PROSES BERPIKIR REFRAKSI SISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA TENTANG KESAMAAN

Anton Prayitno*
(arsedi2003@yahoo.com)

Abstrak: *Salah satu konsep dasar untuk memahami aljabar dan banyak mendapatkan perhatian adalalah kesetaraan khususnya tentang tanda sama dengan (=). Tanda sama dengan sering disajikan dalam konteks umum yaitu operasi-sama dengan-jawaban (seperti, 5+4=9) dan jarang disajikan dalam konteks hasil pada kedua sisi (seperti, 5+4=7+2). Terkadang tanda sama dengan disajikan pula dalam konteks yang tidak umum lainnya (seperti, 9=9). Pada siswa sekolah menengah, berpikir operasional dalam menafsirkan tanda sama dengan dalam konteks operasi-sama dengan-jawaban akan tetapi siswa berpikir relasional dari tanda sama dengan dalam konteks kesetaraan. Dalam kemampuan berpikirnya, siswa cenderung bersifat linear yaitu apa yang diketahui dan diterima dari pengalamannya akan lebih sering langsung digunakan dalam menyelesaikan masalah. Berfikir linear akan mengakibatkan siswa untuk tidak dapat berfikir kreatif. Dalam pembelajaran matematika, siswa cenderung mengalami kesulitan mengerjakan masalah matematika apabila masalah yang diberikan guru tidak sama pada saat guru memberikan contoh atau bahkan hasil kerja siswa akan selalu sama pada saat guru mengajar. Mengingat pentingnya berpikir relasional dalam mengkonstruksi kesamaan sebagai pondasi dasar belajar aljabar, maka pengajar perlu membantu siswa dalam belajar.* ***Proses refraksi*** *membantu siswa memahami dan mengidentifikasi proses intermediate belajar dalam membantu mengembangkan keterampilan berpikir. Refraksi adalah pengetahuan transformatif yang terjadi yang memvalidasi penggunaan analisis kritis dan pemecahan masalah yang menyediakan interpretasi dan menyimpulkan dari isu-isu penting dan situasi dengan mempertimbangkan konten dan konteks.*

Kata kunci: *refraksi, berpikir, tanda sama dengan.*

*Dosen Pendidikan Matematika
Universitas Wisnuwardhana Malang

Pendahuluan

Proses menciptakan generalisasi dari bilangan dan aritmatika dimulai sejak TK dan berlanjut terus seiring siswa belajar semua aspek dari bilangan dan perhitungan, termasuk pengetahuan dasar dan makna operasi. Dalam menciptakan generalisasi kita perlu menggunakan suatu simbol penting di aritmatika dasar, pada aljabar dan semua area matematika yang menggunakan bilangan dan operasi (Van De Wall, 2007). Salah satu konsep mendasar untuk memahami aljabar dan banyak mendapatkan perhatian peneliti yang cukup banyak adalalah kesetaraan dan khususnya tentang tanda sama dengan (=) (misalnya, Mc Neil dan Alibali, 2005; Nicole M. dan Mc Neil, 2006; Knut J. Erik, dkk, 2008). Keberadaan tentang tanda sama dengan di semua tingkat matematika menyoroti betapa pentingnya hal tersebut.

Tanda sama dengan (=) bisa dianggap sebagai simbol yang paling sederhana dalam semua area matematika dan ilmu pengetahuan. Dalam Mc Neil dan Alibali (2005) tanda sama dengan sering digunakan unutk mendefinisikan suatu relasi ekivalen (mis a l n y a

$$3 + 4 = 7; x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)),$$

hal ini menunjukkan bahwa pernyataan disebelah kiri adalah jumlah yang sama dengan pernyataan disebelah kanan.

Di bidang ilmu pengetahuan, tanda sama dengan digunakan untuk mengungkapkan hubungan penting seperti

$$Jarak = kecepatan\ x\ waktu; E = mc^2$$

Dalam kondisi tersebut, siswa harus menfasirkan tanda sama dengan sebagai simbol relasi (hubungan) kesetaraan jika siswa memahami area dari matematika lanjutan dan pengetahuan (misalnya, fungsi).

Banyak siswa Sekolah Dasar dan Menengah menunjukkan kurangnya pemahaman tentang makna tanda sama dengan. Penafsiran siswa terhadap sama dengan disesuaikan pada tingakat dan pengalaman yang dimilikinya (Mc Neil, 2005). Penafsiran siswa SD tidak akan sama dengan siswa Menengah ataupun mahasiswa dalam menafsirkan tanda sama dengan, meskipun pada siswa menengah adakalanya berpikir seperti anak SD ataupun berpikir seperti mahahasiswa.

Pada siswa SD, penafsiran tanda sama dengan sejajar atau sesuai dengan kinerja pada saat memecahkan masalah persamaan matematika. Kegagalan siswa SD untuk memahami tanda sama dengan sebagai relasional sangat menonjol pada persamaan yang memiliki operasi pada kedua sisi (misal, 3+4=...+2). Ketika siswa SD diminta untuk merekonstruksi masalah kesetaraan matematika (misalnya, masalah dengan jenis penjumlahan non standar 3+4+5=3+....), mereka memandang persamaan 3+4+5=3+.... Sebagai 3+4+5+3=.... (Mc Neil, 2006). Hal ini menunjukkan bahwa siswa berpikir bahwa tanda sama dan titik-titik harus pergi bersama-sama di sebelah kanan. Ketika diminta untuk memecahkan masalah kesetaraan, sebagian besar siswa menggunakan strategi yang salah, seperti menambahkan semua angka dalam masalah dan menempatkan jumlah total dalam kosong (misalnya, menulis 15 kosong saat memecahkan 3 +4 +5 = 3 + __, Carpenter, 2005, Mc Neil, 2006, Knut J Erik, 2008).

Dalam proses belajar mengajar, masih banyak pengajar matematika yang mengajarkan tanda sama dengan hanya sebagai symbol operasional. Akibatnya siswa dalam melihat tanda sama dengan sebagai sinyal atau perintah untuk melakukan sesuatu. Kesalahpahaman terhadap tanda sama dengan terjadi ketika menyelesaikan masalah aritmatika pada Sekolah Dasar (carpenter, 2003). Pandangan seperti itu, tidak dapat membantu siswa dengan baik ketika siswa menghadapi persamaan yang lebih kompleks di kelas berikutnya. Bahkan, banyak murid yang sulit ketika bekerja dengan simbolis dan persamaan yang mungkin disebabkan kesalahpahaman mereka tentang makna tanda sama dengan. Knut J. Erik (2006), misalnya, melaporkan kesalahpahaman tentang makna tanda sama mungkin akar penyebab kesulitan siswa SMA berurusan dengan polynomial. Dengan penekanan tanda sama dengan hanya sebagai operasional mengakibatkan pemahamn siswa terhadap tanda sama dengan tidak berkembang secara optimal.

Seringkali dalam menyelesaikan suatu masalah, siswa sering kali mengikuti pengetahuan yang dimiliki sesuai dengan pengalaman yang diajarkan oleh pengajar. Carpenter (2003) mempertanyakan pengertian siswa membuat prosedur yang digunakan untuk memecahkan persamaan (seperti, 12+3+2=...+10, siswa harus memahami tanda sama dengan sebagai relasi (hubungan) untuk memahami transformasi yang dilakukan pada persamaan tersebut. Jacob, dkk (2007) telah menemukan bahwa berpikir relasional menjadi suatu *power*, mempersatukan ide untuk melibatkan guru dalam percakapan yang mendukung penggunaan penalaran aljabar dengan siswa.

Berpikir relasional merupakan perubahan yang mendasar dari fokus aritmatika (menghitung jawaban) ke fokus aljabar (memeriksa hubungan). Dalam penelitian tradisional aritmatika, topik penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian secara umum telah digambarkan sebagai proses di mana kumpulan bilangan dioperasikan di dalam perkembangan langkah-langkah untuk menghasilkan satu bilangan, yang merupakan jawaban atas perhitungan. Jacob (2007) mendefinisikan berpikir relasional merupakan pernyataan dan persamaan secara keseluruhan yang memperhatikan hubungan jumlah antara ungkapan-ungkapan dan persamaan. berpikir relasional merupakan pendekatan yang berbeda dalam bekerja dengan angka-angka dari melakukan prosedur komputasi dalam urutan langkah-demi-langkah.

Singkatnya, berpikir relasional memerlukan kesadaran hubungan antara bilangan dan sifat dasar operasi bilangan. Siswa dapat menggunakan pemikiran relasional untuk menyederhanakan perhitungan, membangun dan mempelajari konsep baru, memperpanjang prosedur untuk domain bilangan baru, dan umumnya memahami aritmatika.

Seperti yang dikemukakan (Mc Neil, 2005; 2006; Knut, J Erik, 2008) pada siswa sekolah menengah ketika tanda sama dengan disajikan konteks masalah kesetaraan, maka siswa sekolah menengah menyerupai siswa yang memiliki pengetahuan terhadap tanda sama dengan sebagai relasional. Dengan demikian, sebagai pengajar perlu memberikan suatu bentuk bantuan *(scaffolding)* yang diperlukan agar berpikir siswa mengalami pemfoskusan **(refraksi)** dalam hal ini kemampuan berpikir siswa terhadap tanda sama dengan sebagai hasil; jawaban; mutlak *(operasional)* menjadi berpikir sebagai kesamaan dua sisi *(relasional)* **meskipun** pada konteks ini terjadi *disequilibrasi* berpikir siswa (seperti, ...+17+25=30+25 menjadi 30+25-(17+25)=...). Karena itu sangat perlu dilakukan kajian refraksi berpikir siswa dalam mengkonstruksi kesamaan.

Refraksi banyak sering ditemukan dalam cahaya atau gelombang. Refraksi gelombang terjadi saat lewat dari satu medium ke medium lain dengan kepadatan yang berbeda. Greg Downey (2005) dengan cerdas menggunakan metafora cahaya dalam orientasinya untuk mendeskripsikan perlunya bergerak di luar refleksi. Jika kita mengikuti metafora Downey, maka refleksi berarti membengkokkan kembali cahaya.

Proses refraksi membantu siswa memahami dan mengidentifikasi proses *intermediate* belajar dalam membantu mengembangkan keterampilan berpikir (Rosele, 2009). Refraksi dirancang untuk memperoleh hasil belajar yang bermakna dan terarah dari refleksi, seperti mengembangkan keterlibatan substantif dan pemecahan masalah. Refraksi menyoroti pentingnya menggunakan pedoman pertanyaan dan interaksi pengajar untuk mendorong siswa untuk menggunakan refleksi yang ditulis untuk melampaui model mental saat ini yang, untuk benar-benar berpikir.

Refraksi berpikir siswa dalam kajian ini dipengaruhi oleh suatu pengalaman dengan cara mendorong pertanyaan secara kritis dan membuat koneksi penting dengan konten dan konteks. salah satu dalam refleksi mempertimbangkan isu-isu dan topik, tetapi refleksi belum tentu kritis (Rosele, 2009). Pengalaman tersebut kembali dibingkai seperti refraksi. maka Refraksi adalah tahap belajar transformatif di mana kita mengklarifikasi masalah dengan menyediakan fakta-fakta baru dan bukti.

Pusat untuk refraksi adalah kemampuan untuk melihat dan mengidentifikasi isu-isu dan pengalaman melalui lensa yang berbeda. Oleh karena itu refleksi adalah alat untuk membantu kita mengambil saksama peristiwa atau situasi dan, jika dilakukan dengan benar, dapat membantu kita bergerak menuju langkah selanjutnya: berpikir kritis dan refraksi. Tujuan akhir dari refraksi adalah untuk dapat menawarkan alternatif solusi, pertimbangan dan / atau pengamatan masalah di tangan. (Rosele, 2009)

Pandangan Tentang Tanda Sama Dengan

Ketika memasuki sekolah dasar, anak-anak membawa intuisi mereka tentang dasar operasi aritmatika. Interpretasi anak mengenai tanda sama dengan dan simbolisasi pertama mereka dalam proses aritmatika yang didasarkan pada intuisi. Tanda sama ini bisa dibilang simbol yang paling mendasar dalam semua matematika dan ilmu pengetahuan. Dalam matematika, sering digunakan untuk mendefinisikan suatu relasi ekivalen (misalnya, $3 + 4 = 7$; $x^2 - 9 = [x + 3][x - 3]$), menunjukkan bahwa ekspresi di sebelah kiri adalah jumlah yang sama dengan ekspresi di sebelah kanan.

Siswa harus membangun suatu interpretasi tanda sama berdasarkan pengalaman mereka dengannya. Tidak mengherankan, banyak siswa sekolah dasar (usia 6-11 tahun), yang memiliki pengalaman terbatas dengan matematika, tidak menafsirkan tanda sama dalam cara canggih. Alih-alih menafsirkan tanda sama sebagai simbol relasional kesetaraan, mereka cenderung untuk menafsirkannya sebagai simbol operasional (McNeil & Alibali, 2000; Seo & Ginsburg, 2003). Ketika diminta untuk menentukan tanda sama, mereka sering mengatakan itu artinya "total" atau "jawaban", dan ketika diminta untuk menilai "kejelian" dari berbagai definisi, mereka menilai definisi seperti "total" atau "jawaban" sebagai pintar dari definisi seperti "dua jumlah yang sama" atau "sama dengan" (McNeil & Alibali, 2000, 2002;).

Tanda sama dengan dalam penyajiannya terdiri dari tiga konteks, (a) tanda sama dengan saja, =; (b) masalah penjumlahan, 4 +8 +5 +4 = __, atau (c) kesamaan ekivalen, 4 +8 +5 = 4 + __. Pemahaman tanda sama dengan dipengaruhi oleh pengalaman dalam matematika dan variasi dalam konteks (Mc Neil & Alibali, 2005). Siswa dengan tingkat yang berbeda dari pengalaman matematika (SD, kelas tujuh, sarjana, dan pascasarjana) memandang tanda sama dengan berbeda. Pada siswa SD, memandang sama dengan sebagai hasil, jawaban atau total dalam semua konteks. Sedangkan pada siswa sekolah menengah memandang sebagai kesamaan dua sisi, ruas kan dan ruas kiri adalah sama dalam konteks kesamaan ekivalen dan memandang sebagai hasil atau total dalam konteks tanda sama dengan saja dan masalah penjumlahan. Mahasiswa menafsirkan tanda sama dengan sebagai kesamaan dua sisi dalam semua konteks. Hal ini memberikan bukti bahwa pengalaman dan pengetahuan serta konteks yang berbeda mempengaruhi cara pandang siswa dalam tanda sama dengan. (Nicole, M & Alibali, 2005).

Tanda sama dengan sebagai Indikator relasional

Salah satu aplikasi dari Berpikir relasional melihat tanda sama sebagai indikator relasional antara dua pernyataan. Sayangnya, banyak siswa memegang pandangan alternatif di mana tanda sama adalah sinyal untuk melaksanakan perhitungan yang mendahului dan bilangan setelah tanda sama adalah jawaban untuk perhitungan itu.

Misalnya, siswa dengan memandang tanda sama dengan ini dapat memecahkan persamaan 8 + 4 = _ + 5. Siswa dapat menemukan angka yang benar untuk dimasukkan ke dalam kotak dengan menambahkan 8 dan 4 dan kemudian mencari tahu apa yang harus ditambahkan ke 5 sampai mendapatkan 12. Ini adalah solusi yang sempurna untuk masalah tersebut yang berhubungan tepat dengan tanda sama dengan sebagai ungkapan hubungan. Meskipun solusinya adalah benar, masih mengandalkan pada perhitungan ditentukan dalam masalah untuk menghitung menjawab. Seorang siswa yang menganggap persamaan secara keseluruhan mungkin telah mengakui bahwa 5 adalah satu lebihnya dari 4 jadi angka dalam kotak perlu menjadi satu kurang dari 8. Siswa menggunakan hubungan relasional untuk memecahkan masalah ini: $8 + 4 = (7 + 1) + 4 = 7 + (1 + 4)$. Dengan kata lain siswa setidaknya secara implisit menggunakan sifat asosiatif penambahan untuk mengubah persamaan. Dengan demikian, pemahaman bahwa tanda sama merupakan relasi adalah tolok ukur penting dalam belajar untuk berpikir tentang hubungan matematika, tapi ada lebih banyak berpikir tentang relasi daripada menggunakan tanda sama secara tepat.

Dari hasil observasi pada siswa diberikan bentuk persamaan penjumlahan dengan jenis yang tidak umum (seperti, +17+25=30+25), dari persamaan tersebut diperoleh berpikir operasional dan juga relasional. Pandangan operasional pada tanda sama dengan tersebut diungkapkan oleh siswa (seperti, menjumlahkan 30+25 dan 17+25 yang selanjutnya hasil dari (30+25) dikurangi dengan hasil (17+25)), sedangkan ada siswa yang menyelesaikan dengan alasan lain (seperti, melengkapi titik-titik tesebut, memandang bahwa ruas kanan dan kiri mempunyai hasil yang sama) hal ini dikatakan bahwa siswa berpikir relasional terhadap tanda sama dengan pada bentuk (...+17+25=30+25).

Klasifikasi siswa menafsirkan tanda sama dengan

Tanda sama dengan (=) selalu terdapat dalam matematika, dan merupakan konsep sederhana dari suatu simbol yang penting dalam memamahi banyak topic pada matematika (misalnya persamaan pada aljabar) (Nicole M, Mc Neil, 2006). Sebagian besar siswa SD menginterperasikan tanda sama dengan berfikir sebagai operasional yang memiliki arti "mendapatkankan jumlah" atau "menempatkan jawaban". Siswa tidak hanya menyediakan interpretasi operasi ketika diminta untuk mendefinisikan tanda sama dengan tetapi juga menginterpretasikan operasi dasar seperti "jumlah" dan "jawaban" dari interpretasi relasional seperti "sama dengan" atau "dua jumlah yang sama" (McNeil & Alibali, 2005).

Tidak seperti siswa di sekolah dasar, siswa di sekolah menengah (usia 11 sampai 14) memiliki banyak struktur kognitif umum dan fungsi berpikir yang diperlukan untuk belajar matematika pada tingkat yang lebih tinggi. Contohnya, menurut Piaget dan rekan (Inhelder & Piaget, 1958, Oleron, Piaget, Inhelder, & Greco, 1995), anak-anak pada rentang usia 11 sampai 14 telah mengembangkan struktur logis yang diperlukan untuk mengkoordinasikan hubungan kesetaraan dan mendeteksi kesamaan relasional yang kompleks. Anak-anak dalam rentang usia ini juga memiliki sistem memori kerja dewasa (Gathercole, 1999), yang dianggap sangat diperlukan untuk memecahkan masalah aritmatika yang kompleks dan pengolahan hubungan yang kompleks. Dengan demikian, dari perspektif perkembangan, siswa di sekolah menengah seharusnya lebih mungkin untuk memiliki pemahaman relasional.

Knut, J. Erik (2008) melakukan suatu penelitian tentang pemahaman siswa terhadap tanda sama dengan, dimana Siswa sekolah menengah (kelas 6-8) diminta untuk memberikan definisi terhadap simbol tanda sama dengan (lihat gbr. 1). Pertanyaan ini diperlukan siswa menyebutkan simbol tanda sama (pertama), memberikan pernyataan mengenai arti simbol ini (kedua), dan kemudian, jika memungkinkan, memberikan pernyataan mengenai arti lain dari tanda sama dengan (ketiga).

Fig. 1 Interpreting the equal sign

The following questions are about this statement:

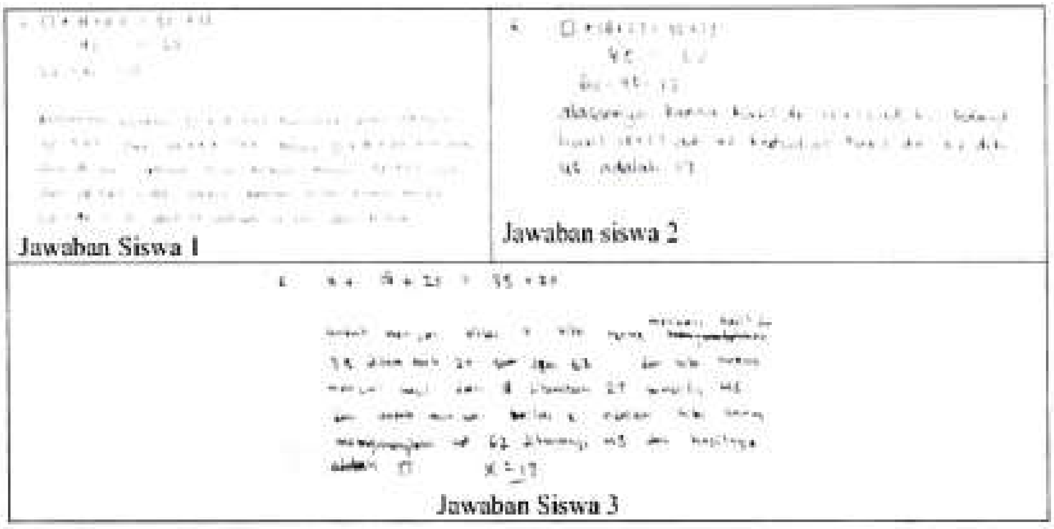
$$3 + 4 = 7$$
$$\uparrow$$

(a) The arrow above points to a symbol. What is the name of the symbol?
(b) What does the symbol mean?
(c) Can the symbol mean anything else? If yes, please explain.

Selanjutnya Knut J. Erik (2008) mengklasifikasi berpikir siswa dalam menafsirkan tanda sama dengan berdasarkan respon siswa pada bagian (b) dan (c) menjadi empat kategori: *relational, operational, unspecified equal, or other*. Berpikir relasional jika siswa mengungkapkan ide umum bahwa tanda sama merupakan hubungan kesetaraan antara dua kuantitas. Jawaban siswa berikut mewakili yang dikategorisasi sebagai *relasional*:

- "Bahwa apa yang ada di sebelah kiri dan kanan tanda berarti hal yang sama." (Kelas 6)
- "Hal yang sama seperti, nilai yang sama." (Kelas 7)
- "Sisi kiri dan sisi kanan tanda sama dengan adalah nilai yang sama." (Kelas 8)

Sedangkan dikategorisasikan sebagai berpikir jika siswa mengungkapkan ide umum bahwa tanda sama berarti "menambahkan bilangan"



Jawaban Siswa 1

Jawaban siswa 2

Jawaban Siswa 3

atau "jawabannya". Jawaban siswa berikut mewakili yang dikategorisasi sebagai *operasional*:

- "Jumlah dari dua angka adalah" (kelas 6 siswa)
- "Tanda yang menghubungkan jawaban untuk masalah." (Kelas 7 siswa)
- "Total" (Kelas 8 siswa)
- "Beberapa bilangan ditambahkan bersama sama." (Kelas 8 siswa)

Kategori *other* meliputi definisi seperti "artinya sama" atau "artinya sama dengan" serta terjemahan langsung dari pernyataan masalah, seperti "3 ditambah 4 sama dengan 7."

Begitupula yang dilakukan peneliti pada saat melakukan observasi awal, diperoleh kemampuan berpikir siswa dalam mengerjakan soal yang diberikan peneliti. Berikut soal yang diberikan kepada siswa pada saat peneliti melakukan observasi awal. Dari soal diatas, peneliti meminta tiga siswa sekolah menengah untuk menyelesaikan serta memberikan alasan. Dari hasil kerja siswa diperoleh jawaban 3 Siswa (S1, S2, dan S3). Berikut jawaban 3 Siswa.

Jawablah pertanyaan dibawah ini dan berilah alasannya!

Dalam pertanyaan $\square + 18 = 35$, **bilangan yang terdapat pada** $\square$ **adalah 17. Saudara dapat menggunakan kenyataan tersebut untuk membantu saudara mencari tahu bilangan berapa yang terdapat pada** $\square$ **dengan pertanyaan** $\square + 18 + 27 = 35 + 27$?

Jelaskan alasannya.

Dalam menyelesaikan masalah diatas, terdapat beberapa perbedaan cara menafsirkan tanda sama dengan yang dilakukan oleh 3 siswa yang selanjutnya disebut (S1, S2, dan S3) pada kelas 9 SMP Sunan kalijogo jabung. Hasil pekerjaan yang dilakukan oleh siswa selanjutnya dianalisis oleh penulis, berikut alasan yang dikemukakan oleh **S1** (Siswa pertama) yaitu *17 dengan alasan karena j +18+27 hasilnya sama dengan 35+27 jika 35+27=62 maka j +18+27 pun sama dan dicari adalah nilai pada kotak maka 62-45=17 adalah nilai dari kotak tersebut*. Selanjutnya unutk jawaban **S2** diperoleh *17 dengan alasan karena hasil dari 35 dan 27 adalah 62 sedangkan hasil dari 18+27 adalah 42 kemudian hasil dari 62 dikurangi 45 adalah 17.*

Begitu pula yang diselesaikan oleh **S3** adalah *17 dengan alasan untuk mencari nilai kotak terlebih dulu harus mencari hasil dari 35+27=62, dan selanjutnya mencari hasil dari 18+27=45, dan untuk mencari nilai kotak harus mengurangkan 62-45 dan hasilnya adalah 17.* Dari hasil pekerjaan 3 siswa tersebut, mengganggap bahwa tanda sama dengan pada kesamaan diatas dianggap sebagai suatu hasil dari pernyataan yang sebelah kanan. Hal ini sejalan dengan temuan pada siswa SD oleh Knut, J Erik (2008), bahwa tanda sama dengan dalam bentuk kesetaraan ekivalen harus pindah bersama-sama di ujung pertanyaan dimana ketika diberikan persamaan dalam bentuk yang tidak standar (seperti,…+17+25=30+25), siswa merubah menjadi (30+25-(17+25)=…)

Dari hasil observasi dan analisis yang dilakukan oleh penulis, jelas sebagian siswa dalam menyelesaikan masalah kesamaan seperti pada masalah diatas terdapat pandangan berpikir operasional siswa terhadap tanda sama dengan. Seperti yang dikemukakan (Mc Neil, 2005; 2006; Knut, J Erik, 2008) pada siswa sekolah menengah ketika tanda sama dengan disajikan konteks masalah kesetaraan, maka siswa sekolah menengah menyerupai siswa yang memiliki pengetahuan terhadap tanda sama dengan sebagai relasional.

Pentingnya refraksi berpikir siswa

Dengan memperhatikan bukti hasil kerja siswa pada saat observasi, sangat jelas bahwa siswa sekolah menengah masih terdapat yang berpikir operasional meskipun ada pula yang berpikir secara relasional. Kemampuan berpikir siswa terhadap tanda sama dengan dipengaruhi oleh konteks yang berbeda (Mc Neil & Alibali, Knut J. Erik, 2002; 2006; 2007) dan pengalaman (Nicole, M, Mc Neil, 2005; 2006).

Terdapat beberapa fakta yang sering kita temukan bahwa siswa sekolah menengah hanya cenderung selalu melakukan perhitungan ataupun algoritma misalnya pada aritmatika yang hampir secara eksklusif lebih berfokus pada menghitung jawaban. Selain itu, pengurangan, perkalian, dan pembagian umumnya digambarkan sebagai proses yang melibatkan untuk melakukan sesuatu. Dalam aritmatika, perhitungan mengakibatkan *penutupan*, suatu kumpulan bilangan dioperasikan pada beberapa langkah unutk menghasilkan satu bilangan yang merupakan jawaban untuk perhitungan. Hal ini diperkuat oleh Jacob (2007) yang menjelaskan penelitian tradisional aritmatika, mengenai topik penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian secara umum telah digambarkan sebagai proses di mana kumpulan bilangan dioperasikan di dalam perkembangan langkah-langkah untuk menghasilkan satu bilangan, yang merupakan jawaban atas perhitungan.

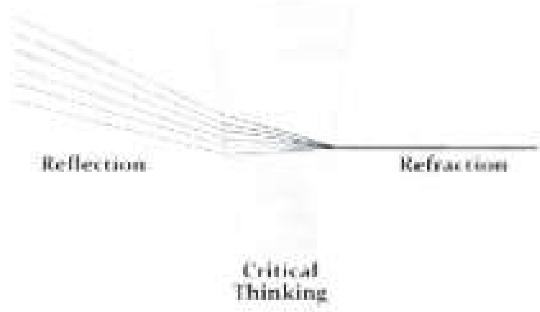
Dari beberapa pendapat diatas, nampak jelas bahwa hubungan relasi dari aritmatika lebih penting dibandingkan hanya dengan perhitungan. Hal ini dikaitkan dengan materi matematika selanjutnya (seperti aljabar) yang lebih menekankan pada berpikir relasional. Carpenter (2005) menjelaskan bahwa konsep yang lebih tepat dari tanda sama dengan dan salah satu yang sangat penting untuk belajar aljabar bahwa tanda sama dengan mengungkapkan relasi dan tidak sebagai perhitungan. Begitupula juga (Knut, erik, Dkk, 2006; 2008; Carpenter 2005, Jacob, dkk. 2007) yang memandang berpikir relasional dari tanda sama sangat penting untuk belajar aljabar, dan kurangnya pemahaman tersebut merupakan batu sandungan utama bagi siswa ketika belajar aljabar. Dengan demikian, berpikir relasional merupakan patokan penting dalam belajar untuk berpikir tentang *koneksi matematika*, dari pada berpikir secara operasional.

Mengingat pentingnya berpikir relasional dalam mengkonstruksi kesamaan sebagai pondasi dasar belajar aljabar, maka pengajar perlu membantu siswa dalam belajar. **Proses refraksi** membantu siswa memahami dan mengidentifikasi proses intermediate belajar dalam membantu mengembangkan keterampilan berpikir

(Rosele, 2009). Refraksi dirancang untuk memperoleh hasil belajar yang bermakna dan terarah dari refleksi, seperti mengembangkan keterlibatan substantif dan pemecahan masalah. Refraksi menyoroti pentingnya menggunakan pedoman pertanyaan dan interaksi pengajar untuk mendorong siswa untuk menggunakan refleksi yang ditulis untuk melampaui model mental saat ini yang, untuk benar-benar berpikir. Oleh karena itu refleksi adalah alat untuk membantu kita mengambil saksama peristiwa atau situasi dan, jika dilakukan dengan benar, dapat membantu kita bergerak menuju langkah selanjutnya: berpikir kritis dan refraksi.

Refraksi sebagai siklus perkembangan pengetahuan

Refleksi merupakan salah satu langkah dalam proses yang kita anggap penting dalam membangun dasar pengetahuan yang melampaui pengalaman individu sendiri. Namun, kami melihat refleksi hanya sebagai langkah pertama dalam proses di mana siswa melakukan inventarisasi pengalaman praktis, konteks, dan materi pelajaran akademik. Kami menggunakan metafora cahaya untuk menggambarkan proses pengembangan pengetahuan dan untuk berpindah dari refleksi untuk pemikiran kritis terhadap refraksi (Gambar 1). Greg Downey (2005) dengan cerdik menggunakan metafora cahaya dalam orientasi re-entry untuk menggambarkan kebutuhan untuk bergerak di luar refleksi. Jika kita mengikuti metafora Downey, maka refleksi berarti membengkokkan kembali cahaya.



Refleksi adalah langkah pertama dalam siklus pengembangan pengetahuan. Refleksi adalah suatu proses dimana kita melihat pengalaman, membingkai dan memperoleh arti dari hal itu. Sedangkan **Berpikir kritis** adalah langkah kedua dalam siklus pengembangan pengetahuan. Berpikir kritis menunjukkan kemampuan untuk mengevaluasi informasi dan pendapat terkait berkumpul di tahap refleksi secara sistematis, terarah, efisien mengembangkan keterampilan pemecahan masalah.

Refraksi merupakan langkah ketiga dalam siklus pengembangan pengetahuan. Refraksi adalah pengetahuan transformatif yang terjadi yang memvalidasi penggunaan analisis kritis dan pemecahan masalah yang menyediakan interpretasi dan menyimpulkan dari isu-isu penting dan situasi dengan mempertimbangkan konten dan konteks.

Refraksi Berpikir siswa dalam kajian ini dipengaruhi oleh suatu pengalaman dengan cara mendorong pertanyaan secara kritis dan membuat koneksi penting dengan konten dan konteks. Salah Satu dalam refleksi mempertimbangkan isu-isu dan topik, tetapi refleksi belum tentu kritis (Rosele, 2009). Refleksi merupakan salah satu langkah dalam proses yang kita anggap penting dalam membangun dasar pengetahuan yang melampaui pengalaman individu sendiri. Namun, kami melihat refleksi hanya sebagai langkah pertama dalam proses di mana siswa melakukan **inventarisasi pengalaman praktis, konteks, dan materi pelajaran akademik**.

Setelah refleksi, selanjutnya pindah ke suatu proses mental yang lebih aktif disebut berpikir kritis. Jika kita merujuk kembali ke metafora cahaya, berpikir kritis adalah tahap di mana cahaya (pengalaman) menyentuh media ini mempengaruhi dalam beberapa cara, menyebabkan "reaksi" pada media yang memicu berpikir kritis yang **menganalisis dan menafsirkan bagaimana cahaya/pengalaman telah mempengaruhi kita**. Dalam berpikir kritis salah satu tujuan utama adalah mengenali relevansi perspektif yang berbeda dalam hal ini adalah karakteristik berpikir siswa dalam mengkonstruksi kesamaan dan untuk itu perlu mempertimbangkan bahan dikumpulkan dan persediaan yang diambil dalam tahap refleksi.

Langkah ketiga dalam siklus pengembangan pengetahuan adalah refraksi. Jika kita melanjutkan metafora cahaya, refraksi berarti: "Pembengkokan gelombang, seperti cahaya atau gelombang suara, saat lewat dari satu medium ke medium lain dengan kepadatan yang berbeda." (www.freedictionary.com). Sementara refleksi menyiratkan gerakan cahaya langsung dari media (sehingga dapat mencerminkan apa yang kita lihat), di pembiasan cahaya melewati bengkok atau miring sehingga tampilan tidak pernah persis sama seperti dalam refleksi. Dalam pembiasan kita mencari bagaimana pengalaman mempengaruhi kita dan juga bagaimana pengalaman "cahaya", mempengaruhi kita dalam cara yang berarti dan bagaimana reaksi dapat berkontribusi untuk konteks kita dan lain-lain. Pengalaman tersebut kembali dibingkai seperti refraksi. Maka refraksi adalah tahap belajar transformatif di mana kita mengklarifikasi masalah dengan menyediakan fakta-fakta baru dan bukti. Pusat untuk refraksi adalah kemampuan untuk melihat dan mengidentifikasi isu-isu dan pengalaman melalui lensa yang berbeda.

Dalam rangka memfasilitasi desain dan perkembangan pengetahuan, Rosele (2009) mengklasifikasi Refraksi Perkembangan Pengetahuan (Tabel 1). Kolom pertama berisi karakteristik yang terkait dengan tahap Refleksi, di mana pengalaman yang diingat dan terakhir. Kolom kedua meliputi karakteristik yang terkait dengan tahap Berpikir Kritis, melalui sudut pandang dan lainnya digabungkan. Akhirnya, kolom ketiga menyajikan karakteristik tahap Refraksi yang memberikan bukti integrasi, keterlibatan dengan orang lain, dan perspektif analisis baru. Pengalaman, isi materi, dan konteks harus menjadi bagian dari setiap tingkat untuk mendorong dan mengembangkan pembelajaran lebih lanjut dari materi pelajaran dan kemampuan berpikir.

Kesimpulan

Dalam kemampuan berpikirnya, siswa cenderung bersifat linear yaitu apa yang diketahui dan diterima dari pengalamannya akan lebih sering langsung digunakan dalam menyelesaikan masalah. Berfikir linear akan mengakibatkan siswa untuk tidak dapat berfikir kreatif. Dalam pembelajaran matematika, siswa cenderung mengalami kesulitan mengerjakan masalah matematika apabila masalah yang diberikan guru tidak sama pada saat guru memberikan contoh atau bahkan hasil kerja siswa akan selalu sama pada saat guru mengajar.

Kenyataannya, Dalam proses belajar mengajar tentang kesamaan khususnya simbol tanda sama dengan, masih banyak pengajar matematika yang mengajarkan tanda sama dengan hanya sebagai simbol hasil, atau jumlah dari beberapa bilangan sebelah kiri. Akibatnya siswa dalam melihat tanda sama dengan sebagai sinyal atau perintah untuk melakukan sesuatu. Kesalahpahaman terhadap tanda sama dengan terjadi ketika menyelesaikan masalah aritmatika pada sekolah Dasar (carpenter, 2003). Berdasarkan kenyataan diatas, pengajar perlu memberikan suatu bantuan *(scaffolding)* agar terjadi proses *refraksi* berpikir operasional siswa yang dapat mengantarkan pada berpikir relasional.

Daftar Pustaka

Alibali, Martha W. Eric J. Knuth, dkk. 2007. A Longitudinal Examination of Middle School Students' Understanding of the Equal Sign and Equivalent Equations. Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 221–247

Asquith Pamela. 2007. Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. Mathematical Thinking and Learning, 9(3), 249–272. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Carpenter, dkk. 2005. Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. ZDM Vol. 37 (1)

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. 200). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann

Downey, Greg. 2005. How to Guide and Facilitate Self Reflective Practice in Re Entry Programs. Presented at CIEE Conference, Miami, FL.

Empson, Susan B, dkk. 2010. The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. To appear in J. Cai & E. Knuth (Eds.), Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives. New York: Springer.

Gathercole, S. E. 1999. Cognitive approaches to the development of short-term memory. Trends in Cognitive Sciences, 3, 410–419.

Inhelder, B., & Piaget, J. 1958. The growth of logical thinking from childhood to adolescence (A. Parsons & S. Milgram, Trans.). New York: Basic Books.

Jacobs Victoria R, dkk. 2007. Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. Journal for Research in Mathematics Education Vol. 38, No. 3, 258–288

Kaput, J. 1999. Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.).

Kindt, M., Abels, M., Dekker, T., Meyer, M. R., Pligge M. A., & Burrill, G. 2006. Comparing Quantities. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in Context. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Knut J. Erik, dkk. 2006. Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 37, No. 4, 297–312

Knut J. Erik, dkk. 2008. The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. Mathematics Teaching In The Middle School. Vol. 13, No. 9, Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mc Neil & Alibali. 2005. Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. Journal Of Cognition And Development, 6(2), 285–306. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mc Neil, dkk. 2006. Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. Cognition And Instruction, 24(3), 367–385. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. 2000. Learning mathematics from procedural instruction: Externally imposed goals influence what is learned. Journal of Educational Psychology, 92, 734–744

Molina Marta, dkk. 2006. Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign. Teaching Children Mathematics 13(2), 111-117

Rosele, L. 2009. Beyond Reflection Through an Academic Lens: Refraction and International Experiential Education. Frontiers: The Interdisciplinary Journal of Study Abroad, v18 p217-229

Seo, K.-H., & Ginsburg, H. P. 2003. "You've got to carefully read the math sentence … ": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The development of arithmetic concepts and skills (pp. 161–187). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum As-sociates, Inc.