KOALJABAR GELANGGANG DERET PANGKAT FORMAL

(Coalgebras of Formal Power Series Rings)

Budi Surodjo[1], Setiadji, dan Sri Wahyuni[2]

Jurusan Matematika FMIPA UGM
e-mail: [1]surodjo_b@ugm.ac.id, [2]swahyuni@indosat.net.id

ABSTRAK

Gelanggang deret pangkat teritlak (GDPT) dikonstruksi melalui monoid terurut kuat S, yang komutatif dan gelanggang komutatif R yang memiliki identitas. Jika S kanselatif terhadap urutannya, maka $R[[S]]$ merupakan submodul R^S atas $R[S]$. Gelanggang deret pangkat formal (GDPF) sebagai kasus khusus GDPT dipelajari untuk mengungkap eksistensi koaljabar di dalam struktur GDPF.

Kata kunci: Koaljabar, Gelanggang deret pangkat teritlak, monoid, gelanggang deret pangkat formal

ABSTRACT

A generalized power series ring (GPSR) is constructed over a commutative strictly ordered monoid S and a commutative ring with an identity R. If S is cancellative over its order, we know that $R[[S]]$ is an $R[S]-$submodule or R^S. As a special case of a GPSR, a formal power series rings (FPSR) are studied to show the existence of coalgebras in the structures of a formal power series ring.

Keywords: Coalgebras, Generalized power series ring, Monoid, Formal power series ring

Makalah diterima 25 Oktober 2005

1. PENDAHULUAN

Pada makalah ini diasumsikan S monoid terurut tegas atas '$\leq$' dan R gelanggang komutatif dengan elemen identitas. Gelanggang deret pangkat teritlak (GDPT), $R[[S]]$ dikonstruksi oleh Ribenboim (1992) melalui operasi penjumlahan titik demi titik dan pergandaan

$$(f * g)(s) = \sum_{(t,u)\in\mathcal{X}_s(F,g)} f(t)g(u), \quad (1)$$

untuk setiap $f, g \in R[[S]]$ dan $s \in S$, dengan $\mathcal{X}_s(f,g) =$

$$\{(t,u) \in supp(f) \times supp(g) \mid t + u = s\}.$$

Jika S kanselatif atas urutannya, maka $R[[S]]$ merupakan subbimodul R^S terhadap operasi

$$\sum_i r_i\epsilon_{s_i} g(z) = \sum_i r_i g(zs_i) \quad (2)$$

$$(g \sum_i r_i\epsilon_{s_i})(z) = \sum_i r_i g(s_i z), \quad (3)$$

untuk setiap $g \in R^S$ dan $\sum_i r_i\epsilon_{s_i} \in R[S]$, dengan $\epsilon_{s_i}(s) = 1$, jika $s = s_i$ dan $\epsilon_{s_i}(s) = 0$, jika $s \neq s_i$. [Surodjo, *et al.*, 2003]

Selanjutnya, diberikan modul M atas R. Submodul U di M dikatakan **murni** terhadap modul N atas R jika pemetaan kanonik

$$\begin{aligned} i \otimes I_N \quad : \quad & U \otimes N \to M \otimes N, \\ & u \otimes n \mapsto u \otimes n \end{aligned}$$

injektif. Jika untuk setiap modul N atas R, pemetaan kanoinik $i \otimes I_N$ injektif, maka U dikatakan **murni** di M. Pada kondisi N *flat* atas R, submodul U murni di M atas N. Karena setiap modul proyektif merupakan modul $flat$, maka jika N proyektif, dapat disimpulkan U submodul murni M terhadap N.[Anderson, 1992]

Untuk selanjutnya notasi $U \trianglelefteq M$ digunakan untuk menyatakan U submodul M; sedangkan notasi $U \bowtie M$ menyatakan U subbimodul M.

1.1 Koaljabar di dalam GDPT

Berikut ini dibahas beberapa sifat yang berkaitan dengan eksistensi koaljabar di dalam struktur GDPT. Definisi dan notasi yang digunakan merujuk pada definisi dan notasi yang ada di dalam makalah Abuhlail *et al.* (2000), Anderson, (1992), dan Surodjo *et al.* (2003).

Makalah Surodjo *et al.* (2003) memuat fakta, bahwa untuk sebarang monoid terurut tegas S jika $(R[[S]])^{\mathrm{f}} =$

$$\{g \in R(S) \mid gR[S] \text{ MDH atas } R\},$$

dengan MDH adalah modul dibangun secara hingga, maka belum tentu $R[S]$ subhimpunan $(R[[S]])^{\mathrm{f}}$. Namun jika S terurut total, terfaktorisasi secara tunggal dan $G(S)$ hingga, dengan

$$G(S) = \{s \in S \mid (\exists t \in S).s + t = 0\},$$

maka $R[S] \subseteq (R[[S]])^{\mathrm{f}}$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan hasil-hasil yang diperoleh Abuhlail *et al.* (2000) dan Surodjo *et al.* (2003) dapat dibuktikan sifat-sifat berikut ini.

Teorema 1 *Diketahui R gelanggang Noether dan S monoid terurut total, komutatif, dan kanselatif atas urutannya. Jika S terfaktorisasi tunggal, $G(S)$ hingga dan $(R[S])^{\mathrm{f}}$ submodul murni R^S, maka*

$$(R[S], \Delta_{R[S]}, \epsilon_{R[S]})$$

merupakan koaljabar atas R, terhadap komultiplikasi

$$\Delta_{R[S]} : (R[S])^{\mathrm{f}} \to (R[S])^{\mathrm{f}} \times (R[S])^{\mathrm{f}}$$

dan kounit $\epsilon_{R[S]} : (R[S])^{\mathrm{f}} \to R$, dengan

$$\begin{aligned} \Delta_{R[S]} &= \pi^{-1} \circ m^{\bullet}, \\ & \qquad m^{\bullet} : R^S \to R^S \times R^S \\ \epsilon_{R[S]} &: (R[S])^{\mathrm{f}} \to R, \; h \mapsto h(0), \end{aligned}$$

dan $\pi : R^S \otimes R^S \to R^{S \times S}$ pemetaan kanonik. [Surodjo *et al.*, 2004]

Namun pada Teorema 1, dipenuhi $R[S] = (R[S])^{\mathrm{f}}$. Jika R semisederhana dan Artin, maka $(R[S])^{\mathrm{f}}$ submodul murni R^S, sehingga dengan mengganti asumsi pada Teorema 1 diperoleh sifat yang lebih khusus.

Akibat 2 *Diketahui S monoid terurut tegas, bebas torsi, komutatif, kanselatif atas '$\leq$', terfaktorisasi secara tunggal, $G(S)$ hingga dan narrow. Jika R gelanggang semisederhana dan Artin, maka $R[S]$ merupakan koaljabar atas R terhadap komultiplikasi $\Delta_{R[S]}$ dan kounit $\epsilon_{R[S]}$.*

Jika S monoid yang kanselatif terhadap urutannya, maka $R[[S]]$ subbimodul R^S atas $R[S]$.

Teorema 3 *Diketahui S monoid yang kanselatif terhadap urutannya. Jika R gelanggang Artin dan semisederhana, maka*

$$((R[[S]])^f, \Delta_{(R[[S]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[S]])^{\mathrm{f}}})$$

merupakan koaljabar atas R.

Setiap lapangan R pasti semisederhana dan Artin, sehingga sesuai Teorema 3 melalui monoid terurut kuat S yang kanselatif terhadap urutannya dapat dibuktikan $(R[[S]])^{\mathrm{f}}$ koaljabar atas R.

Selanjutnya, jika R gelanggang Artin dan semisederhana, maka $R[[S]]$ modul proyektif atas R, sehingga $(R[[S]])^o$ submodul murni $R^{R[[S]]}$. Akibatnya

$$((R[[S]])^o, m^o_{R[S]}, \mu^o_{R[S]})$$

koaljabar atas R.

1.2 Koaljabar Atas GDPT

Pada GDPT $R[[S]]$, didefinisikan

$$(R[[S]]) = \{f \mid f : S \to R[[S]] \text{ pemetaan}\},$$

dan $B^{\mathrm{f}} =$

$$\{g \in B \mid g(R[[S]])[S] \text{ MDH atas } R[[S]]\},$$

untuk sebarang $B \bowtie R[[S]]$. Dengan memperhatikan hubungan antara gelanggang semisederhana dan Artin, regular, Noether atau lapangan pada $R[[S]]$ dan B, seperti yang dikemukakan Hungerford (1974) diperoleh koaljabar atas GDPT.

Teorema 4 *Diketahui :*

1. *R gelanggang Noether,*
2. *$(S, \leq)$ monoid terurut tegas, narrow, kanselatif, bebas torsi, dan*
3. *Terdapat $s_1, \ldots, s_n \in S - G(S)$ yang memenuhi $S =< s_1, \ldots, s_n > +G(S)$.*

Pernyataan-pernyataan berikut dipenuhi:

1. *Jika $B \trianglelefteq (R[[S]])^S$ atas $(R[[S]])[S]$ dan $B^{\mathrm{f}} \trianglelefteq (R[[S]])^S$ murni atas $R[[S]]$, maka*
$$(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$$
merupakan koaljabar atas $R[[S]]$, dengan
$$\begin{aligned} \Delta_{B^{\mathrm{f}}} &= \pi^{-1} \circ m^{\bullet}, \qquad \text{dan} \\ \epsilon_{B^{\mathrm{f}}} &: B^{\mathrm{f}} \to R[[S]], \quad h \mapsto h(0), \end{aligned}$$
dengan π pemetaan kanonik :
$$(R[[S]])^S \otimes_R (R[[S]])^S \to (R[[S]])^{S \times S}.$$
2. *Jika $(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}} \trianglelefteq (R[[S]])^S$ murni, maka $(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}$ koaljabar atas $R[[S]]$ terhadap $\Delta_{(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}}$.*
3. *Jika $(R[[S]][S])^{\mathrm{f}} \trianglelefteq (R[[S]])^S$ murni, maka $(R[[S]][S])^{\mathrm{f}}$ koaljabar atas $R[[S]]$, terhadap $\Delta_{(R[[S]][S])^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{(R[[S]][S])^{\mathrm{f}}})$.*

Selanjutnya, diberikan gelanggang Noether R dan keluarga monoid terurut tegas

$$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \cdots, (S_n, \leq_n)$$

yang *narrow* dan bebas torsi. Jika untuk setiap i, terdapat monoid dibangun secara hingga T_i, sehingga $S_i = T_i + G(S_i)$, maka $R[[(\times_{i=1}^n S_i)]]$ Noether terhadap '$\leq^{lex}$'. Akibatnya, jika B subbimodul $(R[[(\times_{i=1}^n S_i)]])^{(\times_{i=1}^n S_i)}$ atas gelanggang $(R[[(\times_{i=1}^n S_i)]])[(\times_{i=1}^n S_i)]$ dan B^{f} submodul murni $(R[[(\times_{i=1}^n S_i)]])^{(\times_{i=1}^n S_i)}$ atas $R[[(\times_{i=1}^n S_i)]]$, maka B^{f} koaljabar atas $R[[(\times_{i=1}^n S_i)]]$ terhadap $\Delta_{B^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{B^{\mathrm{f}}}$.

Penambahan syarat semisederhana dan Artin pada R tidak selalu berakibat $R[[S]]$ semisederhana dan Artin, sehingga masih diperlukan syarat tambahan agar modul atas $R[[S]]$ yang ditelaah merupakan modul murni. Syarat-syarat tambahan tersebut terlihat pada dua sifat berikut ini.

Teorema 5 *Diberikan monoid terurut tegas S yang subtotal, komutatif, dan:*

1. *Terdapat $T \subseteq S$, dengan T tak hingga, narrow, dan Artin,*
2. *S grup bebas torsi, dan*
3. *R semisederhana yang Artin.*

Jika $B \bowtie (R[[S]])^S$ atas $(R[[S]])[S]$, maka $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$. Lebih khusus lagi

$$((R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}, \Delta_{(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[S]][[S]])^{\mathrm{f}}})$$

dan $((R[[S]][S])^{\mathrm{f}}, \Delta_{(R[[S]][S])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[S]][S])^{\mathrm{f}}})$ *merupakan koaljabar atas $R[[S]]$.*

Akibat 6 *Untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, diketahui $(S_i, \leq_i)$ monoid terurut tegas dan komutatif. Jika:*

1. *Terdapat $T_k \subseteq S_k$, dengan $1 \leq k \leq n$, T_k tak hingga, narrow, dan Artin,*
2. *Untuk setiap $i = 1, \ldots, n$, S_i grup bebas torsi,*
3. *R semisederhana dan Artin,*

maka pada $\times_i^n S_i$ terdapat urutan '$\preceq$', sehingga

$$(R[[\times_i^n S_i, \preceq]][[\times_i^n S_i, \preceq]])^{\mathrm{f}}, \Delta_1, \epsilon_1)$$

dan $((R[[\times_i^n S_i, \preceq]][\times_i^n S_i])^{\mathrm{f}}, \Delta_2, \epsilon_2)$

merupakan koaljabar atas $R[[\times_i^n S_i, \preceq]]$, *dengan*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]]}, \qquad \epsilon_1 = \epsilon_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]]},\\ \Delta_2 &= \Delta_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]]},\ dan\ \epsilon_2 = \epsilon_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]]}.\end{aligned}$$

2. HASIL PENELITIAN

Beberapa bentuk khusus GDPT dapat dikontruksi dengan mengambil

$$S = \mathcal{N}_o = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

sebagai monoid yang komutatif terhadap operasi jumlahan bilangan. Jika R gelanggang komutatif dengan elemen identitas, maka relasi urutan

$$m \leq n \text{ jika } n - m \in \mathcal{N}_o, \qquad (4)$$

untuk setiap $m, n \in \mathcal{N}_o$, mendefinisikan GDPT $R[[\mathcal{N}_o]]$ yang isomorfis dengan

$$R[[x]] = \{\sum_{i=0}^{+\infty} r_i x^i \mid r_i \in R, i = 0, 1, \ldots, \}.$$

Gelanggang ini disebut gelanggang deret pangkat formal (GDPF) yang memuat gelanggang polinomial $R[x]$ sebagai subgelanggang; sedangkan $R[x]$ merupakan GDPT melalui $\mathcal{N}_o$ relatif atas urutan trivial.

Akibat 7 *Diberikan gelanggang Noether R. Jika $(R[x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $R^{\mathcal{N}_o}$, maka $R[x]$ merupakan koaljabar atas R, terhadap*

$$\begin{aligned}\Delta_{R[x]} &= \pi^{-1} \circ m^{\bullet},\\ &\qquad m^{\bullet} : R^{\mathcal{N}_o} \to R^{\mathcal{N}_o \times \mathcal{N}_o},\\ \epsilon_{R[x]} &: R[x] \to R, \quad h \mapsto h(0),\end{aligned}$$

dan $\pi : R^{\mathcal{N}_o} \otimes R^{\mathcal{N}_o} \to R^{\mathcal{N}_o \times \mathcal{N}_o}$ *pemetaan kanonik.*

Bukti: $(\mathcal{N}_o, +)$ merupakan monoid terurut total, komutatif, kanselatif terhadap urutannya dan $G(\mathcal{N}_o)$ hingga. Untuk setiap $n \in \mathcal{N}_o - \{0\}$ berlaku $n = n1$, sehingga $\mathcal{N}_o$ terfaktorisasi secara tunggal. Sesuai Teorema 1, $(R[x], \Delta_{R[x]}, \epsilon_{R[x]})$ koaljabar atas R. □

Penggantian syarat R Noether dengan semisederhana dan Artin pada Akibat 7, mengakibatkan syarat $(R[x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $R^{\mathcal{N}_o}$ pasti dipenuhi, sehingga $R[x]$ koaljabar atas R terhadap $\Delta_{R[x]}$ dan $\epsilon_{R[x]}$. Hal tersebut menyebabkan sifat berikut ini dipenuhi.

Akibat 8 *Jika R gelanggang Artin dan semisederhana, maka*

$$((R[[x]])^f, \Delta_{(R[[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[x]])^{\mathrm{f}}})$$

merupakan koaljabar atas R.

Bukti: Telah diketahui $R[[x]]$ subbimodul $R^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[x]$. Sesuai Teorema 1, maka

$$((R[[x]])^f, \Delta_{(R[[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[x]])^{\mathrm{f}}})$$

koaljabar atas R. □

Selanjutnya, jika $S = \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$, maka terhadap operasi perkalian bilangan S merupakan monoid yang komutatif dan $G(\mathcal{N})$ hingga. Untuk setiap $n \in \mathcal{N} - \{1\}$ berlaku $n = \Pi_{i=1}^{k_n} p_i^{\alpha_i}$, dengan p_i elemen prima, sehingga $\mathcal{N}$ terfaktorisasi secara tunggal.

Jika R gelanggang komutatif dengan elemen identitas, maka GDPT yang dibangun melalui R dan $(\mathcal{N}, \times)$ selaku monoid terurut atas relasi urutan 4 diberi simbol dengan $R[[\mathcal{N}]]$; dan gelanggang polinomial di dalamnya diberi simbol $R[\mathcal{N}]$.

Akibat 9 *Diberikan gelanggang Noether R. Jika $(R[\mathcal{N}])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $R^{\mathcal{N}}$, maka*

$$(R[\mathcal{N}], \Delta_{R[\mathcal{N}]}, \epsilon_{R[\mathcal{N}]})$$

merupakan koaljabar atas R, terhadap komultiplikasi

$$\Delta_{R[\mathcal{N}]} : R[\mathcal{N}] \to R[\mathcal{N}] \otimes_R R[\mathcal{N}]$$

dan kounit $\epsilon_{R[\mathcal{N}]} : R[\mathcal{N}] \to R,$

$$\Delta_{R[\mathcal{N}]} = \pi^{-1} \circ m^{\bullet}, \quad m^{\bullet} : R^{\mathcal{N}} \to R^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$$

dan $\epsilon_{R[\mathcal{N}]} : R[\mathcal{N}] \to R, \quad h \mapsto h(0),$
dengan $\pi : R^{\mathcal{N}} \otimes R^{\mathcal{N}} \longrightarrow R^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ *pemetaan kanonik.*

Bukti: Karena $\mathcal{N}$ monoid terurut total yang komutatif, $G(\mathcal{N})$ hingga dan terfaktorisasi secara tunggal, maka sesuai Teorema 1, $(R[\mathcal{N}], \Delta_{R[\mathcal{N}]}, \epsilon_{R[\mathcal{N}]})$ koaljabar atas R. □.

Akibat 10 *Jika R gelanggang Artin dan semisederhana, maka*

$$(R[\mathcal{N}], \Delta_{R[\mathcal{N}]}, \epsilon_{R[\mathcal{N}]})$$

merupakan koaljabar atas R.

Selanjutnya, jika R gelanggang Artin dan semisederhana, maka:

1. $(R[[x]])^o$ murni di $R^{R[[x]]}$ dan
2. $(R[[\mathcal{N}]])^o$ murni di $R^{R[[\mathcal{N}]]}$.

Akibatnya $R[[x]]$ dan $R[[\mathcal{N}]]$ keduanya modul proyektif atas R, sehingga:

1. $(R[[x]])^o \trianglelefteq (R[[x]])^*$ dan $(R[[\mathcal{N}]])^o \trianglelefteq (R[[\mathcal{N}]])^*$ murni,
2. $((R[[x]])^o, m^o_{R[[x]]}, \mu^o_{R[[x]]})$ koaljabar atas R, dan
3. $((R[[\mathcal{N}]])^o, m^o_{R[[\mathcal{N}]]}, \mu^o_{R[[\mathcal{N}]]})$ koaljabar atas R.

Pada kasus R lapangan, $(R[[x]])^o$ submodul murni $R^{R[[x]]}$, sehingga $R[[x]]$ proyektif dan $((R[[x]])^o, m^o_{R[[x]]}, \mu^o_{R[[x]]})$ koaljabar atas R. Dengan analog dapat ditunjukkan $(R[[\mathcal{N}]])^o$ koaljabar atas R terhadap $m^o_{R[[\mathcal{N}]]}$ dan $\mu^o_{R[[\mathcal{N}]]}$.

Selanjutnya, pada bagian ini diberikan monoid komutatif S yang terurut kuat dan monoid $\mathcal{N}_o$ terhadap relasi urutan dan jumlahan bilangan. Gelanggang deret pangkat yang terbentuk melalui gelanggang komutatif R, memiliki beberapa struktur, di antaranya:

1. $R[[S]][[x]]$ dan $R[[x]][[S]]$,
2. $R[S][[x]]$ dan $R[x][[S]]$.

Dengan mengkaji modul $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]]$ diperoleh sifat berikut ini.

Teorema 11 *Diketahui R gelanggang Noether dan S monoid terurut tegas. Jika*

1. *$(S, \leq)$ narrow, kanselatif dan bebas torsi*
2. *Terdapat $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S - G(S)$ sehingga $S =< s_1, \cdots, s_n > +G(S)$.*

Pernyataan-pernyataan berikut dipenuhi:

1. *Jika $B \bowtie (R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]][x]$ dan B^{f} submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]]$, maka $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$.*
2. *Jika $(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$, maka $(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}$ koaljabar atas $R[[S]]$ terhadap $\Delta_{(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}$.*
3. *Jika $(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$, maka $R[[S]][x]$ koaljabar atas $R[[S]]$ terhadap $\Delta_{(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}}$.*

Bukti: Dengan asumsi 1, 2, dan 3, $R[[S]]$ gelanggang Noether, sehingga sesuai Teorema 1 diperoleh sifat 1 dan 2.

Lebih lanjut, monoid $\mathcal{N}_o$ terurut total dan terfaktorisasi tunggal, dengan $G(\mathcal{N}_o)$ hingga. Jadi $(R[[S]][x])^{\mathrm{f}} = (R[[S]])[x]$; dan dengan asumsi $(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ akan berakibat

$$(R[[S]][x], \Delta_{R[[S]][x]}, \epsilon_{R[[S]][x]})$$

koaljabar atas $R[[S]]$. □

Secara analog dapat dibuktikan sifat di atas juga berlaku jika letak S dan $\mathcal{N}_o$ dipertukarkan.

Selanjutnya, diasumsikan R gelanggang Noether dan S monoid terurut tegas yang komutatif dan memenuhi salah satu di antara kondisi berikut ini:

1. S grup, *narrow* dan bebas torsi
2. S monoid numeris
3. S submonoid $\mathcal{N}_o^n$, dengan $n \geq 2$ dan dibangun secara hingga.

Berdasarkan asumsi tersebut gelanggang $R[[S]]$ Noether, sehingga sesuai Teorema 11, jika $B \bowtie (R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]][x]$ dan B^{f} submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[x]]$, maka $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$.

Akibatnya, jika $(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$, maka $R[[S]][x]$ merupakan koaljabar atas $R[[S]]$, terhadap $\Delta_{R[[S]][x]}$ dan $\epsilon_{R[[S]][x]}$.

Hal ini juga berlaku untuk keluarga monoid terurut tegas

$$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \cdots, (S_n, \leq_n)$$

yang *narrow*, bebas torsi, dan untuk setiap i, terdapat submonoid T_i yang dibangun secara hingga dan

$$S_i = T_i + G(S_i).$$

Dengan asumsi tersebut gelanggang $R[[(\times_{i=1}^n S_i, \leq^{lex})]]$ Noether, sehingga jika B subbimodul $(R[[(\times_{i=1}^n S_i)]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $(R[[(\times_{i=1}^n S_i)]])[x]$ dan $B^{\mathrm{f}} \trianglelefteq (R[[\times_{i=1}^n S_i]])^{\mathcal{N}_o}$ murni atas $R[[(\times_{i=1}^n S_i)]]$, maka B^{f} koaljabar atas gelanggang $R[[(\times_{i=1}^n S_i)]]$.

Selanjutnya, diberikan monoid S dan S_1 yang komutatif dan terurut tegas terhadap masing-masing urutannya. Kondisi semisederhana dan Artin pada $R[[S]]$ merupakan syarat cukup agar untuk sebarang $B \bowtie (R[[S]])^{S_1}$ atas $(R[[S]])[S_1]$, B^{f} submodul murni di $(R[[S]])^{S_1}$ atas $R[[S]]$. Akibatnya $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$.

Teorema 12 *Diketahui S subtotal dan*

1. *Terdapat himpunan tak hingga $T \subseteq S$, T narrow dan Artin,*
2. *S grup komutatif dan bebas torsi, dan*
3. *R gelanggang semisederhana Artin.*

Jika $B \bowtie (R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]][x]$, maka $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$. Akibatnya

$$((R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_{((R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{((R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}})$$

dan $(R[[S]][x], \Delta_{R[[S]][x]}, \epsilon_{R[[S]][x]})$ koaljabar atas $R[[S]]$.

Bukti: Akibat asumsi 1, 2 dan 3, $R[[S]]$ semisederhana dan Artin. Jika B subbimodul $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]][x]$, maka B^{f} submodul murni atas $R[[S]]$. Jadi B^{f} koaljabar atas $R[[S]]$, terhadap , $\Delta_{B^{\mathrm{f}}}$ dan $\epsilon_{B^{\mathrm{f}}}$.

Karena $\mathcal{N}_o$ monoid terurut kuat yang kanselatif dan terfaktorisasi secara tunggal, maka $R[[S]][[x]]$ dan $R[[S]][x] \bowtie (R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$. Akibatnya $(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}$ dan $(R[[S]][x])^{\mathrm{f}}$ submodul murni $(R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]]$, sehingga sifat terbukti. □

Syarat semisederhana dan Artin pada R di dalam Teorema 12 dapat diganti dengan syarat lain.

Teorema 13 *Diketahui S terurut subtotal dan:*

1. *Terdapat himpunan tak hingga $T \subseteq S$, T narrow dan Artin,*
2. *S grup komutatif dan bebas torsi, dan*
3. *R reguler dan untuk setiap himpunan elemen-elemen idempoten tak nol di R yang secara berpasangan orthogonal selalu hingga.*

Jika B subbimodul $R[[S]])^{\mathcal{N}_o}$ atas $R[[S]][x]$, maka $(B^{\mathrm{f}}, \Delta_{B^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{B^{\mathrm{f}}})$ koaljabar atas $R[[S]]$. Modul

$$((R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_{(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}})$$

dan $(R[[S]][x], \Delta_{R[[S]][x]}, \epsilon_{R[[S]][x]})$ merupakan koaljabar atas $R[[S]]$.

Bukti: Gelanggang $(R[[S]]$ semisederhana dan Artin. Dengan alasan yang analog de- ngan bukti Teorema 12, sifat terbukti. □

Teorema 14 *Untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, diketahui $(S_i, \leq_i)$ monoid terurut tegas subtotal dan komutatif. Jika :*

1. *Terdapat himpunan tak hingga $T_k \subseteq S_k$ untuk suatu $1 \leq k \leq n$, T_k narrow dan Artin,*
2. *Untuk masing-masing $i = 1, \ldots, n$, S_i grup bebas torsi, dan*
3. *R gelanggang semisederhana Artin,*

maka terdapat urutan '$\preceq$' di $\times_i^n S_i$, sehingga

1. $((R[[\times_i^n S_i, \preceq]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_1, \epsilon_1)$ *dan*
2. $(R[[\times_i^n S_i, \preceq]][x], \Delta_2, \epsilon_2)$

merupakan koaljabar atas $R[[\times_i^n S_i, \preceq]]$, *dengan*

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{(R[[\times_i^n S_i,\preceq]][[x]])^{\mathrm{f}}},\\ \epsilon_1 &= \epsilon_{(R[[\times_i^n S_i,\preceq]][[x]])^{\mathrm{f}}},\\ \Delta_2 &= \Delta_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]][x]}, \text{ dan}\\ \epsilon_2 &= \epsilon_{R[[\times_i^n S_i,\preceq]][x]}).\end{aligned}$$

Bukti: Untuk menyingkat ditulis

$$\times_i^n S_i = S.$$

Untuk setiap i, $(S_i, \leq_i)$ monoid terurut tegas subtotal, sehingga $(S, \leq^{lex})$ monoid terurut tegas subtotal. Karena S_i grup bebas torsi yang komutatif untuk masing-masing i, maka S juga grup bebas torsi yang komutatif. Selain itu S_i kanselatif terhadap urutannya. Akibatnya S kanselatif terhadap '$\leq^{lex}$', sehingga dapat ditemukan '$\preceq$' yang *finer* dibanding '$\leq^{lex}$' yang mengakibatkan monoid $(S, \preceq)$ terurut tegas dan total.

Selanjutnya, dapat dibentuk $T =$

$$\{(0_1, \ldots, 0_{k-1}, s, 0_{k+1}, \ldots, 0_n) \mid s \in T_k\},$$

dengan $0_i \in S_i$. Jelas T subhimpunan $\times_i^n S_i$, tak hingga, *narrow* dan Artin terhadap '$\leq^{lex}$'. Urutan '$\preceq$' *finer* dibanding '$\leq^{lex}$', sehingga T *narrow* dan Artin terhadap '$\preceq$'.

Karena monoid S kanselatif terhadap '$\preceq$', maka $R[[S, \preceq]][[S, \preceq]]$ dan $R[[S, \preceq]][S]$ subbimodul $(R[[S, \preceq]])^S$ atas $R[[S, \preceq]]$. Di sisi lain gelanggang $R[[S, \preceq]]$ Artin dan semisederhana, sehingga

$$((R[[S, \preceq]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_1, \epsilon_1)$$

dan $(R[[S, \preceq]][x], \Delta_2, \epsilon_2)$ koaljabar atas gelanggang $R[[S, \preceq]]$. $\square$

Sifat tersebut juga berlaku untuk setiap monoid terurut total S. Adanya fakta, bahwa setiap lapangan merupakan gelanggang semisederhana dan Artin mengakibatkan sifat berikut ini berlaku.

Teorema 15 *Diberikan monoid terurut tegas S yang komutatif. Jika R lapangan dan S grup bebas torsi dan*

$$(\forall s \in S)(\exists k \in \mathcal{N})\ (ks \leq 0 \quad \vee \quad ks \geq 0),$$

maka

$$((R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_{R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}})$$

koaljabar atas $R[[S]]$.

Jika S terurut subtotal (total), maka pertidaksamaan Teorema 15 dipenuhi, sehingga dapat disimpulkan, bahwa jika R lapangan dan S grup bebas torsi yang komutatif, kanselatif dan terurut subtotal, maka

$$(R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}, \Delta_{R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}}, \epsilon_{R[[S]][[x]])^{\mathrm{f}}})$$

merupakan koaljabar atas $R[[S]]$.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan di atas dapat ditarik kesimpulan, bahwa dengan menggunakan konstruksi koaljabar gelanggang deret pangkat tergeneralisasi, melalui suatu gelanggang semisederhana dan Artin dapat disusun koaljabar gelanggang deret pangkat formal. Untuk itu diperlukan syarat tambahan pada monoid penyusunnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abuhlail, J.Y., Gomez-Torrecillas, J., dan Wisbauer, R., 2000, *Dual Coalgebras of Algebras over Commutative Rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, Number 153 Elsevier, Netherlands, 107-120

Anderson, F.W. dan Fuller, K.R., 1992, *Graduate Texts in Mathematics; Rings and Categories of Modules*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York

Hungerford, T.W., 1974, *Graduate Texts in Mathematics; Algebra*, Springer-Verlag, New York

Ribenboim, P., 1992, *Noetherian Rings of Generalized Power Series Rings*, J. Pure and Applied Algebra, Elsevier Science Publishers, 79, 293-312

Ribenboim, P., 1997, *Semisimple Ring and Von Neumann Regular Rings of Generalized Power Series Rings*, Journal of Algebra, Vol. 198, 327-338

Surodjo, B., Setiadji, dan Wahyuni, S., 2003, *Finiteness Conditions of Generalized Power Series Rings*, Proceding of SEAMS Conference 2002, Yogyakarta

Surodjo, B., Setiadji, dan Wahyuni, S., 2004, *Syarat Cukup Koaljabar Pada Dual Gelanggang Deret Pangkat Tergeneralisasi*, Proseding KNM 2004, Denpasar

Surodjo, B., Setiadji, dan Wahyuni, S., 2005, *Coalgebras of Generalized Power Series Rings*, 4th Asian Mathematical Conference 2005, National University of Singapore