BEBERAPA METODE DALAM MENENTUKAN SOLUSI DARI SUATU FUNGSI KUBIK

Ana Muliana Musli
Jurusan Pendidikan matematika FMIPA Universitas Sulawesi Barat
email: anamulianamusli@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk memberikan dekripsi tentang beberapa cara dalam menentukan solusi dari suatu fungsi kubik. Dimana ada beberapa metode yang dapat digunakan yaitu metode geometri dan metode pemfaktoran. Metode geometri yang dibahas dalam tulisan ini adalah metode umum dengan menggunakan diskriminan, metode dari Jeromo Cardan dan substitusi Vieta. Selain itu, dibahas juga metode pemfaktoran yang mensyaratkan bahwa minimal salah satu akarnya adalah bilangan rasional.Untuk menentukan solusi fungsi kubik dengan menggunakan metode Cardano dan substitusi Vieta disyaratkan bahwa fungsi kubiknya harus diubah terlebih dahulu dalam bentuk fungsi kubik menurun. Penentuan solusi dari fungsi kubik ini selain berguna dalam bidang matematika sendiri juga dapat digunakan dalam menentukan solusi buffer (larutan penyangga) untuk menjaga kestabilan PH organisme dalam bidang kimia.

***Kata kunci**: diskriminan, polinom orde tiga, depression cubic, metode Cardano, substitusi Vieta, pemfaktoran*

1. PENDAHULUAN

Dalam matematika, fungsi kubik adalah fungsi yang berbentuk:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Dimana $a \neq 0$. Fungsi kubik dikenal juga dengan nama polinom orde tiga.
Dengan menetapkan $f(x) = 0$, maka fungsi kubik akan menjadi persamaan persamaan kubik, yaitu:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Gambar 1. Grafik persamaan kubik

Biasanya koefisien *a, b, c* dan *d* adalah bilangan real. Akan tetapi banyak teori dari persamaan kubik dengan koefisien bil.real yang diaplikasikan ke bilangan kompleks. Menyelesaikan fungsi kubik sama halnya dengan menentukan nilai dari *x* untuk *f*(*x*) = 0. Ada banyak metode untuk menyelesaikan persamaan kubik. Solusinya, yang biasa disebut sebagai akar dari persamaan kubik, dapat ditentukan dengan menggunakan metode aljabar (yang juga berlaku untuk persamaan kuadrat dan persamaan pangkat empat tetapi tidak berlaku untuk persamaan berderajat lebih dari empat menurut teorema Abel Ruffini) yaitu dengan melakukan proses pemfaktoran. Akar-akar persamaan kubik dapat juga ditentukan secara trigonometri, maupun secara geometri. Diantara metode geometri yang dapat digunakan adalah metode yang diperkenalkan oleh Omar Khayyam, Gerolamo Cardano, metode Langrange, substitusi Vieta, dan juga metode umum yang menggunakan diskriminan. Sedangkan untuk metode trigonometri, kita dapat menggunakan metode dari Francois Viete. Alternative lain yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan pendekatan numeric, dalam hal ini metode numeric, seperti metode Newton-Raphson.

Tulisan ini akan berfokus pada penentuan akar-akar persamaan kubik secara analitik maupun secara aljabar yaitu dengan menggunakan metode umum yang melibatkan diskriminan, metode Cardano, substitusi Vieta serta metode Pemfaktoran.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan yaitu berupa kajian teori pustaka dengan mengumpulkan literatur-literatur untuk penurunan rumus secara teoritis, dan simulasi untuk memperoleh kesesuaian teori. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini: 1) mencari referensi yang terkait dengan fungsi kubik dan polinom orde tiga serta metode-metode yang dapat digunakan dalam menentukan solusinya 2) memilih beberapa metode yang akan dibahas secara rinci dalam menentukan akar-akar kubik dari beberapa metode yang ada (yaitu metode Cardano, substitusi Vieta, metode umum yang melibatkan diskriminan dan metode Pemfaktoran) 3) mencari kembali referensi dari beberapa metode yang telah dipilih tersebut 5) memahami alur pikir metode-metode tersebut dalam menentukan akar-akar suatu polinom 6) mencari refensi mengenai cara menentukan diskriminan untuk polinom orde tiga. 7) mencari referensi penunjang

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dari suatu fungsi kubik. Dari sekian banyak metode tersebut, tulisan ini akan memfokuskan pada metode geometri dan metode aljabar. Metode geometri yang akan dibahas adalah metode umum dengan menggunakan diskriminan, metode Cardano dan substitusi Vieta. Disamping itu tulisan ini juga akan membahas mengenai metode aljabar khususnya metode pemfaktoran yang cukup sering digunakan.

3.1. *Metode Geometri*

Sebelum membahas mengenai penentuan akar-akar kubik, gambar di bawah ini adalah visualisasi secara geometri dari fungsi kubik:

Titik kritis dari persamaan kubik adalah nilai-nilai dari x saat kemiringan (slope) sama dengan nol. Yang diperoleh dengan menentukan derivative (turunan) dari persamaan kubik yang disamakan dengan nol, yaitu: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Solusi dari persamaan ini adalah titik kritis dari persamaan kubik dan diberikan oleh rumus:

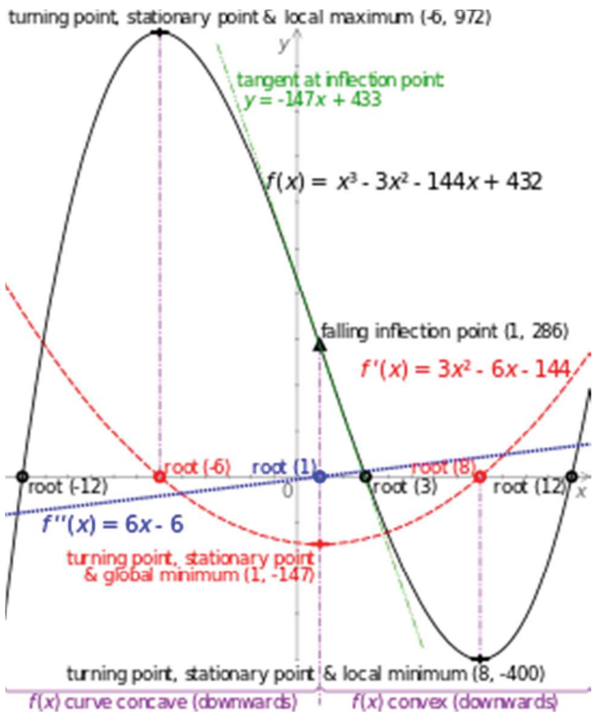
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

yang dalam hal ini rumus tersebut akan menjadi

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4(3a)c}}{2(3a)}$$

$$= \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(3ac)}}{2(3a)} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{2(3a)}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$



Gambar 2. Titik stasioner, titik belok dan maksimum/minimum local dari fungsi kubik

Jika $b^2 - 3ac > 0$ maka fungsi kubik akan mempunyai maksimum lokal dan minimum local. Jika $b^2 - 3ac = 0$ maka titik beloknya juga adalah titik kritisnya. Jika $b^2 - 3ac < 0$ maka fungsi tersebut tidak mempunyai titik kritis. Pada kasus dimana $b^2 - 3ac \leq 0$ maka fungsi kubik tersebut disebut monoton kuat (*strictly monotonic*).

3.1.1. Metode Umum

Secara umum, persamaan kubik berbentuk:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

dengan $a \neq 0$. Koefisien a, *b, c* dan *d* secara umum diasumsikan adalah elemen bilangan real, tetapi banyak dari hasilnya dapat digunakan bukan hanya sebatas pada lapangan bilangan real, tetapi juga yang lainnya, termasuk bilangan kompleks.

Setiap persamaaan kubik (1) dengan koefisien bilangan real mempunyai minimal satu solusi dalam bilangan real. Yaitu :

- Jika $\Delta > 0$ maka persamaan kubik mempunyai 3 akar real yang berbeda
- Jika $\Delta = 0$ maka persamaan kubik mempunyai 3 akar real yang kembar
- Jika $\Delta < 0$ maka persamaan kubik mempunyai 1 akar real dan 2 akar kompleks.

Dimana Δ adalah symbol dari diskriminan dalam huruf Yunani atau dalam huruf latin biasa dituliskan dengan "D", dimana diskriminan untuk persamaan kubik adalah:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

Yang mana rumus ini diperoleh dari penjabaran rumus umum untuk diskriminan yaitu:

$$\Delta = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (r_i - r_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{2n-2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

3.1.1.1. Rumus Umum untuk Akar-akar Kubik

Untuk persamaan kubik secara umum:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, maka akar-akarnya adalah sebagai berikut:

$$x_k = -\frac{1}{3a}\left(b + u_k C + \frac{\Delta_0}{u_k C}\right), \qquad k \in \{1, 2, 3\}$$

dimana

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad u_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

dan

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$$

dimana

$$\Delta_0 = b^2 - 3ac$$
$$\Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d$$

dan

$$\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27a^2\Delta$$

3.1.1.2. Kasus Khusus

Jika $\Delta \neq 0$ dan $\Delta_0 = 0$, maka nilai dari $\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3} = \sqrt{\Delta_1^2}$ telah dipilih agar $C \neq 0$ yaitu dengan mendefinisikan $\sqrt{\Delta_1^2} = \Delta_1$ tanpa memperhatikan tanda dari Δ_1

Jika $\Delta = 0$ dan $\Delta_0 = 0$, ketiga akar-akarnya akan sama dengan

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}$$

Jika $\Delta = 0$ dan $\Delta_0 \neq 0$, lambang untuk akar-akar diatas benar tetapi menyesatkan, menyembunyikan fakta bahwa tidak ada akar (*radical*) yang diperlukan untuk mewakili akar-akar. Pada kenyataannya, dalam kasus ini terdapat dua buah akar kembar:

$$x_1 = x_2 = \frac{9ad - bc}{2\Delta_0}$$

dan akar yang lain:

$$x_3 = \frac{4abc - 9a^2d - b^3}{a\Delta_0}$$

3.1.2. Metode Cardano

Dengan membagi persamaan (1) oleh *a* dan mengganti *x* dengan $t - \frac{b}{3a}$ (transformasi Tschirnhaus), maka akan diperoleh

$$a(t - \frac{b}{3a})^3 + b(t - \frac{b}{3a})^2 + c(t - \frac{b}{3a}) + d = 0$$
$$a(t^3 - 3t^2\frac{b}{3a} + 3t\frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}) + b(t^2 - 2\frac{b}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}) + c(t - \frac{b}{3a}) + d = 0$$
$$at^3 - 3at^2\frac{b}{3a} + 3at\frac{b^2}{9a^2} - a\frac{b^3}{27a^3} + bt^2 - 2\frac{b^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$at^3 - bt^2 + t\frac{b^2}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} + bt^2 - 2\frac{b^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$at^3 + t\frac{b^2}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} - 2\frac{b^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$at^3 + (\frac{b^2}{3a} + c)t - \frac{b^3}{27a^2} - 2\frac{b^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$at^3 + (\frac{3ac + b^2}{3a})t - \frac{b^3}{27a^2} - 2\frac{b^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$
$$t^3 + (\frac{3ac + b^2}{3a^2})t - \frac{b^3}{27a^3} - 2\frac{b^2}{3a^2} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$
$$t^3 + (\frac{3ac + b^2}{3a^2})t - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{18ab^2}{27a^3} + \frac{3b^3}{27a^3} - \frac{9abc}{27a^3} + \frac{27a^2d}{27a^3} = 0$$

$$t^3+\left(\frac{3ac+b^2}{3a^2}\right)t+(-\frac{18ab^2}{27a^3}+\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{9abc}{27a^3}+\frac{27a^2d}{27a^3})=0$$

atau

$$t^3+pt+q=0 \qquad (2)$$

dimana

$$p=\frac{3ac+b^2}{3a^2}$$
$$q=\frac{2b^3-18ab^2-9abc+27a^2d}{27a^3}$$

Bagian kiri dari persamaan (2) adalah sebuah trinomial monik yang disebut persamaan kubik menurun (*depressed cubic*). Untuk menentukan akar-akar dari persamaan (1) maka kita dapat menggunakan akar-akar dari persamaan kubik menurun (2) dengan cara mentransformasikan akar-akar dari persamaan kubik menurun tersebut dengan mengganti nilai untuk p dan q dan menggunakan hubungan $x=t-\frac{b}{3a}$

Dengan demikian, untuk metode Cardano ini kita akan berfokus pada persamaan (2) untuk menentukan akar-akar persamaan kubik.

Untuk itu, perhatikan persamaan kubik menurun (*depressed cubic*) berikut:

$$t^3+pt+q=0 \qquad (2)$$

Kita memperkenalkan dua variable u dan v yang mana: $u+v=t$

dan substitusikan persamaan ini ke persamaan kubik menurun (2) memberikan

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$
$$u^3+v^3+3u^2v+3uv^2+pu+pv+q=0 \text{ atau dengan kata lain}$$
$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0 \qquad (3)$$

Pada poin ini Cardano memberikan syarat kedua untuk u dan v, yaitu

$$3uv+p=0 \qquad (4)$$

Dengan demikian persamaan (3) akan menjadi

$$u^3+v^3=-q \qquad (5)$$

dan dari persamaan (4) akan diperoleh:

$$3uv=-p$$
$$(3uv)^3=(-p)^3$$
$$27u^3v^3=-p^3 \text{ atau}$$
$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \qquad (6)$$

Dengan demikian dengan menggunakan persamaan (5) dan (6) kita dapat membentuk persamaan kuadrat baru dimana u^3 dan v^3 adalah dua akar-akarnya. Persamaan kuadrat baru yang dimaksud adalah:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \qquad (7)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (7)

$$z_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$
$$z_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

Karena saat itu istilah bilangan kompleks belum dikenal, maka saat itu Cardano menganggap bahwa akar-akar dari persamaan ini adalah bilangan real, yaitu dengan menganggap bahwa:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$$

dan dengan menggunakan fakta bahwa u dan v dapat ditukar, kita memperoleh:

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ dan } z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Karena rumusan tersebut diatas berlaku untuk bilangan real, maka akar-akar kubiknya terdefinisi, sehingga menurut metode Cardano, kita dapatkan:

$$t_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (8)$$

Dua akar kompleks dapat dihasilkan dengan mempertimbangkan bahwa akar-akar kubik adalah elemen bilangan kompleks; fakta bahwa uv adalah bilangan real, mengimplikasikan bahwa keduanya dapat diperoleh dengan mengalikan salah satu akar kubik diatas dengan salah satu dari $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ atau $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Jika $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ tidak diharuskan positif, maka kita perlu memilih akar kubik yang sesuai untuk u^3. Demikian halnya tidak ada cara langsung untuk memilih akar kubik yang sesuai untuk v^3, untuk itu kita dapat menggunakan hubungan

$$v = \frac{-p}{3u} \qquad (9)$$

yang mana memberikan

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (10)$$

dan

$$t = u - \frac{p}{3u} \qquad (11)$$

Catatan bahwa tanda dari akar kuadrat tidak mempengaruhi hasil dari t, karena nilainya akan berganti dengan menukar nilai u dan v. Untuk menghindari pembagian dengan nol, maka haruslah $u \neq 0$, yaitu ketika $p = 0$ dan $q \neq 0$,. Dengan demikian, nilai untuk t selalu ada, kecuali ketika $p = q = 0$, sehingga kita akan mendapatkan bentuk 0/0. Pada kasus ini, terdapat tiga akar kembar yaitu $t = 0$.

Catatan juga bahwa dalam beberapa kasus, solusinya dapat dinyatakan dalam akar yang lebih kecil dan juga akar pangkat tiga. Berikut ini penjelasan lengkapnya:

- Jika $p = q = 0$, maka dari persamaan (10) diperoleh $u = 0$, sehingga pada persamaan (11) kita mempunyai tiga akar real kembar $t = 0$
- Jika $p = 0$ dan $q \neq 0$ maka dari persamaan (10) kita memperoleh $u = \sqrt[3]{-q}$ dan dari persamaan (9), kita peroleh $v = 0$. Oleh karena itu dari persamaan (11) kita peroleh $t = u$, sehingga tiga akar-akarnya adalah akar pangkat tiga dari $-q$, atau $t = \sqrt[3]{-q}$
- Jika $p \neq 0$ dan $q = 0$ maka dari persamaan (9) diperoleh

$$u = \sqrt[3]{-0 - \sqrt{0 + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(-\left(\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}$$

$$u^2 = -\left(\frac{p^3}{27}\right)^{1/3}$$

$$-u^2 = \frac{p}{3}$$

$$u = -\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Sehingga dari persamaan (9) kita peroleh

$$v = -\frac{p}{3\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)} = -\frac{p}{-3\sqrt{\frac{p}{3}}} = \sqrt{\frac{p}{3}}$$

Karena nilai u dan v dapat saling ditukar, maka

$$u = \sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{dan} \quad v = -\sqrt{\frac{p}{3}}\ ,$$

Oleh karena itu, ketiga akar-akarnya adalah

$$t = u + v = 0, \qquad t = \omega_1 u - \frac{p}{3\omega_1 u}\ , \qquad t = \frac{u}{\omega_1} - \frac{\omega_1 p}{3u} = -\sqrt{-p}$$

dimana

$$\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- Terakhir jika $4p^3 + 27q^2 = 0$, dan $p \neq 0$, maka terdapat dua akar kembar dan satu akar yang mungkin secara rasional dapat dinyatakan dalam bentuk p dan q, akan tetapi formula ini tidak dapat langsung dideduksi ke dalam bentuk umum dari akar-akar:

$$t_1 = t_2 = -\frac{3q}{2p} \text{ dan } t_3 = \frac{3q}{p}$$

Agar akar-akar dari t ini dalam persamaan (2) memenuhi rumus umum untuk akar-akar x pada persamaan (1), kurangi dengan $\frac{b}{3a}$ dan ganti p dan q dalam bentuk a, b, c, d.

3.1.3. Substitusi Vieta

Kita mulai dari persamaan kubik menurun (*depressed cubic*)

$$t^3 + pt + q = 0 \qquad (2)$$

Kita akan menggunakan substitusi berikut ini, yang dikenal dengan substitusi vieta

$$t = w - \frac{p}{3w}$$

Sehingga persamaannya akan menjadi:

$$w^3 + q - \frac{p^3}{27w^3} = 0$$

Kalikan dengan w^3, sehingga akan menghasilkan persamaan sektik dalam w, yang tidak lain adalah merupakan persamaan kuadrat dalam w^3.

$$w^6 + qw^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Dengan demikian memungkinkan bagi kita untuk menyelesaikannya dengan menggunakan rumus untuk persamaan kuadrat dalam w^3, jika w_1, w_2, w_3 adalah tiga akar dari persamaan kubik, maka akar dari persamaan kubik menurun adalah:

$$t_1 = w_1 - \frac{p}{3w_1}, \qquad t_2 = w_2 - \frac{p}{3w_2}, \qquad t_3 = w_3 - \frac{p}{3w_3}$$

3.2. Metode Pemfaktoran

Jika persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dengan koefisien bilangan bulat dengan akar-akarnya adalah elemen bilangan rasional, maka penentuan akar-akar kubiknya dapat dilakukan dengan melakukan uji akar rasional, yaitu jika akarnya dapat direduksi dalam bentuk $r = m/n$, maka m adalah factor dari d dan n adalah factor dari a, sehingga semua kemungkinan kombinasi dari nilai-nilai m dan n dapat diperiksa untuk mengetahui apakah kombinasi tersebut memenuhi persamaan kubik atau tidak.

Uji akar rasional mungkin juga dapat digunakan untuk persamaan kubik dengan koefisien rasional: yaitu dengan mengalikan KPK dari koefisien-koefisien, yang menghasilkan sebuah persamaan dengan koefisien bilangan bulat yang memiliki akar-akar yang kembar.

Secara khusus, uji akar rasional berguna ketika terdapat tiga akar real sedangkan solusi secara aljabar tidak dapat menolong kita dalam menyatakan akar-akarnya dalam bentuk bilangan kompleks. Uji akar rasional juga berguna dalam menyajikan akar yang berbentuk satu akar real dan dua akar kompleks karena menungkinkan semua akar-akarnya ditulis tanpa menggunakan akar-akar kubik.

Jika r adalah sebarang akar kubik, maka kita dapat mengeluarkan faktor $(x - r)$ dari persamaan kubik dengan menggunakan pembagian polinom (*polynomial long division*) untuk menghasilkan:

$$(x - r)(ax^2 + (b + ar)x + c + br + ar^2) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Hal ini dilakukan agar memudahkan bagi kita untuk menentukan dua akar lainnya dengan menggunakan rumus kuadrat dalam menyelesaikan persamaan kuadrat

$ax^2 + (b + ar)x + c + br + ar^2$, memberikan:

$$\frac{-b - ar \pm \sqrt{b^2 - 4ac - 2abr - 3a^2r^2}}{2a}$$

untuk dua akar lainnya.

4. KESIMPULAN

Dari tulisan ini ada beberapa hal yang dapat disimpulkan, yaitu:

- Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan fungsi kubik, diantaranya adalah metode Geometri dan metode Pemfaktoran.
- Beberapa metode geometri yang dapat dilakukan adalah metode umum dengan menggunakan diskriminan, metode Cardano, dan Substitusi Vieta.
- Metode Cardano dan substitusi Vieta mensyaratkan bahwa fungsi kubik yang akan diselesaikan berbentuk fungsi kubik menurun (depression cubic) atau dengan kata lain berbentuk trimonial monik.
- Metode Pemfaktoran dilakukan jika minimal salah satu akarnya elemen bilangan rasional.
- Kelemahan dari metode Geometri secara umum adalah penentuan akar-akarnya tidak mencakup bilangan kompleks.
- Metode-metode yang digunakan pada tulisan ini hanya terbatas untuk menentukan solusi fungsi kubik dengan koefisien bilangan real.

DAFTAR PUSTAKA

Atmy, Betty, 2008, *Formula untuk Menentukan Akar-akar Persamaan Kubik dan Kuartik*. Program Pasca Sarjana, Universitas Andalas, Padang.

Baker, Andrew, 2008, *An Introduction to Galois Theory*, http://www.math.niu.edu/~beachy/aaol/galois.html, diakses tanggal 17 Mei 2008

Cornell, 2000, *Algebraic Solution of Cubics*, http://www.math.cornell.edu/~dwh/courses/M122-S00/supplements/cardano.html, diakses tanggal 1 Februari 2015

Dewi, Nur, 2012, *Penyelesaian Umum Persamaan Kubik*. http://nounadewi.blogspot.com/2012/05/penyelesaian-umum-persamaan-kubik.html, diakses tanggal 9 Februari 2015

Lazard, D., Naderra, Muntingh, G., 2014. Discriminant. *Wikipedia The Free Encyclopedia,* 2-5: http://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant.

Lazard, D., Kast, Anton, Frietjes, Magioladitis, Dashed, 2014, Polinomial Long Division. *Wikipedia The Free Encyclopedia,* 2-4: http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_long_division

Lazard, D., Muranov, A., Fgnievinski, Gualtieri, C., Bergemann, T., Murata, T., Joergen, B., Essin, Majewski, A., 2014, Monic Polynomial, *Wikipedia The Free Encyclopedia*, 1: http://en.wikipedia.org/wiki/Monic_polynomial

Loraof, Denzilo, Rjwilmsi, Anita, Gundam, Standeven, Lambiam, Myasuda, 2015. Abel-Ruffini Theorem, *Wikipedia The Free Encyclopedia*, 1-2: http://en.wikipedia.org/wiki/Abel%E2%80%93Ruffini_theorem.

Loraof, Lazard, D., Khrisnavedala, Michaeljiz, Yobot, Stein, T., SamuelRiv, Cohengar, Rjwilmsi, Maurice J, 2015. Cubic Function. *Wikipedia The Free Encyclopedia,* 1-9 : http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function

Loraof, Eppstein, D., Watson, James B., Lazard, D., Cork, C., Niesen, J., Alba, S., 2015, Properties of Polynomial Roots, *Wikipedia the Free Encyclopedia*, 1-3: http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_polynomial_roots

Nikita, Ulf Rehmann, Mdoob, 2012, Cardano Formula, *Encyclopedia of Mathematics,*1-2: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Cardano_formula.

Rubin, A., Jarble, Gilliam, Ellis., D.L., Benkovitz, Ryazanov, M., 2015. Lowest Common Denominator. *Wikipedia The Free Encyclopedia,* 1: http://en.wikipedia.org/wiki/Lowest_common_denominator

Segal, E., Finell, Bel, Oliver, August, P., Lewis, J.B., 2014. Intermediate Value Theorems. *Wikipedia The Free Encyclopedia.* 2: http://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem.