TEOREMA PALEY-WIENER-SCHWARTZ PADA DOMAIN NON KONVEKS

Cynthia Tri Octavianti

FKIP Universitas Wisnu Wardhana

Cynthiaocta3@gmail.com

Abstrak

Teorema Paley-Wiener adalah sebuah teorema yang berkaitan dengan transformasi Fourier dari fungsi analitik yang mempunyai turunan parsial hingga tak berhingga kali. Teorema ini telah di generalisasi menjadi teorema Paley-Wiener-Schwartz dengan mengkarakterisasi fungsi tes Schwartz dan distribusi dengan kompak support. Biasanya teorema ini bekerja pada domain yang kompak dan konveks. Sehingga akan dibahas Teorema Paley-Wiener-Schwartz yang digeneralisasi oleh barisan bilangan dan polinomial yang dapat bekerja pada domain non konveks.

Kata kunci: *Teorema Paley-Wiener, Teorema Paley-Wiener-Schwartz, domain non konveks.*

PENDAHULUAN

Dalam matematika teorema Paley-Wiener merupakan teorema yang berhubungan dengan Transformasi Fourier dari fungsi analitik yang mempunyai derivatif parsial yang kontinu sampai tak hingga kali. Nama Paley-Wiener dalam teorema Paley-Wiener digunakan untuk penghargaan terhadap pendahulunya yaitu Raymond Paley (1907-1933) dan Norbert Wiener (1894-1964) (Wikipedia, 2013). Kemudian Laurent Schwartz menggunakan bahasa distribusi untuk fungsional linear kontinu. Konsep derivative untuk semua fungsi terintegral digunakan untuk merumuskan solusi umum dari persamaan diferensial parsial (Debnath, 1999 dan Cheney, 2001).

Teorema Paley-Wiener selanjutnya digeneralisasi menjadi teorema Paley-Wiener-Schwartz yang bekerja pada domain yang kompak dan konveks (Royden, 1968 dan Wheeden, 1977). Teorema Paley-Wiener-Schwartz diperoleh yaitu dengan mengkarakterisasi fungsi tes Schwartz dan distribusi dengan support kompak (Stakgold, 1979).

Dengan mengacu pada Bang (1996)

dengan menggunakan himpunan yang dibangkitkan oleh barisan bilangan dan himpunan yang dibangkitkan oleh polinomial yang dapat non konveks akan diteliti teorema Paley-Wiener-Schwartz pada domain non konveks.

Pembahasan

1. **Teorema Paley-Wiener-Schwartz pada Himpunan Kompak.**

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berkaitan

Definisi 1.1. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dan* $x \in \mathbb{R}^n$. *Jarak dari titik ke himpunan A dinotasikan dengan*

$d(x,A) = inf\{\|x-y\| : y \in A\}$.

Selanjutnya untuk $\delta > 0$,

didefinisikan himpunan $K_{(\delta)}$ sebagai berikut

$K_{(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) < \delta\}$.

Himpunan $K_{(\delta)}$ dikenal sebagai persekitaran-δ untuk himpunan K.

Definisi 1.2. *Diberikan* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompak dan* $\lambda > 0$. *Didefinisikan himpunan* K_λ *yaitu*

$K_\lambda = \{z = x + y : x \in K, y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq \lambda\}$.

Selanjutnya diberikan Teorema Paley-Wiener-Schwartz pada himpunan kompak.

Teorema 1.3. *Diberikan himpunan* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompak. Jika* $u \in \mathcal{E}'(K)$ *maka terdapat bilangan bulat non negatif* N *sedemikian hingga untuk setiap* $\delta > 0$ *terdapat konstanta* $0 < C_\delta < \infty$ *dan*

$$|P(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_\delta(1+|\eta|)^N \sup_{x\in K_{(\delta)}} |P(z)| |P(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_\delta(1+|\eta|)^N \sup_{x\in K_{(\delta)}} |P(z)|.$$

Untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}^n$ *dan setiap polinomial* $P(\xi)$.

Sebaliknya, untuk setiap fungsi $\hat{u}(\eta)$ dalam $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi pertidaksamaan di atas adalah transformasi Fourier dari distribusi dengan support termuat dalam K.

Bukti. Diketahui $u \in \mathcal{E}'(K)$, terdapat $C > 0$ dan bilangan bulat N sehingga

$|u,\varphi| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{\xi\in K} |\partial^\alpha \varphi(\xi)|$.

Dibentuk distribusi orde N dan untuk sebarang $\delta > 0$, dibentuk $\psi_\delta \in C_c^\infty\left(K_{\frac{\delta}{2}}\right)$ dengan

$$\psi_\delta = \begin{cases} 1, & z \in K_{\frac{\delta}{4}} \\ 0, & z \in K_{\frac{\delta}{2}} - K_{\frac{\delta}{4}}. \end{cases}$$

Menurut formula Leibniz diperoleh

$$|P(-D)\hat{u}(\eta)| = C \max_{\alpha\leq N} \sup_{K_{\frac{\delta}{2}}} \left|D^\alpha\left(\psi_\delta(\xi)P(\xi)e^{-i\eta\xi}\right)\right|$$

$$\leq C_{\frac{\delta}{4}} \max_{|\beta|\leq N} \sup_{K_{\frac{\delta}{4}}} \left|D^\beta\left(P(\xi)e^{-i\eta\xi}\right)\right|.$$

Untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}^n$ dan setiap polynomial P, $\mathcal{E}'(K) \subset S'(K)$ diperoleh

$$|P(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_{\frac{\delta}{4}}(1+|\eta|)^N \sup_{x\in K_{\frac{\delta}{4}}} |P(z)|$$

Selanjutnya, karena $\psi_\delta \in C_c^\infty\left(K_{\delta/2}\right)$ dapat diambil modulus maksimum pada $K_{(\delta)}$, sehingga diperoleh

Sebaliknya diketahui $\hat{u} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ memenuhi pertidaksamaan $|P(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_{\delta}(1+|\eta|)^{N} \sup_{x \in K_{(\delta)}} |P(z)|$, diperoleh $\hat{u}(\eta) \in S'$ dan $u(\xi) \in S'$. Akan ditunjukkan $u(\xi) \in \mathcal{E}'$. Andaikan tidak berlaku, sehingga terdapat $\theta \in supp\ u$, dengan $\theta \notin K$. Diberikan polinomial $P(\xi)$ sedemikian sehingga

$$|P(\theta)| > \sup_{K} |P(\xi)|.$$

Untuk $\epsilon > 0$ yang cukup kecil, diperoleh $B(\theta,\epsilon) \cap K = \emptyset$. Pilih $t^{\circ} \in B(\theta, {}^{\epsilon}/_{3})$, $t^{\circ} \neq \theta$ dan bentuk

$$g(\xi) = \frac{1}{|\xi - t^{\circ}|},$$

Sehinggadiperoleh $g(\xi) \in C(K \cup \{\theta\})$. Menurut teorema Weierstrass diperoleh polinomial $P(\xi)$ sehingga

$$|g(\xi) - P(\xi)| < \frac{1}{2\epsilon}, \forall \xi \in K \cup \{\theta\}.$$

Dipilih

$$\sup_{K} |g(\xi)| \leq \frac{3}{2\epsilon}, g(\theta) > \frac{3}{\epsilon},$$

Sehinggadiperoleh

$$\frac{1}{2\epsilon} > |g(\theta) - P(\theta)| \geq g(\theta) - |P(\theta)|$$
$$> \frac{3}{\epsilon} - |P(\theta)|$$

dan

$$|P(\theta)| \geq \frac{1}{2\epsilon} + \sup_{K} |P(\xi)|.$$

Asumsikanbahwa $P(\theta) > 0$, terdapat bilangan $\epsilon, \delta > 0$ berlaku

$$|P(\theta)| - 2\epsilon > \sup_{K_{(\delta)}} |P(z)|.$$

Menurut yang diketahui, untuksemua $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ dan $m \geq 1$ berlaku

$$C_{\delta} \sup_{z \in K_{(\delta)}} |P(z)|^{m} \|\hat{\varphi}(\eta)(1+|\eta|)^{N}\|_{1}$$
$$\geq \|\hat{\varphi}(\eta) P^{m}(-D)\hat{u}(\eta)\|_{1}$$
$$\geq |\langle P^{m}(-D)\hat{u}(\eta), \hat{\varphi}(\eta)\rangle|$$
$$= |\langle P^{m}(\xi)u(\xi), \varphi(-\xi)\rangle|.$$

Dipilih domain $G \subset \mathbb{R}^n$, G*smooth boundary*, sehingga $\theta \in G$ dan $|P(\xi)| > P(\theta) - \epsilon, \xi \in G$.

Selanjutnya dipilih fungsi $v(\xi) \in C_0^{\infty}(G\_)$ sehingga $\theta \in supp\ v(-\xi)u(\xi)$.

Dengan mensubstitusi $\varphi(\xi)$ dengan $v(\xi)u(\xi)$, untuk semua $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ diperoleh

$$C_{\delta} \sup_{z \in K_{(\delta)}} |P(z)|^{m} \|\hat{v} * \hat{\varphi}(\eta)(1+|\eta|)^{N}\|_{1}$$
$$\geq |\langle P^{m}(\xi)u(\xi), v(-\xi)\varphi(-\xi)\rangle|$$
$$= |\langle v(-\xi)u(\xi), P^{m}(\xi)\varphi(-\xi)\rangle|.$$

Distribusi $v(-\xi)u(\xi)$ mempunyai *support* kompak di G, sehingga

$$v(-\xi)u(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq s} D^{\alpha} h_{\alpha}(\xi).$$

dengan s bilangan bulat non negatif dan $h_{\alpha}(\xi)$ fungsi kontinu.

Asumsikan $s \geq N + n + 1$ dan diberikan $z(\xi) \in W_{s,2}^{0}(G)$ yang merupakan solusi dari masalah Dirichlet untuk persamaan eliptik

$$L_{2s}z(\xi) = \sum_{|\alpha|\le s} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(D^{\alpha}z(\xi))$$
$$= v(-\xi)u(\xi).$$

Sehingga

$$C_{\delta} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^m \|\hat{v} * \hat{\varphi}(\eta)(1+|\eta|)^N\|_1$$
$$\|\hat{v} * \hat{\varphi}(\eta)(1+|\eta|)^N\|_1$$
$$\ge |\langle z(\xi), L_{2s}(P^m(\xi)\varphi(-\xi))\rangle|.$$

Ambil $\varphi_0(\xi) \in W^0_{s,2}(G\_)$ yang merupakan solusi dari persamaan $L_{2s}\varphi_0(-\xi) = \overline{z(\xi)}$, diperoleh

$$L_{2s}(P^m(\xi)\varphi(-\xi)) = (P(\theta)-2\epsilon)^m\overline{z(\xi)}$$

dengan

$$\varphi_m(-\xi) = (P(\theta)-2\epsilon)^m P^m(\xi)\varphi_0(-\xi)$$
$$m \ge 1.$$

Telah diketahui bahwa G *smooth boundary* sehingga $P(\xi) \ne 0, \forall\xi \in G$. Dengan menggabungkan dengan pertidaksamaan sebelumnya diperoleh

$$C_{\delta} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^m \|\hat{v} * \hat{\varphi}(\eta)(1+|\eta|)^N\|_1$$
$$\ge (P(\theta)-2\epsilon)^m\langle z(\xi), \overline{z(\xi)}\rangle, m \ge 1.$$

Asumsikan bahwa

$$\|\hat{v} * \widehat{\varphi_m}(\eta)(1+|\eta|)^N\|_1 \le C, m \ge s.$$

Untuk $|\beta| \le s$ dan $m \ge 1$, diperoleh

$$\left|\eta^{\beta}\hat{v} * \widehat{\varphi_m}(\eta)\right| \le C_s(P(\theta)-2\epsilon)^m(P(\theta)-\epsilon)^{-m+s}C_1,$$

dengan

$$C_1 = \sup\left\{\int_{G_-}|j|d\xi : \alpha^1+\cdots+\alpha^{|v|} = v,\ v \le \beta, |\beta| \le s\right\}$$

dan

$$j = D^{\beta-v}(v(\xi)\varphi_0(\xi))D^{\alpha^1}P^{-1}(-\xi)\ldots$$
$$D^{\alpha^{|v|}}P^{-1}(-\xi).$$

Selanjutnya diketahui

$$\lim_{m\to\infty}(P(\theta)-2\epsilon)^m(P(\theta)-\epsilon)^{-m+s} = 0,$$

diperoleh

$$\left|\eta^{\beta}\hat{v} * \widehat{\varphi_m}(\eta)\right| \le C_2(s,\epsilon), |\beta| \le s, m \ge s$$

dengan $s \ge N+n+1$ dan

$$CC_{\delta} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^m \ge (P(\theta)-2\epsilon)^m\langle z(\xi), \overline{z(\xi)}\rangle, \forall m \ge s.$$

Jadi kontradiksi, sehingga untuk setiap fungsi $\hat{u}(\eta)$ dalam $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi

$$|P(-D)\hat{u}(\eta)| \le C_{\delta}(1+|\eta|)^N \sup_{x\in K_{(\delta)}} |P(z)|$$

Adalah transformasi Fourier dari distribusi dengan *support* termuat dalam K.■

Selanjutnya untuk himpunan kompak didefinisikan

$$C_c^{\infty}(K) = \{u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) : supp\ u \subset K\}$$

Teorema 1.4. *Diberikan sebarang himpunan $K \subset \mathbb{R}^n$ kompak. Fungsi $u \in C_c^{\infty}(K)$ jika dan hanya jika untuk setiap $N, \delta > 0$ terdapat konstanta $C_{N,\delta}$ sedemikian hingga*

$$|P(-D)\hat{u}(\eta)| \le C_{N,\delta}(1+|\eta|)^{-N} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|$$

Untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}^n$ dan setiap polynomial $P(\xi)$.

Bukti. Diketahui $u \in C_c^{\infty}(K)$, diambil sebarang $N, \delta > 0$.

Perhatikan bahwa

$$\left|\eta^{\beta}P(D)\hat{u}(\eta)\right| = \left|\int_{supp\ u} e^{-i\eta\xi}D^{\beta}(P(\xi)u(\xi))d\xi\right|$$

Untuk setiap polinomial $P(\xi)$ dan $\beta \ge 0$ dan

formula Leibniz diperoleh konstanta C_N sehingga
$|P(D)\hat{u}(\eta)| = C_{N,\delta}(1+|\eta|)^{-N} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|$
Untuk setiap $P(\xi)$.
Sebaliknya, diketahui pertidaksamaan
$|P(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_{N,\delta}(1+|\eta|)^{-N} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|$
diperoleh $u \in S$, sehingga dengan cara yang sama dengan pembuktian Teorema 1.3 diperoleh $u \in C_c^{\infty}(K)$. ■

2. Himpunan yang Dibangkitkan oleh Barisan Bilangan.

Berikut diberikan Definisi dan Lemma yang berkaitan.

Definisi 2.1.*Diberikan bilangan* $\lambda_\alpha = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Himpunan $G\{\lambda_\alpha\}$ didefinisikan sebagai
$G\{\lambda_\alpha\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha, \alpha \geq 0\}$
$= \bigcap_{\alpha\geq 0}\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha\}$.

Lemma 2.2 *Untuk setiap* $0 \leq \lambda_\alpha \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *berlaku*
$G\{\lambda_\alpha\} = \bigcap_{\alpha\geq 0}\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha\}$.

Lemma 2.3 *Diberikan* $0 \leq \lambda_\alpha \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. *Himpunan* $G\{\lambda_\alpha\}$ *merupakan himpunan tertutup di* $\mathbb{R}^n$.

Akibat 2.4 *Himpunan* $G\{\lambda_\alpha\} = \bigcap_{\alpha\geq 0}\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi^\alpha| \leq \lambda_\alpha\}$. *tertutup*.

Lemma 2.5 Diketahui
Jika $\xi \in G\{\lambda_\alpha\}$dan $|r_j| \leq 1, j = 1, \ldots, n$
maka $G\{\lambda_\alpha\} = G\left\{\sup_{\xi\in G\{\lambda_\alpha\}} |\xi^\alpha|\right\}$.

Lemma 2.6*Himpunan* $G\{\lambda_\alpha\}$ *kompak* jika $\lambda_\alpha < \infty$, $\forall\alpha \geq 0$, *maka* $G\{\lambda_\alpha\}$ *kompak*.

Lemma 2.7 *Himpunan dapat non konveks*.

Definisi 2.8 *Diberikan* $K \subset \mathbb{R}^n$

(i) *Himpunan* $g(K)$*disebut g-hull dari* K,

(ii) *Himpunan mempunyai g-property jika.* $= g(K)$.

Diperhatikan setiap himpunan yang dibangkitkan oleh barisan bilangan $G\{\lambda_\alpha\}$ mempunyai *g-property*.

Lemma 2.9 *Diberikan* I *himpunan indeks dan* $K_i = g(K_i)$, $i \in I$ *maka* $\bigcap_{i\in I} K_i$ *juga mempunyai g-property*.

Lemma 2.10 *Setiap himpunan simetrik yang kompak dan konveks mempunyai sifat-g*.

Berikut diberikan teorema Paley-Wiener-Schwartz padahimpunan yang dibangkitkan oleh barisan bilangan.

Teorema 2.11 *Diketahui himpunan* K *kompak dan mempunyai g-property.* $u \in \mathcal{E}'(K)$ *jika dan hanya jika* $\hat{u} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *dan terdapat bilangan asli* N *sedemikian hingga untuk setiap* $\delta > 0$ *terdapat konstanta* C_δ *dengan*
$|D^\alpha \hat{u}(\eta)| \leq C_\delta(1+|\eta|)^N \sup_{K_\delta}|\xi^\alpha|$,
$\forall\eta \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0$.

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktianTeorema 1.3. ■

Teorema 2.12 *Diberikan himpunan*

K *kompak dan mempunyai g-property. Fungsi* $u \in C_c^\infty(K)$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $N, \delta > 0$ *terdapat konstanta* $C_{N,\delta}$ *sehingga berlaku*

$$|D^\alpha \hat{u}(\eta)| \leq C_{N,\delta}(1+|\eta|)^{-N} \sup_{K_\delta} |\xi^\alpha|,$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0.$

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktian Teorema 1.4. ■

3. Himpunan yang Dibangkitkan Oleh Polinomial.

Berikut diberikan definisi dan teorema yang berkaitan.

Definisi 3.1 *Diberikan* P *polinomial berderajat kurang dari dua atau sama dengan* m. *Himpunan*

$$Q(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |P(\xi)| \leq 1\}$$

disebut himpunan yang dibangkitkan oleh P.

Himpunan $Q(P)$ dapat non konveks dan non kompak, pada pembahasan ini selalu diasumsikan himpunan kompak dan $Q(P) \neq \emptyset$.

Selanjutnya diberikan teorema Paley-Wiener-schwartz untuk himpunan yang dibangkitkan oleh polinomial.

Teorema 3.2 *Diberikan* P *polinomial dan* $Q(P)$ *himpunan kompak. Jika* $u \in \mathcal{E}'(Q(P))$ *maka terdapat bilangan* $N \geq 0$ *sehingga untuk setiap* $\delta > 0$ *terdapat konstanta* $C_\delta < \infty$ *dan*

$$|P^m(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_\delta(1+|\eta|)^N(1+\delta)^m, \quad m \geq 0, \eta \in \mathbb{R}^n$$

Sebaliknya setiap fungsi $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *memenuhi*

$$|P^m(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_\delta(1+|\eta|)^N(1+\delta)^m, \quad m \geq 0, \eta \in \mathbb{R}^n$$

merupakan transformasi Fourier dari distribusi dengan support u *termuat dalam* $Q(P)$.

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktian Teorema 1.3. ■

Definisi 3.3 *Diberikan* P *polinomial berderajat kurang atau sama dengan* m. Dibentuk

$$S(Q(P)) = \{\varphi \in S : supp\ \varphi \subset Q(P)\}$$

Merupakan himpunan tak terbatas yang dibangun oleh $Q(P)$.

Teorema 3.4 *Diberikan* $u \in S$. *Fungsi* $u \in C_c^\infty(Q(P))$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $N \geq 0$ *terdapat konstanta* C_N *sehingga*

$$|P^m(-D)\hat{u}(\eta)| \leq C_N(1+|\eta|)^{-N}$$

Untuk setiap $\eta \in \mathbb{R}^n$ *dan setiap* $m \geq 0$.

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktian Teorema 1.4. ■

4. HimpunanKonveks-d

Diberikan himpunan $K \subset \mathbb{R}^n$ kompak dan $1 \leq d \leq m$ dengan $m, d \in \mathbb{N}$. Selanjutnya dinotasikan $\mathcal{P}_d$ merupakan koleksi himpunan polinomial bernilai real berderajat d pada himpunan kompak K.

Definisi 4.1 *Diketahui himpunan* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompak. Didefinisikan himpunan konveks-d hull (d-convex hull) yaitu*

$$ch_d(K) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |P(\xi)| \le \sup_{t\in K}|P(t)|, \forall P \in \mathcal{P}_d\right\}$$

Yang dinotasikan dengan $ch_d(K)$.

Definisi 4.2 *Himpunan kompak* K *disebut konveks-d jika* $K = ch_d(K)$.

Lemma 4.3 *Untuk setiap himpunan kompak* $K \subset \mathbb{R}^n$ *berlaku*

$ch_1(K) \supset ch_2(K) \supset \cdots \supset K$.

Lemma 4.4 *Diberikan* I *keluarga indeks dan* $d \ge 1$. *Jika* K_i *konveks-d untuksetiap* $i \in I$ *maka* $\bigcap_{i\in I} K_i$ *konveks-d.*

Lemma 4.5 *Jika himpunan* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompak dan konveks maka* $ch_d(K) = K$ *untuk setiap* $d \ge 1$.

Definisi 4.6 *Diketahui himpunan* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompak. Dinotasikan* $ch(K)$ *merupakan himpunan konveks-hull tertutup dari* K.

Lemma 4.7 *Diketahui himpunan kompak, maka .*

Berikut diberikan teorema Paley-Wiener-Schwartz padahimpunan yang konveks-d.

Teorema 4.8 *Diberikan himpunan kompak yang konveks-d. Jika maka untuk setiap terdapat bilangan sehingga*

$$|P^k(-D)\hat{u}(\eta)| \le C_\delta(1+|\eta|)^N \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^k$$

Untuk setiap $k \ge 0$, $P(\xi) \in \mathcal{P}_d$ dan $\eta \in \mathbb{R}^n$,

Sebaliknya jika

$$|P^k(-D)\hat{u}(\eta)| \le C_\delta(1+|\eta|)^N \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^k$$

Dipenuhi untuk $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ maka transformasi Fourier dari distribusinya berada di $\mathcal{E}'(K)$.

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktian Teorema 1.3. ∎

Teorema 4.9 *Diberikan himpunan kompak* K *yang konveks-d.* $u \in C_c^\infty(K)$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $N, \delta > 0$ *terdapat konstanta* $C_{N,\delta}$ *sehingga*

$$|P^k(-D)\hat{u}(\eta)| \le C_{N,\delta}(1+|\eta|)^{-N} \sup_{z\in K_{(\delta)}} |P(z)|^k$$

Untuk setiap $P(\xi) \in \mathcal{P}_d$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ dan setiap $k \ge 0$.

Bukti. Dengan langkah yang sama dengan pembuktian Teorema 1.4. ∎

Kesimpulan.

Teorema Paley-Wiener_schwartz pada umumnya berada dalam domain kompak dan konveks, dengan menggunakan himpunan yang dibangkitkan oleh barisan bilangan maka domainnya dapat non konveks, yang diperoleh pada PembuktianTeorema 2.11 dan Teorema 2.12. Selanjutnya didefinisikan Teorema Paley-Wiener-schwartz pada himpunan yang dibangkitkan oleh polinomial yang diperoleh pada pembuktian Teorema3.2 dan Teorema 3.4. Teorema Paley-Wiener-schwartz pada himpunan konveks-d diperoleh pembuktianTeorema 4.8 dan Teorema 4.9.

DaftarPustaka

Bang, H. H., 1996, The Paley-Wiener-Schwartz for Nonconvex Domains, *Functional Analysis dan Global Analysis*, 14-30.

Cheney, W., 2001, *Analysis for Applied Mathematics*, Springer, New York.

Debnath, L. danMikusinki, P., 1999, *Introduction to Hilbert Space with Applications*, Academic Press, United State of Amerika.

Royden, H. L., 1968, *Real Analysis*, Collier Mac Millan International Editions, New York.

Stakgold, I., 1979, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York.

Wikipedia, 2013, Paley-Wiener theorem. (online) https://en.wikipedia. org/wiki/Paley-Wiener_theorem. Diaksestanggal 7 januari 2013,

Wheeden, R.L., 1977, *Measure and Integral*, Marcell Dekker, Inc., New York.