Inplementasi Polya's Model pada Problem Solving tentang Aplikasi Integral dalam Fisika

I Nyoman Arcana

Abstrak. *Inti materi Matakuliah Kalkulus II di Prodi Pendidikan Fisika adalah Integral. Salah satu pokok bahasan pada matakuliah ini adalah Aplikasi Integral dalam Fisika. Aplikasinya berupa penyelesaian masalah (problem solving) dalam soal-soal fisika yang membutuhkan integral. Selain membutuhkan pengetahuan integral, juga diperlukan pemahaman tentang fisika, kemampuan membuat model matematika, keterampilan matematis, dan kemampuan menginterprestasikan hasil perhitungan. Jadi, soal-soal seperti ini sangat komplek dan tidak mudah, akibatnya banyak mahasiswa yang tidak bisa menjawab dengan sempurna. Penelitian ini bertujuan membuat buku ajar yang dapat mempermudah mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal aplikasi kalkulus dalam fisika. Alur berpikir dalam buku ini menginflementasikan alur Polya's Model, suatu model yang ditulis oleh George Polya, seorang matematikawan terkemuka dalam bukunya How to solve it. Polya menyarankan empat tahap dalam pemecahan masalah, yaitu: understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, dan looking back. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian Pengembangan dan Peningkatkan Kualitas Pembelajaran (PPKP). Penelitian dilakukan di Prodi Pendidikan Fisika FKIP Unika Widya Mandala Surabaya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa inplementasi Polya's Model dalam bentuk baris-kolom (tabel) antara tahap-tahap Polya dan contoh kasus dapat menuntun mahasiswa mempermudah menyelesaikan masalah tentang aplikasi integral dalam fisika*

Kata kunci*: Polya's Model, problem solving, apikasi integral dalam fisika.*

Pandahuluan

Hanya sebagian kecil mahasiswa yang tidak mengalami kesalahan ketika berhadapan dengan *problem solving* (penyelesaian masalah) tentang soal-soal aplikasi integral dalam fisika. Hal ini dapat dimaklumi karena soal-soal seperti ini memerlukan pemahaman tentang integral, pemahaman tentang fisika, kemampuan membuat model matematis, keterampilan matematis, dan kemampuan menginterprestasikan hasil perhitungan. Soal ini termasuk soal "ceritera". Bukan rahasia lagi bahwa pada umumnya para mahasasiswa sejak dari sekolah dasar sampai sekolah menengah sangat kesulitan menghadapi soal ceritera.

Dalam upaya meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam menjawab soal-soal seperti ini, perlulah dibuat suatu buku ajar yang

memuat tahapan-tahapan sistematis dalam menyelesaikan suatu soal. Penelitian ini bertujuan mengembangkan suatu buku ajar yang alur berpikirnya mengikuti Strategi Pemecahan Masalah dari Polya, penulis menyebutnya *Polya's Model*. Polya (1988), dalam bukunya *How to Solve it, A New Aspect of Mathematical Method,* menyarankan 4 langkah yang perlu dilakukan dalam menyelesaikan soal, yaitu: memahami masalah (memahami soal), menyusun rencana (menyusun strategi), melaksanakan rencana (melaksanakan strategi yang telah dipilih), dan melihat kembali hasil pekerjaan yang telah dilakukan.

Polya's Heuristics

Jika digunakan sebagai kata benda, istilah "heuristik" pada dasarnya berarti "sebuah saran umum tentang apa yang dapat dilakukan ketika memecahkan masalah yang tidak familier". Dengan kata lain, heuristik adalah ide-ide tentang *problem solving* (pemecahan masalah). Heuristik juga berarti "melayani untuk menemukan". *"Heuristics"* adalah istilah yang dipopulerkan oleh George Polya, seorang matematikawan terkemuka dalam bukunya *How to solve it* pada tahun 1945. Pengajaran heuristik untuk pemecahan masalah dalam matematika mempunyai analogi dengan pengajaran keterampilan proses untuk penyelidikan dalam bidang Science (Huat & Huat, 2000).
Heuristik yang biasa digunakan adalah:

- *Draw a diagram/models*
- *Make a systematic list/tabulation*
- *Use before-after concept*
- *Guess and check*
- *Look for patterns*
- *Act it out*
- *Eliminate options*
- *Work backwards*
- *Restate the problem in another way*
- *Simplify the problem*

Problem Solving

"Problem solving", oleh George Polya didefinisikan sebagai suatu tindakan untuk:

1. Menemukan cara mengetahui apa yang tidak diketahui/apa yang dicari;
2. Menemukan jalan keluar dari kesulitan;
3. Menemukan jalan keluar di sekitar suatu rintangan;
4. Mencapai akhir yang diinginkan dari sesuatu yang tidak segera dicapai dengan cara langsung.

Polya's Model

Tidak terdapat aturan pasti dan cepat yang akan menjamin keberhasilan dalam *problem solving* (pemecaham masalah). Namun, dimungkinkan untuk menguraikan beberapa langkah umum dalam proses pemecahan masalah dan memberikan beberapa prinsip yang boleh jadi bermanfaat dalam penyelesaian masalah tertentu. Langkah-langkah dan prinsip ini hanyalah akal sehat yang dibuat gamblang. Ada 4 (empat) langkah dalam Polya's Model, yaitu:

1. *Understanding the problem, recognizing what is asked for.*
2. *Devising a plan, responding to what is asked for.*
3. *Carrying out the plan, developing the result of the response.*
4. *Looking back, cheking: what does the result tell me?*

Dalam tahap *understanding the problem* (memahami masalah), Polya mengawali dengan pernyataan yang patut direnungkan, yaitu: *It is foolish to answer a question that you do not understand. It is sad to work for an end that you do not desire. Such foolish and sad things often happen.* Artinya, adalah bodoh kalau menjawab pertanyaan yang tidak Anda mengerti. Sangat menyedihkan melakukan suatu pekerjaan yang berakhir dengan hasil yang tidak Anda inginkan. Kebodohan dan kesedihan yang demikian sering terjadi. Pada tahap *understanding the problem* disarankan mengajukan beberapa pertanyaan berikut, tergantung dari situasinya:

- Apa yang dicari, apa yang diminta oleh soal?
- Apa yang diketahui/data apa saja yang ada?
- Apa saja persyaratannya?
- Apakah mungkin untuk memenuhi persyaratan tersebut?
- Apakah telah dipahami semua kata yang digunakan dalam persoalan ini?
- Adakah gambar atau diagram yang dapat membantu?
- Dapatkah dibuat pertanyaan dengan kata-kata sendiri.
- Apakah ada informasi yang cukup untuk menemukan jawaban?
- Apakah ada informasi yang berlebihan?
- Apakah perlu mengajukan pertanyaan tambahan untuk mendapatkan solusinya?

Tahap d*evising a plan* (merancang rencana) adalah tahap merancang rencana penyelesaiannya, minimal mengetahui secara garis garis besar tentang: rumus yang dipakai, komputasi yang diperlukan, bagaimana gambar/diagramnya, sehingga sampai pada menemukan apa yang dicari. Pertanyaan yang bisa membantu pembuatan rencana adalah:

- Bigaimana hubungan antara data dengan apa yang dicari? Jika tidak ditemukan hubungan langsung, wajib dicari masalah tambahan.
- Apakah masalah ini pernah ditemui sebelumnya? Atau, apakah pernah ditemukan masalah yang sama dalam bentuk yang sedikit berbeda?
- Apakah diketahui masalah yang terkait?

Pada tahap *carrying out the plan* (melaksanakan rencana), Polya menegaskan bahwa bahwa kecepatan dalam menerapkan rencana bukanlah merupakan elemen penting. Perlu disadari, waktu yang dibutuhkan akhirnya akan berkurang ketika mahasiswa telah berlatih cukup untuk mencoba berbagai strategi yang berbeda dan berlatih kemampuan berpikir. Jika mahasiswa mengalami kegagalan, ia bisa melakukan revisi dan mengubah rencana atau bahkan memikirkan rencana baru. Harus dipahami betul bahwa rencana dapat dilakukan dengan menggunakan keterampilan komputasi, keterampilan geometris dan penalaran logis. Dibutuhkan begitu banyak waktu untuk sukses; pengetahuan sebelumnya diperoleh, kebiasaan mental yang baik, konsentrasi pada tujuan, dan satu hal lagi: keberuntungan. Hal utama dalam melaksanakan rencana tersebut menjadi jauh lebih mudah adalah kesabaran. Beberapa pertanyaan yang bisa diajukan adalah:

- Apakah setiap langkah sudah benar?
- Dapatkah dibuktikan bahwa langkah-langkah tersebut benar?

Tahap *looking back* (melihat kembali) diawali dengan suatu pemikiran betapa pentingnya memeriksa solusi atau hasil hitungan. Dengan telah lengkapnya penyelesaian sehingga mencapai jawaban, adalah bijaksana untuk melihatnya kembali, sebagian untuk melihat apakah telah terjadi kesalahan dalam penyelesaian dan sebagian untuk melihat apakah dapat dipikirkan cara yang lebih mudah untuk memecahkan masalah tersebut. Alasan lain mengapa perlu melihat kembali adalah bahwa step ini akan mengakrabkan kita dengan metode penyelesaian dan ini mungkin berguna untuk memecahkan suatu masalah mendatang. Descartes mengatakan, "Setiap masalah yang saya pecahkan menjadi aturan yang selanjutnya digunakan untuk memecahkan masalah lain". Pemeriksaan disertai dengan pertanyaan, misalnya:

- Apakah semua data yang relevan telah digunakan?
- Apakah jawabannya masuk akal?
- Apakah ada alternatif solusi yang membutuhkan waktu yang lebih pendek?

Aplikasi Kalkulus dalam Fisika

Kalkulus dapat diterapkan di berbagai bidang ilmu, terutama dalam bidang fisika; oleh karenanya dikenal istilah aplikasi kalkulus dalam fisika. Pengaplikasian ini dalam pelajaran kalkulus dapat meningkatkan pemahaman konsep kalkulus dan keterampilan matematis. Purcell (1995) menyarankan beberapa trik untuk meningkatkan pemahaman kalkulus, yaitu: mengerjakan sejumlah soal-soal praktis, diikuti dengan beberapa soal terapan (dalam hal ini terapan dalam bidang fisika) dan diakhiri dengan soal-soal yang membuat penasaran. Semua ini menyangkut *problem solving*. Jika buku yang ditulis Ayres (1972) ditelaah dengan seksama, akan terlihat bahwa banyak sekali soal-soal yang melibatkan aplikasi kalkulus integral dalam fisika. Soal-soal ini

tertuang dalam sub Problem Solving yang ada pada setiap bab. Jawaban dari soal-soalnya sangat menggiring pembacanya ke arah pemahaman konsep; hal ini mengisyaratkan bahwa pemahaman kalkulus dapat ditingkatkan bila berulang kali menjawab soal terapan.

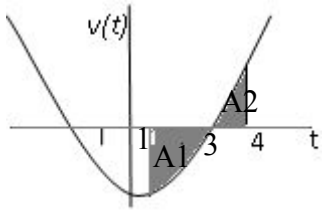
Inplementasi Polya's Model

Inplementasi Polya's Model dalam memecahkan soal aplikasi Kalkulus Integral dalam Fisika dipaparkan pada dua contoh berikut ini (Arcana, 2012).

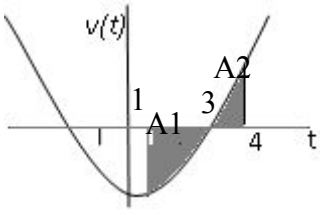
Contoh 1. Partikel bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan pada waktu t diberikan oleh persamaan $v(t) = t^2 - t - 6$ (diukur dalam meter per detik).

a. Carilah perpindahan partikel selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$.
b. Carilah jarak yang ditempuh selama periode waktu tersebut.

(Stewart, J. 1998)

Tahapan Model Polya	**Tahap 1: Pahami masalah**	
Apa yang dicari, apa yang diminta oleh soal.	a. Perpindahan b. Jarak	
Apa yang diketahui	Kecepatan $v(t) = t^2 - t - 6$. Periode waktu $1 \leq t \leq 4$.	
Apakah telah dipahami semua kata yang digunakan dalam persoalan ini?	Perpindahan : simpangan (perubahan posisi) partikel dari posisi awal ke posisi akhir dalam selang waktu tertentu. Jarak : panjang lintasan partikel dalam selang waktu tertentu (jarak tempuh).	
Adakah gambar atau diagram yang dapat membantu?		Dalam rentang waktu $1 \leq t \leq 4$ sebagian kurva berada di bawah sumbu t dan sebagian lagi di atas sumbu t. Hal ini memberi indikasi gerak benda mengalami pembalikan arah.
Pertanyaan dengan kata-kata sendiri.	Jika partikel bergerak dalam selang waktu $1 \leq t \leq 4$, a. Carilah simpangan (perubahan posisinya)! b. Carilah panjang lintasan yang dilalui partikel (jarak tempuhnya)!	

Apakah ada informasi yang cukup untuk menemukan jawaban? Apakah ada informasi yang berlebihan?	Semua informasi sudah cukup, sebab yang dibutuhkan hanyalah kecepatan dan interval waktu. Tidak ada informasi yang berlebihan.
Apakah perlu mengajukan pertanyaan tambahan untuk mendapatkan solusinya?	Apakah gerak partikel mengalami pembalikan arah? Kalau jawabannya ya, kapan? Pertanyaan ini perlu, sebab jika tidak ada pembalikan arah maka besar simpangan sama dengan jarak.

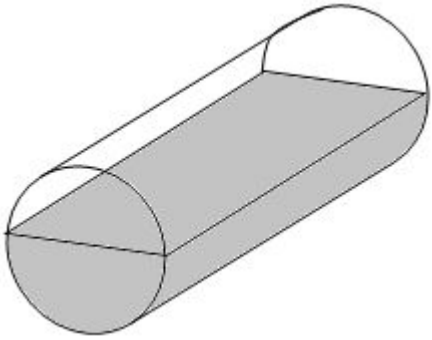
<table>
<tr><th>Tahapan Model Polya</th><th>Tahap 2: Merancang rencana</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Buatlah gambar
• Kaitkan antara data (apa yang diketahui) dengan apa yang akan dicari.
• Analogikan dengan masalah lain.</td><td>Gambar harus dibuat untuk melihat apakah partikel berbalik arah, atau untuk memperoleh interval di mana kurva berada di bawah atau di atas sumbu t dalam rentang $1 \le t \le 4$.</td></tr>
<tr><td>Dari gambar dapat dilihat bahwa dalam interval $1 < t < 3$ kurva berada di bawah sumbu t, dan dalam interval $3 < t < 4$ kurva berada di atas sumbu t. Hal ini menunjukkan terjadi pembalikan arah, dan harus berhati-hati ketika menghitung jarak.</td></tr>
<tr><td> 
</td><td>Hubungan antara integral tertentu dan luas daerah mempunyai analogi dengan hubungan antara perpindahan dan jarak, yaitu:
a. Perpindahan
= - A1 + A2
b. Jarak = A1 + A2</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>Gunakan penalaran langsung dan Gunakan rumus.</td><td>Terapkan integral tertentu dengan memperhatikan batas-batas di mana v(t) negatif dan positif (Passow, E. 1996).
Perhatikan batas-batas pengintegralan.
Terapkan rumus:
a. Perpindahan = s(4)-s(1) = $\int_1^4 v(t)dt$.
b. Jarak = $\int_1^3 |v(t)|dt + \int_3^4 v(t)dt$.</td></tr>
</table>

Magister Scientiae - ISSN: 0852-078X
Edisi No. 32 - Oktober 2012

Tahapan Model Polya	Tahap 3: Melaksanakan rencana
Melakukan pengintegralan sesuai dengan yang direncanakan pada langkah 2.	a. Perpindahan = s(4) – s(1) $= \int_1^4 v(t)dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)dt$ $= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4$ $= -\frac{32}{3} - \left(-\frac{37}{6}\right) = -\frac{9}{2}$ Ini berarti partikel berpindah 4,5 m ke arah kiri. b. Jarak yang ditempuh $= \int_1^3 \lvert v(t)\rvert dt + \int_3^4 v(t)dt$ $= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)dt$ $= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 = \frac{61}{6} = 10,17\ m$ $= \frac{44}{6} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6} = 10,17\ m.$

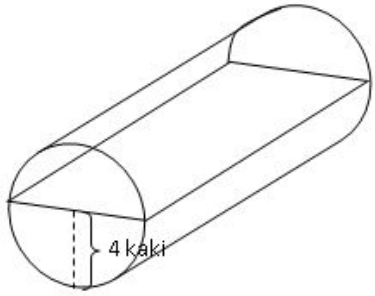
Tahapan Model Polya	Tahap 4: Melihat kembali, periksa solusi yang diperoleh
• Melihat kembali apakah setiap langkah sudah benar sehingga mendapat jawaban akhir yang benar. • Memeriksa kewajaran hasil hitungan. • Apakah ada cara lain untuk menjawab soal ini.	Melihat kembali dengan membandingkan angka hasil perhitungan perpindahan (p) dengan jarak (j). Tanda dari angka perpindahan bisa negative (-) atau positif (+). Sedangkan tanda dari angka jarak selalu positif (+). Melihat kembali juga harus dilakukan dengan menggunakan logika atau kewajaran tentang besar angka hasil hitungan. Perhatikan hal berikut: • Haruslah $p \leq j$. Jika gerakan partikel tidak berbalik arah maka $\lvert p\rvert = j$. • Jika gerakannya mengalami pembalikan arah maka $p < j$. • Jika diambil kesepakatan bahwa perpindahan ke

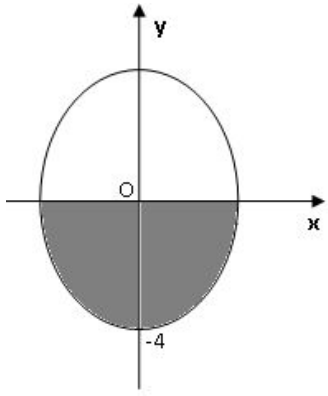
	kanan bertanda positif, maka perpindahan yang bertanda negatif menunjukkan bahwa partikel lebih banyak bergerak ke kiri; dengan perkataan lain, lintasan ke kiri lebih panjang dari lintasan ke kanan. Pada soal ini diperoleh: a. Perpindahan (p) = -4,5 m. b. Jarak tempuh (j) = 10,17 m. Terlihat bahwa p < j, jadi memenuhi logika. Cara lain adalah mencari A1, A2, kemudian menggunakan rumus: a. Perpindahan = - A1 + A2 b. Jarak = A1 + A2



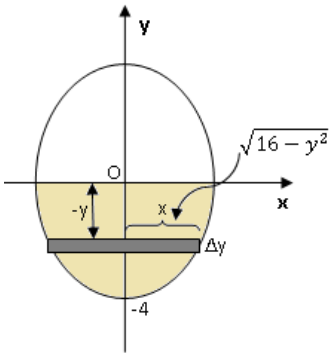
Contoh 2. Sebuah tong diletakkan mendatar pada tanah seperti pada gambar. Ujung-ujung tong berbentuk lingkaran dengan diameter 8 kaki.Tong diisi dengan minyak hingga separonya. Jika kepadatan minyak $\delta = 50$ pon per kaki kubik, hitunglah gaya total pada salah satu ujung ini (Purcell, R.J. & Varberg, D, 1987).

Tahapan Model Polya	**Tahap 1: Pahami masalah**
Apa yang dicari, apa yang diminta oleh soal.	Gaya total pada pada salah satu ujung tong.
Apa yang diketahui. Apa persyaratannya (kondisinya).	Diameter tong 8 kaki, atau jari-jarinya 4 kaki. Kepadatan minyak $\delta = 50$ pon per kaki kubik
Apakah telah dipahami semua kata (terutama kata kunci) yang digunakan dalam persoalan ini?	Kepadatan berarti berat jenis. Diisi separonya, berarti kedalamanya 4 kaki. Pada salah satu ujung berarti pada salah satu tepi yang berbentuk setengah lingkaran (karena hanya diisi separonya).

Adakah gambar atau diagram yang dapat membantu?		Kedalaman minyak 4 kaki, berarti sama dengan jari-jari lingkaran.
Pertanyaan dengan kata-kata sendiri.	Sisi tegak berbentuk lingkaran yang jari-jarinya 4 kaki, berapakah gaya pada sisi ini jika kedalam minyak 4 kaki?	
Apakah ada informasi yang cukup untuk menemukan jawaban? Apakah ada informasi yang berlebihan?	Informasi sudah cukup. Tidak ada informasi yang berlebihan.	
Apakah perlu mengajukan pertanyaan tambahan untuk mendapatkan solusinya?	Perlukah mencari persamaan lingkaran?	

Tahapan Model Polya	**Tahap 2: Merancang rencana**	
• Pilihlah strategi, bila perlu boleh memilih lebih dari satu strategi. • Buatlah gambar atau sketsa. • Kaitkan antara data (apa yang diketahui) dengan apa yang akan dicari. • Analogikan dengan masalah lain.		Buatlah lingkaraan yang berpusat di O(0,0) dengan berjari-jari 4 pada salib sumbu XY. Ambil sumbu y positf pada arah ke atas (lihat gambar). Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ $x = \sqrt{16 - y^2}$ Ambil strip yang jaraknya –y dari O dan lebarnya Δy.

Gunakan penalaran langsung dan Gunakan rumus.	• Cari luas strip yang panjangnya 2 x dan lebarnya Δy. • Nyatakan x dalam y dengan mengingat $x = \sqrt{16 - y^2}$ • Cari Tekanan pada strip: ΔP = δy. • Cari gaya akibat tekanan pada strip: ΔF = ΔP. ΔA. • Pergunakan rumus: $F = \int_a^b dF$

Tahapan Model Polya	**Tahap 3: Melaksanakan rencana**	
Melakukan perhitungan sesuai dengan yang direncanakan pada langkah 2.		Luas strip dihampiri oleh ΔA = 2 xΔy atau $\Delta A = 2\sqrt{16 - y^2}\,\Delta y$
	Tekanan pada sebuah persegi panjang (strip) pada kedalaman - y dihampiri oleh ΔP = δ(- y). dan gayanya adalah ΔF = ΔP. ΔA $= \delta(-y)\, 2\sqrt{16 - y^2}\Delta y$ Sehingga $F = \delta \int_{-4}^{0} \left(-2y\sqrt{16 - y^2}\right) dy$ $= 50\left[\frac{2}{3}(16 - y^2)^{3/2}\right]_{-4}^{0} \approx 2133$ pon.	

Magister Scientiae - ISSN: 0852-078X
Edisi No. 32 - Oktober 2012

Tahapan Model Polya	Tahap 4: Melihat kembali, periksa solusi yang diperoleh
• Melihat kembali apakah setiap langkah sudah benar sehingga mendapat jawaban akhir yang benar. • Apakakah semua data yang relevan telah terpakai? • Apakah kondisi atau persyaratan telah terpenuhi • Memeriksa kewajaran hasil hitungan.	Langkah-langkah sudah sesuai dengan rencana tanpa perubahan. Semua data telah terpakai. Jawaban bertanda positif dan satuannya sudah sesuai.

Kesimpulan

Alur berpikir dalam buku ini menginflementasikan alur Polya's Model, suatu model yang ditulis oleh George Polya, seorang matematikawan terkemuka dalam bukunya *How to solve it.* Polya menyarankan empat tahap dalam pemecahan masalah, yaitu: *understandiing the problem, devising a plan, carrying out the plan, dan looking back.* Hasil penelitian menunjukkan bahwa inplementasi Polya's Model dalam bentuk baris-kolom (tabel) antara tahap-tahap Polya dan contoh kasus dapat menuntun mahasiswa mempermudah menyelesaikan masalah tentang aplikasi integral dalam fisika.

Daftar Pustaka

Arcana, N. 2012. *Pengembangan Modul Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dari Polya untuk Menyelesaikan Soal-Soal Aplikasi Kalkulus Integral Dalam Fisika.* Surabaya: Universitas Katolik Widya Mandala Surabaya (laporan penelitian).

Ayres, FJR. 1972. *Theory and Problems of Calculus*. New York: McGraw-Hill Company.

Huat, J.N.C & Lim Kian, H. 2000. *A Handbook for Mathematics Teacher in Primary Schools.* Singapore: Federal Publications.

Passow, E. 1996. *Undertanding Calculus Concepts.* New York: McGraw-Hill.

Polya, G. 1945. *How To Solve It, A New Aspect of Mathematical Method (Second edition)*. New Jersey: Princeton University Press.

Purcell, R.J. & Varberg, D. 1987. *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Ryan, M. 2003. *Calculus for Dummies. Indiana: Wiley Publishing Inc.*

Stewart, J. 1998. *Calculus*, 4th *edition*.Thomson Publishing Inc.