the Fock-Darwin spectrum will enter Landau regime when its cyclotron frequency ( $w_c$ ) is much larger than the frequency associated with the potential confinement ( $w_0$ ).

**Keywords:** Semiconductor quantum dot, Electron confinement, Shell structure, Artificialatom

Makalah diterima 23 Agustus 2006

**1. PENDAHULUAN**

Ide Thouless (Thouless, 1977) untuk mereduksi dimensi konduktor sampai

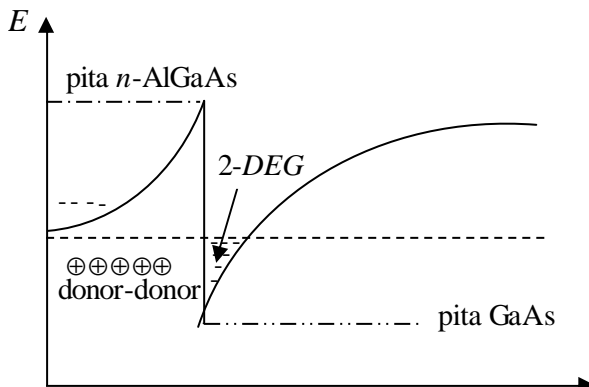
mendekati ukuran beberapa atom saja memicu lahirnya teknologi berbasis skala nanometer. Komponen elektronik yang berukuran lebih kecil akan bekerja dengan arus dan tegangan yang lebih kecil pula,

sehingga akan lebih efisien dan hanya membutuhkan konsumsi daya yang rendah. Saat ini, perkembangan industri mikroelektronika telah berhasil membuat isolasi sistem terkontrol yang hanya terdiri dari beberapa partikel. Dalam hal ini piranti elektronik memasuki alam mesoskopik yang mengikuti hukum-hukum fisika kuantum. Pengurungan partikel dalam dua dimensi telah dikenal sebagai sumur kuantum (*quantum well*), pembatasan partikel sampai satu dimensi disebut dawai kuantum (*quantum wire*), dan pengungkungan elektron ke segala arah dalam ruang sampai nol dimensi disebut titik kuantum (*quantum dot*).

Fabrikasi *quantum dot* biasanya dilakukan dengan membatasi gas elektron dua dimensi (2DEG) dalam semikonduktor *heterostructure* secara *lateral* dengan gerbang elektrostatik sangat kecil atau secara vertikal dengan teknik mengetsas (Alhassid, 2000). Galium Arsenida (GaAs) dan Aluminium Galium Arsenida (AlGaAs) merupakan semikonduktor dengan konstanta kekisi hampir sama ( $\approx 5.65 \text{ \AA}$  untuk GaAs), sehingga dapat digabung bersama membentuk struktur heterogen (*heterostructure*). Pada temperatur kamar GaAs memiliki bandgap 1.424 eV, sedangkan bandgap AlGaAs bergantung pada faktor campuran- $x$  yang diberikan menurut Palmer (2003)

$$E_g(x) = 1.424 + 1.429x - 0.14x^2 [eV] \quad 0 < x < 0.44 \quad (1)$$

yaitu bervariasi antara 1.424-2.026 eV, yang memberikan diskontinuitas pada permukaannya.

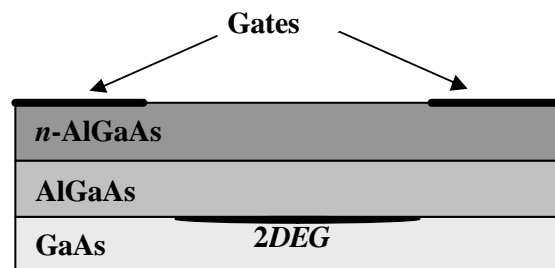


Gambar 1. Sistem gas elektron 2-Dimensi yang dibentuk oleh pengungkungan elektron di antara dua bahan semikonduktor

Dengan memberi doping- $n$  pada  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  dengan donor Si membuat elektron konduksi bergerak ke lapisan GaAs, karena memiliki pita yang lebih rendah. Elektron-elektron ini akan tertarik oleh donor positif pada AlGaAs, tapi tidak dapat kembali menyeberang ke *heterojunction* karena diskontinuitas pita konduksi (Gambar 1). Pada temperatur rendah semua elektron berada pada aras terendah, berkaitan dengan pergerakan elektron pada bidang yang sejajar dengan *heterojunction* membentuk sistem 2DEG.

Kerapatan gas elektron dua dimensi dapat dikontrol dengan menempatkan gerbang logam (metallic gates) di atas struktur heterogen tersebut dan membentuk kapasitor antara gerbang dan 2DEG (Gambar 2). Pada tegangan gerbang negatif, 2DEG terjepit secara elektrostatik. Akibatnya elektron-elektron konduksi terkungkung dalam bidang  $x$ - $y$ . Dengan mengubah litografi tegangan gerbang pemisah, 2DEG dapat tereduksi menjadi *quantum wire* dan *quantum dot*.

Penulisan paper ini memiliki tata urut sebagai berikut. Bagian 2 menjelaskan model *quantum dot* semikonduktor yang digunakan selama analisis, berkaitan dengan asumsi-asumsi yang dipakai dalam proses perhitungan. Bagian 3 memberikan gambaran tentang transport elektron dalam *quantum dot* terkait dengan blokade Coulomb.



Gambar 2. 2DEG yang terbentuk pada struktur heterogen GaAs-AlGaAs. Jika diberikan potensial negatif pada gerbang (*gates*), maka elektron akan terkungkung pada lapisan tipis di bawah AlGaAs membentuk *quantum dot*

Perhitungan analitik swa-nilai dan swa-fungsi dari quantum dot elektron

tunggal lengkap dengan penjelasan aras-aras Fock-Darwin serta struktur kulit atom buatan dibahas lengkap dalam Bagian 4. Selanjutnya, pengaruh medan magnet pada quantum dot semikonduktor dan penjelasan mengenai spektrum Fock-Darwin dalam medan magnet luar dijelaskan pada Bagian 5. Akhirnya, kesimpulan dan saran untuk riset lanjutan yang akan dilakukan ditulis dalam Bagian 6.

## 2. MODEL QUANTUM DOT SEMIKONDUKTOR

Untuk mempelajari aras-aras elektron dalam *quantum dot*, perlu diberikan spesifikasi sistem yang akan ditinjau. Analisis dalam paper ini mengikuti asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Elektron-elektron konduksi dalam 2DEG terdegenerasi dan hanya menempati sub-pita pertama. Elektron-elektron valensi diasumsikan terisi penuh.
2. Gas elektron dipastikan dua dimensi dan terkungkung penuh dalam bidang sambungan heterogen pada substrat GaAs. Asumsi ini cukup beralasan karena untuk kerapatan 2DEG, energi Fermi pada GaAs berkaitan dengan panjang gelombang de Broglie. Akibatnya, perhitungan akan tereduksi menjadi masalah 2DEG murni yang sudah banyak dikenal
3. Rapat muatan donor konstan dan tidak bergantung pada tegangan gerbang. Hal ini menyatakan bahwa elektron donor terionisasi penuh.
4. Struktur *quantum dot* semikonduktor diasumsikan dalam kesetimbangan termal, sehingga potensial kimia konstan secara keseluruhan.
5. Pengungkungan elektron pada arah-z diasumsikan jauh lebih kuat daripada bidang-xy. Dinamika elektron yang beresilasi secara isotropik pada bidang-xy tersebut mengikuti simetri lingkaran.

Model yang paling cocok untuk menggambarkan sistem semacam ini adalah sistem osilator harmonis  $V = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2$ , dengan  $m^*$  adalah massa efektif elektron,  $\omega_0$

adalah frekuensi osilator harmonis, dan  $r$  menyatakan jarak dari pusat *quantum dot*.

Selanjutnya, energi-energi elektron cukup kecil dibandingkan dengan *band-gap* semikonduktor, sehingga efek-efek non-parabolisitas seperti massa efektif, pita konduksi dan lain-lain dapat diabaikan (Johnson, 1995). Hamiltonian sistem yang cocok untuk menggambarkan *quantum dot* semikonduktor elektron tunggal dalam potensial pengungkungan harmonik tanpa menyertakan medan magnet luar adalah

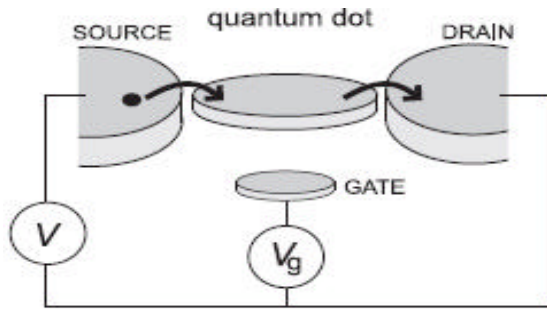
$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \quad (2)$$

Pada sistem koordinat polar, Hamiltonian pada Pers. (2) akan memasuki persamaan swa-nilai yang berbentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right) \Psi + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \Psi = E \Psi \quad (3)$$

## 3. TRANSPORT ELEKTRON PADA QUANTUM DOT

Transport elektron pada *quantum dot* diselidiki dengan menghubungkan *dot* dengan reservoir yang ada disekelilingnya. Mekanisme transport elektron dalam *quantum dot* diberikan pada Gambar 3. Perpindahan elektron dari *source* ke *dot* atau dari *dot* ke *drain* melewati penerobosan tanggul. Syarat yang diperlukan agar elektron dapat meloncat masuk atau keluar *dot* adalah energi sistem harus melebihi energi Coulomb, dengan menaikkan tegangan balik (*bias voltage*) antara *source* dan *drain*. Tegangan kritis yang diperlukan untuk transfer elektron menuju dan keluar *dot* dinamakan *Coulomb gap voltage* dan fenomena semacam ini disebut blokade Coulomb (*Coulomb blockade*). Penerobosan satu elektron tambahan pada *dot* memerlukan energi yang cukup besar karena tolakan Coulomb seluruh elektron di dalam *dot*.



Gambar 3 Skema mekanisme transport elektron *quantum dot* dalam geometri *lateral*

Interaksi Coulomb antar elektron dalam *dot* dan antara elektron-elektron dalam *dot* dengan lingkungannya dapat dicirikan oleh kapasitansi tunggal dan konstan  $C$ , dengan  $C = C_s + C_d + C_g$ . Spektrum energi diskret digambarkan oleh jumlah elektron dalam *dot* secara independen. Dua asumsi dasar inilah yang melahirkan model interaksi konstan (*CI-model*) (Joyez, dkk., 1998). Untuk *quantum dot* dengan geometri *lateral* seperti tampak pada Gambar 3, spektrum aras tenaga dapat digeser oleh tegangan gerbang dasar  $V_g$ . Energi Coulomb pada *dot* dapat dituliskan sebagai,

$$E = QV_g + Q^2 / 2C \quad (4)$$

dengan suku pertama menyatakan interaksi tarikan elektrostatis antara *dot* dengan gerbang positif, dan suku kedua adalah energi pengisian muatan (*charging energy* =  $E_c$ ) karena tolakan elektron-elektron dalam *dot*. Muatan dalam *dot* terkuantisasi dengan  $Q = -Ne$ , sehingga energi pada Pers. (4) diskret. Saat  $Q_m = -Ne$ , interaksi Coulomb menghasilkan perbedaan energi yang sama sebesar  $e^2 / 2C$  untuk penambahan atau pengurangan satu elektron dalam *dot*. Keadaan dengan jumlah elektron  $N$  dan  $N+1$  terdegenerasi hanya terjadi pada saat tegangan gerbang dinaikkan sehingga  $Q_m = -(N+1/2)e$ .

#### 4. QUANTUMDOT ELEKTRON TUNGGAL DALAM POTENSIAL PENGUNGKUNG HARMONIK

Sistem *quantum dot* semikonduktor dalam potensial pengungku harmonik seperti yang dimodelkan pada Bagian 3 dapat digambarkan dengan Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \quad (5)$$

Pada sistem koordinat polar, persamaan swa-nilai untuk sistem ini berbentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{j}^2} \right) \Psi + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \Psi = E \Psi \quad (6)$$

Selanjutnya, dengan metode pemisahan variabel  $\Psi(r, \mathbf{j}) = R(r)\Phi(\mathbf{j})$ , bagian angular persamaan Schrödinger dapat diselesaikan sebagai  $\Phi_m(\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\phi}$ , dengan  $e^{-im\phi}$

adalah swa-fungsi untuk  $L_z$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  adalah bilangan kuantum azimut yang memenuhi syarat batas  $\Phi(\mathbf{j} + 2\pi) = \Phi(\mathbf{j})$ ). Bagian radial persamaan Schrödinger selanjutnya dapat dinyatakan sebagai

$$\left[ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} R(r) \right] + [k^2 - I^2 r^2] R(r) = 0 \quad (7)$$

dengan  $k^2$  berkaitan dengan swa-nilai  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ , dan  $I = \frac{m^* \omega_0}{\hbar}$  adalah besaran karakteristik osilator.

Syarat fisis yang harus dipenuhi oleh fungsi gelombang radial  $R(r)$  adalah bahwa saat  $r \rightarrow 0$ ,  $R(r)$  haruslah tetap finit, dan  $R(r) \rightarrow 0$  saat  $r \rightarrow \infty$ . Selanjutnya, persamaan differensial (7) disekitar  $r \approx 0$  pada orde terendah dinyatakan sebagai,

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} R(r) = 0 \quad (8)$$

Karena  $R(r)$  harus finit di sekitar  $r \rightarrow 0$ , maka  $R(r)$  dapat dituliskan sebagai ekspansi Taylor untuk  $r \gg 0$  dan suku pertama ekspansi haruslah berbentuk  $R(r) \gg r^s$  dengan  $s$  adalah integer (konstanta tidak merupakan penyelesaian Pers. (8)). Dari syarat kompatibilitas  $s^2 - m^2 = 0$ , nilai  $s$  haruslah  $s = |m|$  untuk menjaga  $R(r)$  finit pada titik asalnya  $r \rightarrow 0$ . Dengan alasan sama untuk asimtot dari  $R(r) \rightarrow 0$  saat  $r \rightarrow \infty$ ,  $R(r)$  akan berbentuk  $R(r) \approx e^{-I r^2/2}$ . Selanjutnya, kombinasi dua hasil di atas menghasilkan bentuk fungsi gelombang bagian radial,

$$R(r) = r^{|m|} e^{-I r^2/2} F(r) \quad (9)$$

dengan  $F(r)$  haruslah bernilai konstan tidak nol saat  $r \rightarrow 0$  dan tidak dapat mengembang lebih cepat dari  $e^{-I r^2/2}$  saat  $r \rightarrow \infty$ . Substitusi Pers. (9) ke Pers. (7) memberikan

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left[ \frac{2|m|+1}{r} - 2I r \right] \frac{dF(r)}{dr} - [2I(|m|+1) - k^2] F(r) = 0 \quad (10)$$

Dengan memperkenalkan variabel baru tak berdimensi  $x = I r^2$ ,  $F(r)$  akan menjadi berbentuk persamaan Kummer menurut

$$x \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + [(|m|+1) - x] \frac{dF(x)}{dx} - \frac{1}{2} \left[ (|m|+1) - \frac{k^2}{2I} \right] F(x) = 0 \quad (11)$$

yang memiliki penyelesaian pada  $x = 0$  berupa deret hiper-geometrik *confluent* (Abramowitz dan Stegun, 1972)

$$F(x) = M(a, |m|+1; x) \quad (12)$$

dengan  $a = \frac{1}{2} (|m|+1) - \frac{k^2}{4I}$ . Pada nilai  $x$  besar, fungsi ini dapat mengembang menurut  $e^x$ . Deret hiper-geometrik *confluent* akan menjadi polinomial jika dan hanya jika

$a = -n$  dengan  $n = 0, 1, 2, \dots$  adalah bilangan kuantum radial. Setelah kondisi ini terpenuhi, fungsi gelombang baru dapat dilakukan normalisasi. Selanjutnya penyelesaian Pers. (6) adalah

$$Y_{nm}(r, \mathbf{j}) = C_{nm} r^{|m|} e^{-I r^2/2} M(-n, |m|+1; I r^2) e^{-inj} \quad (13)$$

dan

$$E_{nm} = \hbar \omega_0 (2n + |m| + 1) \quad (14)$$

dengan  $C_{nm}$  adalah faktor normalisasi dan  $E_{nm}$  adalah swa-nilai energi yang bergantung pada bilangan kuantum radial dan azimut terkopel  $(n, m)$ .

Fungsi gelombang  $Y_{nm}$  dikenal sebagai aras-aras Fock-Darwin, setelah Fock dan Darwin menghitung swa-nilai partikel dalam potensial harmonik dan swa-nilai partikel dalam medan magnet luar secara terpisah (Fock, 1928).

Faktor normalisasi  $C_{nm}$  pada Pers. (13) dapat ditentukan dari nilai khusus parameter deret hiper-geometrik *confluent*, yang pada kasus ini adalah bilangan kuantum radial  $n$  dan azimut  $m$  (Abramowitz dan Stegun, 1972). Untuk nilai khusus tertentu ini, deret hiper-geometrik *confluent* mereduksi menjadi polinom ortogonal (dalam hal ini Polinom Laguerre). Bentuk hubungan ini diberikan oleh,

$$L_n^{|m|}(x) = \frac{(n+|m|)!}{n!|m|!} M(-n, |m|+1; x) \quad (15)$$

dan polinom Laguerre  $L_n^{|m|}(x)$  dinyatakan sebagai

$$L_n^{|m|}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n+|m|)!}{(n-i)! (|m|+i)! i!} x^i \quad (16)$$

Kemudian, dari kaitan ortogonalitas

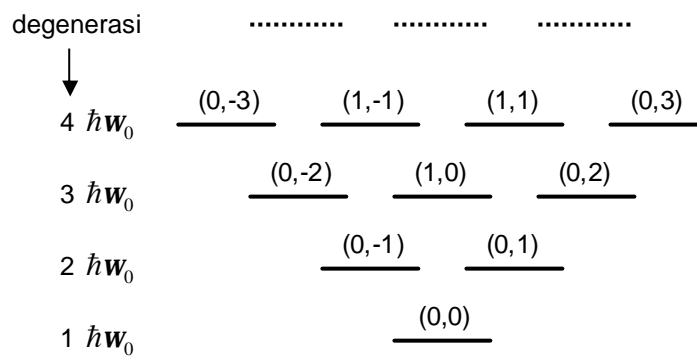
$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{|m|} L_n^{|m|}(x) L_{n'}^{|m|}(x) = \mathbf{d}_{n,n'} \frac{(n+|m|)!}{n!} \quad (17)$$

yang dikombinasikan dengan Pers. (13) akan menghasilkan faktor normalisasi  $C_{nm}$ . Uraian lengkap dapat dibaca pada Ref. (Abramowitz dan Stegun, 1972). Selanjutnya, bentuk fungsi gelombang pada Pers. (13) untuk aras- aras Fock-Darwin ternormalisasi menjadi

$$y_{nm}(r, \mathbf{j}) = I^{(|m|+1)^2} \sqrt{\frac{n!}{p(n+|m|)!}} r^{|m|} e^{-Ir^2/2} L_n^{|m|}(Ir^2) e^{-imj} \quad (18)$$

sehingga kulit ketiga akan terisi penuh oleh 12 elektron. Pengisian secara penuh kulit atom buatan ini membentuk “bilangan magis” untuk  $N = 2, 6, 12, 20$  yang ternyata sama dengan hasil eksperimen Tarucha dan kawan-kawannya. (Tarucha, dkk., 1996).

Kuadrat jarak rerata  $\langle r^2 \rangle_{nm}$  orbital dapat dengan mudah ditentukan dengan mudah tanpa harus menganalisis fungsi gelombang karena Hamiltonian berbentuk kuadrat dalam koordinat operatornya. Untuk kasus menguntungkan seperti ini, dapat



**Gambar 4** Spektrum energi *quantum dot* partikel tunggal dalam potensial pengukung harmonik. Degenerasi aras-aras energi membentuk struktur kulit atom buatan

Gambar 4 menunjukkan struktur kulit atom buatan yang diperoleh dari spektrum energi partikel tunggal dihubungkan dengan derajat degenerasi. Masing-masing kulit berkaitan dengan energi  $\hbar\omega_0(N+1)$  dengan  $N = 2n + |m|$  tetap, dan  $(n, m)$  adalah bilangan kuantum radial dan azimut. Masing-masing kulit merosot sebanyak  $N + 1$  tanpa memperhitungkan spin.

Karena elektron dapat memiliki spin-up maupun spin-down, maka masing-masing level dapat terisi oleh dua elektron. Keadaan  $n = 0, m = 0$  terisi penuh oleh dua elektron dengan spin berlawanan. Keadaan berikutnya terisi penuh oleh 4 elektron, yaitu dua elektron pada  $(0, 1)$  dan dua lainnya pada  $(0, -1)$ , sehingga kulit kedua terisi penuh oleh 6 elektron. Kulit ketiga dapat dipenuhi oleh 6 elektron yang masing-masing pasangan menempati keadaan  $(0, 2), (0, -2)$  dan  $(1, 0)$ ,

diterapkan teorema virial pada keadaan terikat menurut Slater, 1963,

$$\left\langle -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{m^*}{2} \omega_0^2 r^2 \right\rangle \quad (19)$$

yang beranalogi dengan mekanika klasik. Sehingga untuk keadaan  $(n, m)$  diperoleh

$$\langle m^* \omega_0^2 r^2 \rangle = \langle e_{nm} \rangle_{nm} = \hbar\omega_0 (2n + |m| + 1) \quad (20)$$

yang secara eksplisit menyatakan bahwa

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{I} (2n + |m| + 1) \quad (21)$$

Tampak bahwa rapat kebolehjadian  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  berbanding dengan  $\sqrt{N+1}$ , dan ini sama untuk masing-masing orbital kulit tertentu, bahkan untuk nilai  $m$  yang berbeda.

## 5. SPEKTRUM FOCK - DARWIN DALAM MEDAN MAGNET LUAR

Pengaruh medan magnet pada *quantum dot* semikonduktor merupakan hal yang menarik untuk dikaji. Bagian ini memberikan analisis pengaruh medan magnet luar yang diberikan tegak lurus pada *dot*. Efek Zeeman dan interaksi spin orbit sebagai akibat diberikannya medan magnet luar ini diabaikan karena pengaruhnya cukup kecil dibandingkan dengan efeknya terhadap pengubahan orbital (pada GaAs, efek Zeeman  $g m_b \vec{B} \approx 0.025 \text{ meV T}^{-1}$ , sedangkan pengu-bahan orbital  $\hbar e B / m^* \approx 1.76 \text{ meV T}^{-1}$  (Kouwenhoven, dkk., 2001). Pada kasus ini Hamiltonian sistem berbentuk

$$H = \frac{1}{2m^*} \left[ \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \quad (22)$$

dengan  $\vec{B} = B \hat{z}$  dan vektor potensial  $\vec{A}(\vec{r})$  dipilih simetri Gauge, dengan

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}. \quad \text{Simetri Gauge berarti juga}$$

Coulomb Gauge  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ , dan  $\left[ \hat{A}(\vec{r}), \hat{p} \right] = 0$ . Kemudian suku dalam kurung dapat diuraikan menjadi

$$\frac{1}{2m^*} \left[ \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m^*} + \frac{e}{2m^* c} \vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{B}) + \frac{e^2 B^2}{8m^* c^2} r^2 \quad (23)$$

Dengan memanfaatkan aturan perkalian tiga  $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$  dan dengan mendefinisikan frekuensi siklotron  $\omega_c = |e| B / m^* c$ , Hamiltonian sistem menjadi

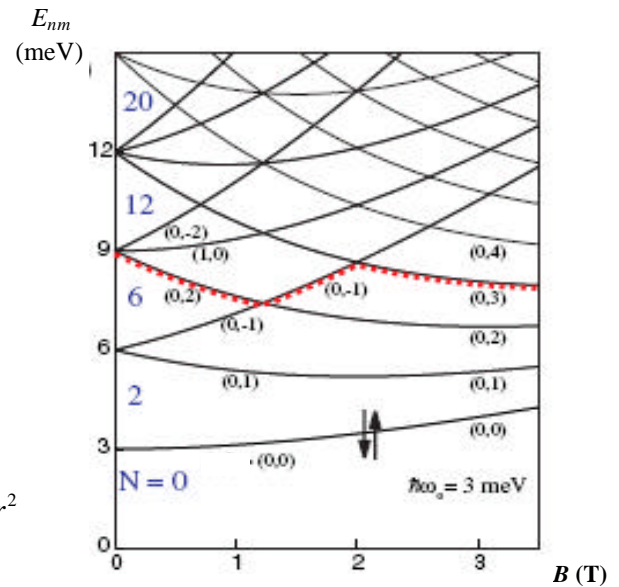
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right) + \frac{\omega_c}{2} L_z + \left( \frac{m^* \omega_c^2}{8} r^2 + \frac{m^* \omega_0^2}{2} r^2 \right) \quad (24)$$

Dengan mengambil  $\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$  dan mengingat swa-nilai  $L_z = -m\hbar$ , maka dengan proses perhitungan sama dengan Bagian IV didapatkan

$$E_{nm} = \hbar \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \omega_c^2} (2n + |m| + 1) - m\hbar \frac{\omega_c}{2} \quad (25)$$

Dari spektrum Fock-Darwin Pers. (25), tampak bahwa jika  $\omega_c > \omega_0$  elektron akan memasuki kawasan Landau,

dengan  $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$ . Pada keadaan ini elektron dalam *dot* berlaku seperti partikel bebas dalam pengaruh medan magnet. Plot  $E_{nm}$  pada Pers. (25) terhadap medan magnet  $B$  menghasilkan spektrum Fock-Darwin (Kouwenhoven, dkk., 2001). seperti tampak pada Gambar 5.



Gambar 5 Aras-aras partikel tunggal vs medan magnet  $B$  (Spektrum Fock-Darwin) untuk potensial parabolik dengan kekuatan  $\hbar\omega_0 = 3 \text{ meV}$ . Kurva putus-putus menunjukkan transisi yang terjadi saat medan magnet diperbesar

Gambar 5 menunjukkan plot  $E_{nm}$  vs  $B$  pada  $\hbar\omega_0 = 3$  meV. Saat medan magnet diperbesar, level-level energi dengan  $m$  maksimum akan cenderung menurun dan kemudian naik perlahan melampaui seluruh level-level kulit yang lebih rendah. Elektron-elektron yang menempati aras energi tertinggi dipaksa berpindah ke orbital yang berbeda. Kurva putus-putus menunjukkan transisi antar orbital yang terjadi pada *quantum dot*. Pada medan magnet rendah, aras tertinggi dipenuhi (0,2), kemudian pada medan magnet  $B = 1.3$  T berubah keadaan ke (0,1). Selanjutnya, transisi kedua terjadi pada  $B = 2$  T menuju aras (0,3). Pada limit  $B \rightarrow \infty$ , swa-nilai terendah yang dilabelkan oleh  $(0, m)$ , dengan  $m > 0$  cenderung membentuk asimptotik berkaitan dengan level Landau terendah. Asimptot kedua dengan slope yang lebih curam berkaitan dengan level Landau tereksitasi pertama, dan seterusnya. Osilasi ini akan berakhir setelah elektron memasuki kawasan Landau. (Supriyo Datta, 1995) memberikan penjelasan lebih detail pasal ini.

Spektrum Fock-Darwin dalam medan magnet luar menunjukkan bahwa degenerasi masing-masing level membentuk kulit. Kulit pertama dibentuk oleh aras pertama Fock-Darwin, yang terisi penuh oleh 2 elektron. Degenerasi aras kedua Fock-Darwin membentuk kulit kedua yang dapat terisi penuh oleh 6 elektron, dan seterusnya sama persis pada kasus tanpa medan magnet luar. Hal ini menyerupai kestabilan pada gas mulia pada atom riil yang digambarkan oleh gerakan elektron-elektron yang diikat oleh potensial Coulomb inti yang memiliki simetri bola tiga dimensi (Chakraborty dan Apalkov, 2003).

Potensial yang melingkupi atom tersebut mengakibatkan timbulnya struktur kulit  $1s, 2s, 2p, \dots$ . Kulit penuh dicerminkan dari maksimum energi ionisasi untuk bilangan atom 2, 10, 18, ... yang berkaitan dengan atom-atom gas mulia He, Ne, Ar, ... Pada *quantum dot*, kulit pada atom buatan digambarkan oleh set keadaan merosot dari aras-aras energi (Tarucha, dkk., 1998). Masing-masing set keadaan merosot

dipenuhi oleh 2, 6, 12, ... elektron. Deret bilangan 2, 6, 12, ... dikenal sebagai 'bilangan magis' elektron-elektron dalam potensial pengungkung harmonik 2-D bersimetri lingkaran (*circularly symmetric*).

Karakteristik fisis atom buatan berbeda dengan atom riil karena biasanya atom buatan memiliki ukuran yang jauh lebih besar daripada atom riil. Orbit elektron tidak dapat dipandang sederhana menurut ukurannya, karena ukuran *dot* bervariasi secara kontinu. Saat ukuran *dot* diperbesar, energi Coulomb yang timbul dari tolakan antar elektron menurun karena rerata jarak antar elektron bertambah. Perbedaan energi elektron yang berlainan orbit juga akan menurun lebih cepat daripada energi Coulomb seiring dengan penambahan ukuran *quantum dot*. Hal ini menunjukkan bahwa pada atom-atom besar, efek interaksi elektron-elektron menjadi lebih penting (Ashoori, 1996). Karena ukuran atom yang lebih besar dari atom riil, maka efek medan magnetik juga akan lebih mudah diamati dengan kuat medan yang jauh lebih kecil. Hal ini dikarenakan atom buatan akan lebih banyak menampung fluks kuantum magnetik dengan luasan atom yang dimilikinya.

## 6. KESIMPULAN

Telaah teoritis atom buatan *quantum dot* semikonduktor telah diberikan pada paper ini. Penyelesaian analitik menunjukkan bahwa pengisian kulit atom buatan, aras-aras Fock-Darwin dan spektrum Fock-Darwin dalam medan magnet luar memberikan hasil yang sesuai dengan hasil eksperimen. Telaah *quantum dot* semikonduktor dengan interaksi elektron yang lebih kompleks cukup menarik untuk dikaji pada penelitian selanjutnya dengan metode pendekatan *Density Functional Theory*. Sifat-sifat fisis *quantum dot* semikonduktor, meliputi termodinamika, statistika dan kemungkinan terjadinya transisi fase akan diamati pada penelitian-penelitian selanjutnya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abramowitz, M. and I. A. Stegun, 1972. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Alhassid, Y., 2000. The statistical theory of quantum dots, *Review of Modern Physics* **72** (4), 895.
- Ashoori, R.C., 1996. Electrons in artificial atoms, *Nature* **379**, 413.
- Chakraborty, T. dan Apalkov, V.M., 2003. Quantum cascade transition in nanostructures, *Advanced in Physics* **52** (5), 455.
- Fock, V., 1928. Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im magnetfeld, *Zeitschrift fur Physik* **47**, 446.
- Johnson, N.F., 1995. Quantum dots: few-body, low dimensional systems, *Journal of Physics: Condensed Matter* **7**, 965.
- Joyez, P., Esteve, D., and Doveret, M.H., 1998. How is the Coulomb Blockade Suppressed in High-Conductance Tunnel Junctions?, *Physical Review Letter* **80** (9), 1956.
- Kouwenhoven, L.P., Austing, D.G., and Tarucha, S., 2001. Few-electron quantum dot, *Report on Progress in Physics* **64**, 701.
- Palmer, D.W., 2003. The semiconductors-information, [www.semiconductors.co.uk](http://www.semiconductors.co.uk), diakses 17 April 2003.
- Slater, J.C., 1963. *Quantum Theory of Molecules and Solids*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, Append. 3.
- Supriyo Datta, 1995. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Chapter 1.
- Tarucha, S., Honda, T., Austing, D.G., Tokura, Y., Muraki, K., Oosterkamp, T.H., Janssen, J.W., dan Kouwenhoven, L.P., 1998. Electronic states in quantum dot atoms and molecules, *Physica E* **3**, 112.
- Tarucha, S., Austing, D.G., Honda, T., van der Hage, R.J., and Kouwenhoven, L.P., 1996. Shell Filling and Spin Effect in a Few Electron Quantum Dot, *Physical Review Letter* **77** (17), 3613.
- Thouless, 1977. Maximum Metallic Resistance in Thin Film, *Physical Review Letter* **39** (18), 1167.

