ANALISIS TENTANG GRAF PERFECT

Nurul Imamah AH
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum Jombang
nurul.imamah86@gmail.com

Abstrak

Seiring perkembangan kemajuan teknologi maka ilmu matematika juga semakin berkembang, salah satu analisis matematika khususnya metode graf yang perlu dikembangkan adalah analisis mengenai graf perfect. Graf perfect adalah suatu graf yang memiliki bilangan chromatik $\chi(G)$ *dan bilangan clique* $\omega(G)$ *yang sama. Bilangan khromatik adalah bilangan terkecil pada pewarnaan yang diberikan pada titik-titik yang dimiliki graf G sedemikian sehingga untuk setiap dua titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Sedangkan bilangan Clique adalah order maksimum dari subgraf komplit yang dapat dibentuk dari suatu graf G dengan order dari G adalah banyaknya titik yang dimiliki oleh graf G.*
Berdasarkan pembahasan pada artikel ini maka diperoleh bahwa graf kosong, graf komplit, graf bipartite komplit, graf sikel genap, dan graf lintasan adalah graf perfect karena masing-masing graf tersebut memiliki bilangan chromatik $\chi(G)$ *dan bilangan clique* $\omega(G)$ *yang sama.*

Kata kunci*: Graf, Graf Perfect, bilangan Clique, bilangan Chromatik*

Abstract

As technology advances the development of mathematics is also growing, one of mathematical analysis particularly method graph that needs to be developed is the analysis of the perfect graph. Perfect graph is a graph that has chromatik numbers $\chi(G)$ *and numbers of the same clique* $\omega(G)$. *Numbers khromatik is the smallest number in a given coloring dots owned graph G such that for every two points are connected directly to get different colors. While the number Clique is the maximum order of a complete subgraph which can be formed of a graph G with the order of G is the number of dots that are owned by the graph G.*
Based on the discussion in this article is obtained that the empty graph, complete graph, complete bipartite graph, graph sikel even, and the graph trajectory is a graph perfect for each graph has chromatik numbers $\chi(G)$ *and numbers of the same clique* $\omega(G)$.

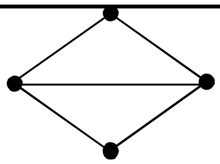
Keywords: *Graf, Graf Perfect, Clique numbers, numbers Chromatik*

1. Pendahuluan

1.1 Graf

Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan *(V(G),E(G)* dengan *V(G)* adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (vertex), dan *E(G)* adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut *(u,v)* dari titik *u* dan *v* yang berbeda di *V* yang disebut sisi (edge). Jadi dapat diketahui

e_4 v_1 e_1



Gambar 1.1 Titik dan Sisi pada Graf

bahwa komponen utama terbentuknya suatu graf *G* adalah titik. Sisi *e=(u,v)* di dalam graf G dapat ditulis dengan *e= uv*. Sebagai contoh graf G pada Gambar 2.1 adalah graf dengan *V(G)*={v_1, v_2, v_3, v_4} dan *E(G)*= {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5} dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_1$, dan $e_5 = v_4v_2$.

e_5 v_2
v_4
v_3
e_3 e_2

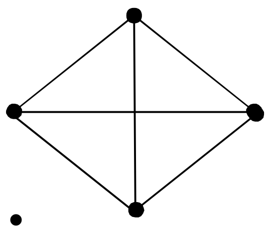
Jika *e=uv* adalah sisi dari graf *G*, maka *u* dan *v* dikatakan *adjacent* atau terhubung langsung, sedangkan sisi *e* dikatakan terkait langsung atau *incident* pada titik *u* dan *v*.

1.2 Graf Perfect

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan kromatik dan bilangan *clique* yang sama, $(\chi(H) = \omega(H)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:280). Bilangan *clique* dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai order dari subgraf komplit maksimum yang bisa dibentuk dari graf G. Bilangan khromatik suatu graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf G sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda.

Berikut ini contoh dari graf perfect:

$K_4 =$

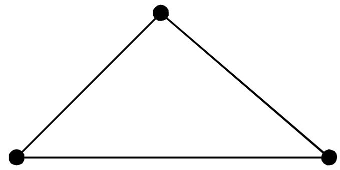


Subgraf komplit dari K_4 adalah:

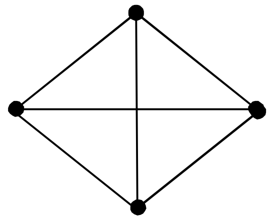
$K_1 = \bullet$

$K_2 =$

$K_3 =$



$K_4 =$



Subgraf komplit maksimum dari graf K_4 adalah K_4 sendiri. Karena subgraf komplit maksimumnya adalah K_4, maka order subgraf komplitnya adalah 4, sehingga $\omega(K_4) = 4$. Karena antara satu titik dengan titik yang lain saling terhubung langsung maka pewarnaan minimum yang diberikan adalah 4, sehingga $\chi(K_4) = 4$. Karena terbukti $\omega(K_4) = \chi(K_4) =$ 4, maka graf K_4 adalah graf perfect.

1.3 Pewarnaan

Pewarnaan Graf adalah suatu pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (titik dan sisi), sehingga elemen-elemen yang saling terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Ada tiga macam pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (region). Pembahasan pada artikel ini hanya terbatas pada pewarnaan titik saja.

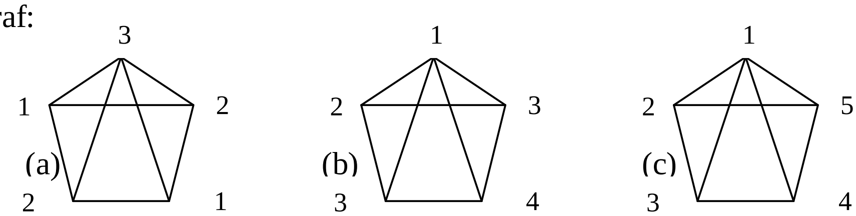
1.3.1 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titk-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik terhubung langsung mempunyai warna yang sama.

Bilangan Kromatik $\chi(G)$ (*Chromatik Number*) adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf *G* sedemikian sehingga setiap titik-titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$, maka titik-titik pada graf *G* dapat diwarnai dengan *k* warna, tetapi tidak diwarnai dengan *k-1* warna.

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$. karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan *n* warna.

Pewarnaan-*k* untuk graf *G* merupakan penunjukan k warna pada titik *G* sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda (Watkins dan Wilson, 1992:256). Jika *G* memiliki pewarnaan-*k*, maka *G* dapat diwarna-k. Bilangan khromatik *G* dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan terkecil *k* yang menunjukkan bahwa *G* dapat diwarna-*k*. Berikut ini adalah contoh pewarnaan titik pada graf:



Gambar 1.3.1 Pewarnaan Titik pada

Pewarnaan-k ini dapat ditunjukkan dengan menulis bilangan 1, 2, 3, …, k di dekat titik pada graf. Pada Gambar 2.15 (a), (b), dan (c) masing-masing mengilustrasikan pewarnaan-3, pewarnaan-4, dan pewarnaan-5. Dengan demikian, $\chi(G) \geq 3$ karena G memiliki pewarnaan-3 (gambar a) sehingga $\chi(G) = 3$.

Berikut ini adalah beberapa bilangan khromatik yang telah diketahui:

$$\chi(N_n) = 1$$

$$\chi(K_n) = 2$$

$$\chi(K_{m,n}) = 2$$

$$\chi(C_n) = 2,\ \chi(C_{n+1}) = 3$$

$\chi(P_n) = 2$. (Chartrand dan Linda Lesniak, 1979:272)

2. Pembahasan

Pembahasan mengenai analisis graf perfect ini akan diaplikasikan pada berbagai macam graf yaitu graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf lintasan, dan graf sikel.

Langkah- langkah menentukan graf perfect adalah:

1. Menentukan subgraf komplit maksimum yang dapat dibentuk dari graf G
2. Menentukan bilangan *clique* $\omega(G)$
3. Menentukan bilangan khromatik $\chi(G)$
4. Pola yang diperoleh dinyatakan dengan teorema
5. Membuktikan teorema

Pembahasan mengenai perfect dari suatu graf kemudian diaplikasikan pada graf kosong, untuk menunjukkan graf kosong sebagai graf perfect, maka harus ditentukan bilangan clique dan bilangan khromatik dari graf kosong dengan *n* titik (N_n). Berikut ini adalah graf N_n dengan bilangan clique dan bilangan khromatiknya:

Perhatikan graf N_1 berikut!

N_1: •

Subgraf komplit maksimum dari graf N_1 hanya K_1 = •. Karena hanya memuat 1 titik saja, Sehingga bilangan clique $\omega(N_1) = 1$, dan bilangan khromatik $\chi(N_1) = 1$ karena hanya satu titik yang diberi warna. Terbukti bahwa bilangan clique dan bilangan khromatik $\omega(N_1) = \chi(N_1) = 1$, maka N_1 adalah graf perfect. Selanjutnya analisa graf kosong N_2 N_3 N_4 ,....,N_n sebagaimana gambar berikut:

N_2 : • • N_3 : • • • N_4 : • • • •

N_n : • • • ,…, •

Subgraf komplit maksimum dari graf N_2 N_3 N_4 ,....,N_n hanya K_1 =•, sehingga bilangan clique $\omega(N_2)=1$. Karena antara titik satu dengan titik yang lainnya tidak terhubung langsung, maka pewarnaan minimumnya hanya 1

sehingga χ *(N_2 N_3 N_4 ,....,N_n)=1*. Terbukti Bilangan *clique* dan bilangan khromatik $\omega(N_2) = \chi(N_2) = 1$. Jadi N_2 N_3 N_4 ,....,N_n adalah graf perfect.
Berikut ini adalah tabel untuk graf kosong beserta bilangan *clique* dan bilangan khromatiknya:

Tabel 2.1 Graf N_n dengan $\omega(N_n)$ dan $\chi(N_n)$

Graf N_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(N_n)$	$\chi(N_n)$
N_1	K_1	1	1
N_2	K_1	1	1
N_3	K_1	1	1
N_4	K_1	1	1
N_n	K_1	1	1

Dari beberapa kasus yang telah diselesaikan serta berdasarkan Tabel 2.1, maka terlihat pola bahwa graf kosong memiliki $\omega(N_n) = \chi(N_n) = 1$. Dengan demikian dapat dihasilkan teorema berikut:

Teorema 2.1:
Graf kosong dengan *n* titik N_n adalah graf perfect
Bukti :
Graf N_n memiliki subgraf komplit maksmum K_1, karena subgraf komplit maksimumnya K_1, maka order maksimumnya adalah 1, sehingga $\omega(N_n)=1$.
Karena setiap titik tidak terhubung langsung dengan titik yang lain, maka banyaknya pewarnaan titik yang diberikan adalah 1, sehingga $\chi(N_n)=1$. Jadi karena $\omega(N_n)= \chi(N_n)=1$, maka terbukti bahwa graf kosong adalah graf perfect.

Berikut ini analisa dari graf komplit K_n dengan menentukan bilangan *clique* dan bilangan *chromatik*nya:
Berikut ini graf K_1

$$K_1 = \bullet$$

Subgraf komplit dari graf K_1 adalah:

$$K_1 = \bullet$$

Graf komplit K_1 sama dengan graf kosong N_1 yang memuat satu titik. Subgraf komplit maksimum dari graf K_1 adalah K_1 sendiri, sehingga $\omega(K_1)=1$. Karena graf K_1 hanya mempunyai satu titik , maka pewarnaan minimumnya juga hanya 1 sehingga $\chi(K_1)= 1$, Jadi karena $\omega(K_1)= \chi(K_1)=1$, maka graf K_1 merupakan graf perfect.
Selanjutnya untuk graf komplit K_2

$K_2 =$ 

Subgraf komplit dari graf K_2 adalah:

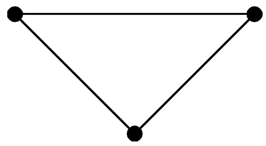
K_1 =

K_2 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf K_2 adalah:

K_2 = 

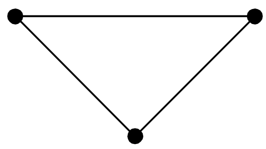
Subgraf komplit maksimum dari graf K_2 adalah K_2 sendiri, sehingga $\omega(K_2)$=2. Karena antara titik satu dengan titik yang lain terhubung langsung, sehingga pewarnaan pada setiap titik harus berbeda, maka banyaknya warna minimumnya adalah 2 sehingga $\chi(K_2)$=2. Karena $\omega(K_2)=\chi(K_2)$=2, maka graf K_2 adalah graf perfect. Berikut ini Graf K_3:

K_3 = 

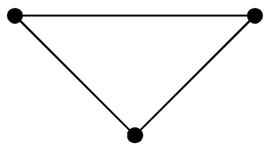
Subgraf komplit dari graf K_3 adalah:

K_1 =

K_2 = 

K_3 = 

Subgraf komplit maksimum dari graf K_3 adalah:

K_3 = 

Subgraf komplit maksimum K_3 adalah K_3 sendiri, sehingga $\omega(K_3)$=3. Karena antara titik yang satu dengan titik yang lain didalam graf tersebut terhubung langsung, mengakibatkan banyaknya warna minimum pada graf K_3 adalah 3 sehingga $\chi(K_3)$=3. Karena $\omega(K_3)=\chi(K_3)$=3, maka graf K_3 adalah graf perfect.

Analisa graf perfect dapat diaplikasikan pada graf komplit yang lain dengan *n* yang lebih besar, sehingga didapatkan Tabel 2.1 Graf komplit beserta bilangan *clique* dan bilangan khromatiknya:

Tabel 2.2 Graf K_n dengan $\omega(K_n)$ dan $\chi(K_n)$

Graf K_n	Subgraf Komplit Maksimum	$\omega(K_n)$	$\chi(K_n)$
K_1	K_1	1	1
K_2	K_2	2	2
K_3	K_3	3	3
K_4	K_4	4	4
K_n	K_n	n	N

Berdasarkan Tabel 2.2 tersebut maka pola yang dihasilkan dapat dibentuk dalam teorema, berikut ini Teorema 2.2 yang dihasilkan dari hasil analisa graf perfect pada graf komplit

Teorema 2.2:

Graf komplit dengan *n* titik K_n adalah graf perfect

Bukti:

Graf K_n memiliki subgraf komplit maksimum dirinya sendiri atau K_n, karena subgraf komplit maksimumnya adalah K_n itu sendiri, maka order maksimumnya adalah *n*, sehingga $\omega(K_n) = n$.

Karena setiap titik terhubung langsung dengan setiap titik yang lain, maka banyaknya warna minimum pada graf K_n juga sebanyak *n*, sehingga $\chi(K_n) = n$. Karena $\omega(K_n)=\chi(K_n)=n$, maka graf K_n adalah graf perfect.

Analisa mengenai graf perfect selanjutnya diaplikasikan pada graf bipartite komplit $K_{m,n}$, sehingga dari hasil analisa tersebut maka diperoleh table sebagaimana berikut:

Tabel 2.3 Graf $K_{m,n}$ dengan $\omega(K_{m,n})$ dan $\chi(K_{m,n})$

Graf $K_{m,n}$	Subgraf komplit maksimum	$\omega(K_{m,n})$	$\chi(K_{m,n})$
$K_{1,1}$	K_2	2	2
$K_{1,2}$	K_2	2	2
$K_{2,2}$	K_2	2	2
$K_{2,3}$	K_2	2	2

$K_{m,n}$	K_2	2	2

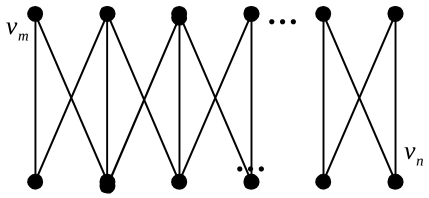
Langkah berikutnya adalah membuat pola yang sudah terbentuk menjadi sebuah teorema, berikut ini Teorema 2.3 Graf bipartisi komplit dengan titik *m,n* $K_{m,n}$ adalah graf perfect.

Teorema 2.3

Graf bipartisi komplit dengan titik *m,n* $K_{m,n}$ adalah graf perfect

Bukti:

Berikut ini adalah gambar graf $K_{m,n}$:



Graf bipartisi komplit memiliki 2 komponen titik v_m dan v_n. Karena titik pada v_m hanya terhubung langsung dengan v_n, maka subgraf komplit maksimumnya adalah K_2, sehingga order maksimumnya adalah 2. Oleh karena itu $\omega(K_{m,n})$=2. Karena setiap titik pada v_m hanya terhubung langsung dengan v_n, maka titik v_m memiliki 1 warna dan v_n juga memiliki 1 warna sehingga $\chi(K_{m,n})$ = 2. Jadi karena $\chi(K_{m,n}) = \omega(K_{m,n})$=2, maka graf $K_{m,n}$ adalah graf perfect.

Berikutnya adalah Proses analisa pada graf sikel C_n, $\forall\ n \geq 3$ dengan hasilnya diberikan pada tabel :

Tabel 3.4 Graf C_n, $\forall\ n \geq 3$ dengan $\omega(C_n)$ dan $\chi(C_n)$

Graf C_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega(C_n)$	$\chi(C_n)$
C_4	K_2	2	2
C_6	K_2	2	2
C_8	K_2	2	2
C_{10}	K_2	2	2
C_n	K_2	2	2

Dari tabel dihasilkan teorema 2.4

Teorema 2.4

Graf sikel dengan *n* titik C_n, $\forall\ n \geq 3$ adalah graf perfect

Bukti:

Graf sikel dengan n titik C_n, $\forall\ n \geq 3$ memiliki subgraf komplit maksimum K_2, karena hanya dapat dibuat subgraf komplit maksimum dengan 2 titik saja, sehingga $\omega\,(C_n)$=2.

Karena titik yang terhubung langsung pada graf C_n adalah 2 titik, maka banyaknya pewarnaan yang diberikan adalah 2, sehingga $\chi\,(C_n)=2$.

Karena $\omega\,(C_n)=\chi\,(C_n)$=2, maka terbukti bahwa graf sikel C_n, $\forall\ n \geq 3$ adalah graf perfect.

Analisa mengenai graf perfect selanjutnya diaplikasikan pada graf bipartite komplit $K_{m,n}$, sehingga dari hasil analisa tersebut maka diperoleh table sebagaimana berikut:

Tabel 3.5 Graf P_n dengan $\omega(P_n)$ dan $\chi(P_n)$

Graf P_n	Subgraf komplit maksimum	$\omega\,(P_n)$	$\chi\,(P_n)$
P_1	K_1	1	1
P_2	K_2	2	2
P_3	K_2	2	2
P_4	K_2	2	2
P_n	K_2	2	2

Pola yang sudah terbentuk menjadi sebuah teorema, berikut ini Teorema 2.5 Graf lintasan dengan n titik P_n adalah graf perfect.

Teorema 2.5

Graf lintasan dengan n titik P_n adalah graf perfect.

Bukti:

Graf P_1 memiliki subgraf komplit maksimum K_1, maka order dari subgraf komplit maksimum graf P_1 adalah 1, sehingga $\omega\,(P_1)$=1. Karena P_1 hanya memiliki 1 titik, maka banyak pewarnaan yang diberikan adalah 1, sehingga $\chi\,(P_1)=1$.

Graf lintasan dengan n titik P_n $\forall\ n \geq 2$ memiliki subgraf komplit maksimum K_2, sehingga $\omega\,(P_n)$=2. Karena graf P_n hanya memiliki 2 titik terhubung langsung, maka banyak pewarnaan minimum yang diberikan adalah 2, sehingga $\chi\,(P_n)$=2, $\forall\ n \geq 2$.

Karena nilai $\omega\,(P_1)=\chi\,(P_1)$= 1 dan $\omega\,(P_n)=\ \chi\,(P_n)$= 2 $\forall\ n \geq 2$, maka graf P_n adalah graf perfect.

3. Kesimpulan

Graf perfect adalah suatu graf yang memiliki bilangan *clique* dan bilangan khromatik yang sama untuk setiap graf *G*. Berdasarkan pembahasan dalam artikel ini diperoleh bahwa graf kosong, graf komplit, graf bipartisi komplit, graf sikel genap, dan graf lintasan adalah graf perfect, karena beberapa graf tersebut memiliki bilangan *clique* $\omega(G)$ dan bilangan *chromatik* $\chi(G)$ yang sama.

Daftar Pustaka

Chartrand G dan Lesniak. L. (1986). *Graphs* & *Digraphs*, *Second Edition*. Wadsworth & Brooks/Cole: California

Golumbic. (1980). *Alghoritmic Graph Theory and perfect Graphs.* USA: Academic Press

Murty dan Bondy. (1976). *Graph Theory with Applications.* Canada: The Macmillan Press LTD

Wilson, J dan Watkins, J. (1990), *Graph and Introductory Approach*. Open University Course, Singapore.