Aplikasi *Integer Linear Programming (Ilp)* untuk Meminimumkan Biaya Produksi pada Siaputo Aluminium

Hikmah[*1]**, Nusyafitri Amin**[2]
[*1]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sulawesi Barat, [2]Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Sulawesi Barat
e-mail: [*1] hikmah.ugm@gmail.com, [2] nursyafitriamin@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah optimisasi, khusunya meminimumkan biaya produksi dengan menggunakan Integer Linear Programming (ILP). Penelitian dilaksanakan pada salah satu usaha pembuatan lemari aluminium di Majene dan melakukan wawancara langsung dengan pemilik usaha tersebut. Langkah-langkah proses penelitian ini meliputi: (1) mengumpulkan data dengan wawancara, (2) menyusun model matematika yaitu menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala, dan (3) menyelesaikan masalah. Pada langkah menyelesaikan masalah, peneliti menggunakan metode Branch and Bound, selanjutnya menggunakan program LINDO.

Kata kunci: *optimasi, integer linear programming, fungsi tujuan dan kendala*.

1. PENDAHULUAN

Permasalahan optimalisasi merupakan bagian dari permasalahan masyarakat terutama yang bergerak di bidang usaha produksi barang. Optimalisasi tersebut adalah meminimumkan biaya produksi serta memaksimumkan keuntungan penjualan. Akan tetapi dalam menjalankan suatu usaha, manusia selalu menghadapi batasan-batasan dalam usaha pengoptimalisasian misalnya saja sumber daya dan modal yang terbatas.

Aplikasi matematika yang digunakan untuk mengkaji masalah optimalisasi biasanya disebut penelitian operasional atau riset operasi, yang merupakan teknik untuk menyelesaikan masalah optimalisasi. Riset operasi (*Operations Research*), dalam arti luas, dapat diartikan sebagai penerapan metode-metode, teknik-teknik, dan alat-alat terhadap masalah-masalah yang menyangkut operasi dari sistem-sistem, sedemikian rupa sehingga memberikan penyelesaian optimal Mulyono (2004).

Dalam memecahkan masalah optimalisasi ini, matematika menyediakan berbagai metode untuk menentukan solusi optimum. Salah satu bagian riset operasi yang biasa digunakan adalah Pemprograman Linier (*Linear Programming*) dan Pemrograman Linier Bilangan Bulat (*Integer Linear Programming*). Pada penelitian ini akan digunakan *Integer Linear Programming (ILP)* dengan menggunakan metode *Branch and Bound* (B&B).

Pada penelitian ini, akan dikembangkan model *ILP* masalah meminimumkan biaya produksi dan dari model tersebut akan ditentukan solusi optimum (jumlah produksi barang optimal) yang dapat meminimumkan biaya produksi.

Uraian ini memunculkan beberapa rumusan masalah yakni Bagaimana formulasi matematika dalam meminimumkan biaya produksi pada Sipatuo Aluminium? Bagaimana menyelesaikan model *ILP* masalah meminimumkan biaya produksi dengan menggunakan metode B&B? Apakah biaya produksi yang dilakukan di Sipatuo Aluminium sudah minimum?

Secara umum masalah (problem) dapat ditafsirkan sebagai suatu kesenjangan antara yang seharusnya terjadi dan yang sesungguhnya terjadi, atau antara cita-cita (tujuan) dan keadaan sekarang. Menyelesaikan masalah berarti menjembatani kesenjangan di atas. Analisis system memberikan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut: mengidentifikasi masalahnya, mencari metode-metode penyelesaian, memilih metode yang paling cocok, papling murah, atau paling cepat (optimasi), melaksanakan serta mengevaluasi hasil.

Pada langkah ke (i) matematik berusaha untuk merumuskan masalahdalam arti menerjemahkan masalah ke dalam bahasa matematka (misalnya menjadi suatu bentuk aljabar). Usaha ini disebut menyusun model matematika dari masalah yang ada, sedangkan hasilnya disebut model matematika. Tentu saja suatu model tidak dapat menggambarkan masalahnya dengan tepat, karena untuk sampai ke bentuk model, masalah nyata sudah mengalami beberapa penyederhanaan (karena adany asumsi-asumsi), tetapi model diusahakan sedekat mungkin denga aslinya.

Optimasi dan Pemprograman Matematika

Optimasi adalah sebuah alat yang digunakan secara luas pada formulasi model matematika dan berbagai masalah analisis keputusan yang berkaitan dengan masalah sains dan teknik. Secara umum, masalah real di dunia terjadi dalam model *multi-criteria* dan *multi-choice* dengan konstrain tertentu dalam A.K. Ojha dan Rashmi Ranjan Ota (2014).

Konsep optimasi membahas prinsip dan analisis dari pengambilan keputusan dan masalah alokasi. Dalam masalah optimasi, hal yang paling sering dihadapi adalah masalah pengambilan keputusan yang melibatkan fungsi tujuan/ objektif dan fungsi kendala. Fungsi objektif ini, membahas masalah memaksimumkan atau meminimumkan tergantung dari masalah yang dihadapi. Untuk mencari penyelesaian suatu masalah optimasi, sangat sulit untuk memasukkan semua hal yang berhubungan dengan permasalahan realnya, misal hubungan berbagai variabel, kendala, dan fungsi objektif sehingga hasil penyelesaiaanya tidak lain hanyalah suatu nilai pendekatan.

Kemampuan pemodelan sangat diperlukan dalam menyelesaikan masalah optimasi, kemampuan menentukan faktor yang paling berpengaruh dengan masalah dan kemampuan interpretasi hasil pemodelan sangat diperlukan dalam menarik kesimpulan akhir. Masalah optimasi jika ditinjau dari fungsi objektif dan fungsi kendalanya dapat dibagi menjadi 2 kelompok besar, yakni pemrograman linier dan pemrograman nonlinier Luenberger (2008).

Dalam setiap program matematis, kita mencari pemecahan (*solution*). Jika terdapat sejumlah pemecahan optimal yang setara, maka kita dapat mengambil yang mana saja sebagai pemecahannya. Jadi tidak ada yang diistimewakan antara pemecahan-pemecahan optimal yang setara jika tidak terdapat persyaratan istimewa dalam kendala-kendalanya.

Secara umum, masalah optimasi dapat dinyatakan seperti bentuk di bawah

Maksimumkan atau minimumkan **Fungsi Objektif**
dengan syarat

solusi dari model adalah solusi yang memenuhi semua syarat fungsi kendala dikutip dari Taha (2007)

Pemrograman matematika adalah masalah optimasi yang di dalamnya terdapat fungsi tujuan/ objektif dan fungsi kendala. Biasanya pemrograman matematika berbentuk

Optimumkan (Maksimumkan/ Minimumkan): $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

dengan kendala: $$\left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{matrix}\right.$$

Adapun fungsi kendala yang disebut fungsi kendala tak negatif, yaitu $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

1.1 Program Linear Bilangan Bulat (Integer Linear Programming)

ILP pada intinya berkaitan dengan program-program linear di mana beberapa atau semua variabel memiliki nilai- nilai integer atau diskrit. Sebuah *ILP* dikatakan bersifat campuran dan murni bergantung pada apakah beberapa atau semua variabel tersebut dibatasi pada nilai-nilai integer dalam Taha (1993).

Misalnya, jika Sebuah perusahaan jasa pengantar barang merakit 3 jenis senter. Senter jenis A, senter jenis B, dan senter jenis C. Senter jenis A dirakit dengan membutuhkan waktu 15 menit, jenis B selama 4 menit dan jenis C selama 12 menit. Waktu pengerjaan yang tersedia tiap minggunya selama 2800 menit. Senter jenis A membutuhkan besi seberat 150 g, senter jenis B membutuhkan besi seberat 100 gram, dan senter jenis C membutuhkan besi seberat 80 g. Jumlah besi yang dapat disediakan oleh perusahaan hanya 60000 gram tiap minggunya. Untuk senter jenis A membutuhkan aluminium seberat 10 g, senter B membutuhkan aluminium seberat 80 g, dan senter C seberat 90 g. Jumlah aluminium yang dapat disediakan oleh perusahaan tiap minggunya mencapai 12000 gram. Jika keuntungan bersih yang diperoleh dari hasil penjualan senter A, senter B, senter C berturut-turut sebesar 5000, 5000, 24000. Akan menghasilkan solusi $X_1 = 87{,}804878$ $X_3 = 123{,}57724$ $Z = 3404{,}878$. Apabila kita mengambil solusi ini maka kita akan memproduksi 87,804878 Senter A dan 123,57724 senter C. Maka masalah ini termasuk masalah *Integer Linear Programming*.

1.2 Metode Branch and Bound

Suatu program bilangan bulat adalah program linear dengan tambahan syarat bahwa semua atau sebagian variabelnya haruslah bilangan bulat. Meskipun demikian, pendekatan pertama untuk beberapa kasus program bilangan bulat mugkin dapat diperoleh dengan mengabaikan syarat bilangan bulatnya dan menyelesaikan program linear dengan satu dari beberapa metode yang bisa digunakan (Bronson, 1996: 54).

Dalam LP, metode simpleks didasari oleh pengenalan bahwa pemecahan optimum terjadi di titik ekstrim dari ruang pemecahan. Sebaliknya *ILP* memulai dengan sejumlah titik pemecahan yang terbatas (dengan asumsi *ILP* murni yang dibatasi). Tetapi sifat variabel yang berbentuk bilangan bulat mempersulit perancangan sebuah algoritma yang efektif untuk mencari secara langsung di antara titik integer yang layak dari ruang pemecahan. Mengingat kesuitan ini, para peneliti telah mengembangkan sebuah prosedur pemecahan yang didasari oleh pemanfaatan keberhasilan besar dalam memecahkan masalah LP. Strategi untuk prosedur ini dapat diringkaskan dalam tiga langkah:

1. Melonggarkan ruang pemecahan dari masalah integer yang bersangkutan dengan mengabaikan batasan integer sama sekali. Langkah ini mengonversikan dari *ILP* menjadi LP.

2. Memecahkan model LP yang longgar yang dihasilkan dan mengidentifikasi titik optimum dari LP itu.
3. Dengan dimulai dari titik optimum kontinyu, menambahkan batasan khusus yang akan secara berulang-ulang memaksa titik ekstrim optimum dari model LP yang dihasilkan untuk bergerak ke suatu batasan integer yang diinginkan (Taha, 1993:325).

Metode Branch and Bound memiliki 2 komponen utama, yaitu:
1. Branching, jika pendekatan pertama variabelnya bukan sebuah bilangan bulat sebut saja ${x_j}^*$, maka $i_1 < {x_j}^* < i_2$ dimana i_1 dan i_2 adalah bilangan bulat tak negatif. Dua program bilangan bulat yang baru menambah *ILP* yang lama dengan kendala $x_j \leq i_1$ atau dengan kendala $x_j \geq i_2$. Proses ini dikatakan *branching.*
2. Bounding, mengasumsikan bahwa fungsi tujuannya adalah kasus memaksimumkan. Branching dilanjutkan sampai menemukan solusi untuk pendekatan pertama. Nilai fungsi tujuan untuk pendekatan pertama adalah *lower bound* untuk masalah tersebut dan semua program hasil percabangan yang variabelnya bulat atau tidak, nilai fungsi tujuannya pasti lebih kecil daripada *lower bound*. Jika dalam prosesnya fungsi tujuannya lebih besar daripada *lower bound* maka nilai fungsi tujuan tersebut menjadi *lower bound* yang baru. Maka *lower bound* yang lama diganti dengan *lower bound* yang baru.

Jika fungsi objektif adalah kasus meminimumkan prosedurnya hampir sama tapi bukan lagi *lower bound* yang digunakan melainkan *upper bound*. Nilai fungsi tujuan untuk pendekatan pertama adalah *upper bound* dan sub problem dieliminasi apabila nilai fungsi tujuannya lebih besar daripada *upper bound* dalam Bronson (1996)

Misalkan diperoleh titik optimum A. Maka metode ini didasarkan pada konsep bilangan bulat terbesar $[\![A]\!]$ dimana $A \notin Z^+$. Maka metode ini menguji $[\![A]\!]$ yang lebih kecil dari titik optimum dan bilangan bulat $[\![A]\!] + 1$. Sehingga daerah antara $[\![A]\!] < A < [\![A]\!] + 1$ dihilangkan akibatnya sistem terbagi menjadi 2 daerah. Hal inilah yang mengakibatkan terjadinya percabangan (*Branching*).

2. METODE PENELITIAN

2.1 Tahapan Penelitan

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

Tabel 1 Tahapan Penelitian

No.	Tahapan Penelitian	Keterangan
1	Mengumpulkan data	Pengumpulan data dilakukan dengan wawancara langsung dengan pemilik Sipatuo Aluminium
2	Menyusun model matematika	Setelah mengumpulkan data, akan dilakukan pendefinisian variabel, dilanjutkan dengan penyusunan fungsi optimasi atau fungsi tujuan dan fungsi kendala
3	Menyelesaikan masalah	Menyelesaikan masalah optimasi dengan fungsi kendala yang ada, sehingga diperoleh hasil yang optimal.

2.2 Lokasi Penelitian

Penelitian akan dilakukan di Sipatuo Aluminium yang ada di lingkungan Kampung Baru, Kelurahan Labuang Utara, Kecamatan Banggae Timur, Kabupaten Majene.

2.3 Peubah yang diamati/ diukur

Peubah yang akan diamati/ diukur adalah bahan-bahan dan biaya yang digunakan untuk pembuatan berbagai model lemari aluminium. Semua variabel yang berpengaruh terhadap biaya pembuatan lemari akan digunakan pada saat membuat model matematika dan menghasilkan solusi optimum.

2.4 Teknik Pengumpulan dan Analisis Data

Dilakukan wawancara langsung kepada pemilik usaha Sipatuo Aluminium. Data yang diperoleh akan diterjemahkan dalam model matematika dan ditentukan nilai optimumnya.

2.5 Metode Branch and Bound

Langkah-langkah menyelesaikan masalah meminimumkan kasus *integer* murni adalah sebagai berikut:

Menyelesaikan kasus *ILP* dengan menganggap kasus tersebut seperti kasus *LP*. Dalam menentukan solusi *LP* sebaiknya menggunakan metode simpleks.

1. Apabila solusi optimal telah diperoleh dan semua variabelnya bilangan bulat, maka solusi *LP* tersebut menjadi solusi optimal *ILP*. Tetapi apabila sebagian atau semua variabel bukan bilangan bulat, maka dipilih salah satu variabel untuk dilakukan percabangan (*Branching)* sehingga diperoleh 2 submasalah *ILP*.
2. Menyelesaikan kedua masalah tersebut seperti langkah pertama dan menentukan *Lower Bound (Bounding).Lower Bound* adalah solusi submasalah yang memiliki nilai terendah.
3. Apabila submasalah yang solusinya menjadi *Lower Bound* belum memenuhi syarat *integer*, maka kita melakukan proses proses percabangan dan menyelesaikan submasalah tersebut seperti langkah ketiga.

2.6 LINDO

LINDO adalah salah satu program riset operasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah riset operasi. Kelebihan program ini adalah cukup mudah digunakan meskipun kasusnya cukup besar. Selain itu, tampilannya yang baik dibandingkan dengan program lainnya. Oleh sebab itu, peneliti akan menggunakan program LINDO dalam menyelesaikan masalah meminimumkan biaya produksi pada Sipatuo Aluminium. Selanjutnya produk tersebut didefinisikan dalam variabel:

X_1 = Lemari pakaian
X_2 = Lemari tempat piring
X_3 = Lemari sepatu
X_4 = Lemari jualan
X_5 = Lemari P3K

Selanjutnya, diperoleh fungsi tujuan:

Meminimumkan:

$2.829.000\ X_1 + 3.104.000\ X_2 + 1.230.000\ X_3 + 1.399.500\ X_4 + 266.250\ X_5$

Dengan fungsi kendala sebagai berikut:

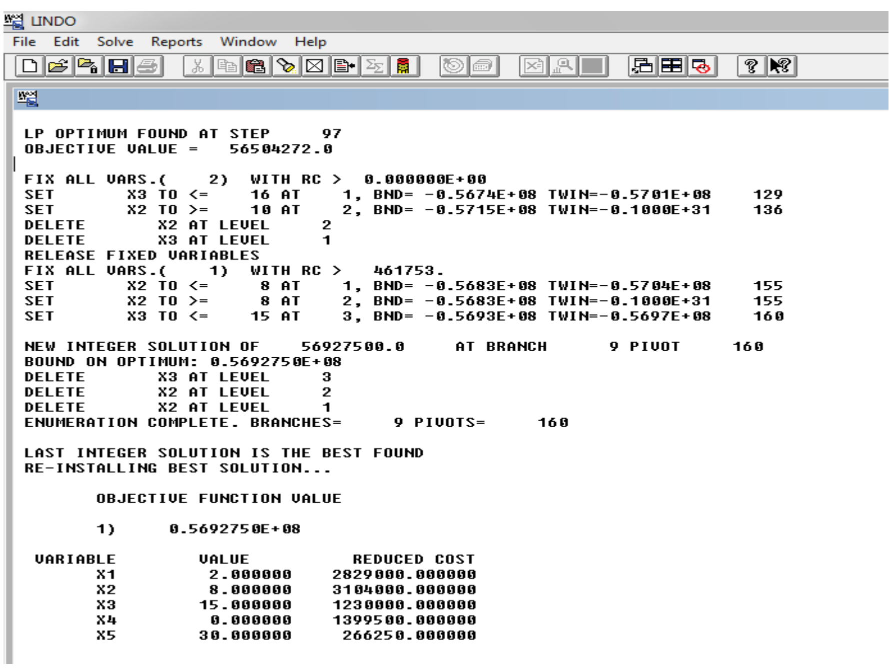
$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 0,5X_5 \geq 75$

$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \geq 60$

$1{,}5X_1 + 2X_2 + 0{,}4X_3 \geq 25$
$X_1 + X_2 + 0{,}4X_3 + 1{,}2X_5 \geq 50$
$5X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 \geq 70$
$120X_1 + 120X_2 + 1X_3 + 2X_4 + X_5 \geq 300$
$4X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 4X_4 \geq 70$
$X_1 + 2X_2 + 0{,}3X_3 + 0{,}3X_4 + 0{,}15X_5 \geq 20$
$3X_1 + 3X_2 + 1{,}5X_3 + 0{,}5X_5 \geq 65$
$X_1 + X_2 + 0{,}25X_5 \geq 15$
$6X_1 + 6X_2 + 2X_3 + 0{,}5X_5 \geq 75$
$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_5 \geq 70$
$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_4 + X_5 \geq 80$
$30X_1 + 30X_2 + 25X_3 + 25X_4 + 15X_5 \geq 180$
$25X_1 + 25X_2 + 20X_3 + 20X_4 + 10X_5 \geq 170$
$X_1 + X_2 + 0{,}75X_3 + 0{,}5X_4 + 0{,}3X_5 \geq 50$
$0{,}5X_1 + 0{,}5X_2 + 0{,}75X_3 + 0{,}75X_4 + 0{,}75X_5 \geq 20$
$4{,}5X_1 + 4{,}5X_2 + 1{,}5X_3 + 4{,}5X_4 + 0{,}5X_5 \geq 75$
$4X_1 + 4X_2 + 4X_3 + 6X_4 \geq 80$
$5X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 5X_4 \geq 75$
$6X_1 + 6X_2 + 3X_3 \geq 65$
$4X_4 + 2X_5 \geq 40$
$3X_2 \geq 10$
$25X_2 \geq 45$
X_1, X_2, X_3, X_4, dan $X_5 \geq 0$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diperoleh output sebagai berikut dengan menggunakan program LINDO



```
ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 1)          0.000000        0.000000
 2)         24.000000        0.000000
 3)          0.000000        0.000000
 4)          2.000001        0.000000
 5)         10.000000        0.000000
 6)        945.000000        0.000000
 7)          8.000000        0.000000
 8)          7.000000        0.000000
 9)          2.500000        0.000000
10)          2.500000        0.000000
11)         30.000000        0.000000
12)         44.000000        0.000000
13)         34.000000        0.000000
14)        945.000000        0.000000
15)        680.000000        0.000000
16)          2.000000        0.000000
17)          8.000000        0.000000
18)         15.000000        0.000000
19)          0.000000        0.000000
20)         30.000000        0.000000

NO. ITERATIONS=      161
BRANCHES=    9 DETERM.=   1.000E    0
```

Dari output di atas, diperoleh solusi optimum $X_1 = 2$, $X_2 = 8$, $X_3 = 15$, $X_4 = 0$, dan $X_5 = 30$. Artinya untuk meminimalkan biaya produksi pada Sipatuo Aluminium maka sebaiknya memproduksi lemari pakaian sebanyak 2, lemari tempat piring sebanyak 8, lemari sepatu sebanyak 15, lemari P3K sebanyak 30, dan tidak memproduksi lemari jualan. Dengan solusi tersebut diperoleh biaya minimum sebesar Rp 56.927.500,-.

4. KESIMPULAN

Metode *Branch and Bound* adalah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah *ILP* yang mengharuskan seluruh variabelnya merupakan bilangan bulat. Adapun langkah-langkah menyelesaikan masalah meminimumkan kasus *integer* murni adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan kasus *ILP* dengan menganggap kasus tersebut seperti kasus *LP*. Dalam menentukan solusi *LP* sebaiknya menggunakan metode simpleks.
2. Apabila solusi optimal telah diperoleh dan semua variabelnya bilangan bulat, maka solusi *LP* tersebut menjadi solusi optimal *ILP*. Tetapi apabila sebagian atau semua variabel bukan bilangan bulat, maka dipilih salah satu variabel untuk dilakukan percabangan (*Branching)* sehingga diperoleh 2 submasalah *ILP.*
3. Menyelesaikan kedua masalah tersebut seperti langkah pertama dan menentukan *Lower Bound (Bounding).Lower Bound* adalah solusi submasalah yang memiliki nilai terendah.
4. Apabila submasalah yang solusinya menjadi *Lower Bound* belum memenuhi syarat *integer*, maka kita melakukan proses proses percabangan dan menyelesaikan submasalah tersebut seperti langkah ketiga.

Berdasakan hasil penelitian, diperoleh bahwa untuk meminimumkan biaya produksi Sipatuo Aluminium, maka sebaiknya memproduksi lemari pakaian sebanyak 2, lemari tempat piring sebanyak 8, lemari sepatu sebanyak 15, lemari P3K sebanyak 30, dan tidak memproduksi lemari jualan.

DAFTAR PUSTAKA

A.K. Ojha dan Rashmi Ranjan Ota. 2014. Multi-objective geometric programming problem with Karush-Kuhn-Tucker condition using Iu-constraint method. *RAIRO - Operations Research*. 48(4):429-453.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. (2014) *Matematika*: MA/MA/SMK/MAK Kelas XI Semester 1. Edisi Revisi. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan,

Luenberger, D.G. and Yinyu Ye. 2008. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, USA.

Susanta B. 1994. *Program Linear.* Yogyakarta.

Taha, Hamdy A. 2007. *Operations Research: An Introduction Eighth Edition*. Prentice-Hall International Inc, New Jersey.