

## ANALISIS GETARAN NON LINIER DAN FENOMENA CHAOS PADA SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL DUFFING

Anwar Dolu\* dan Burhan Tatong\*

### Abstract

*Duffing Equation is models vibration equation with stiffness non linear degree three (3). In this study by evaluation of vibration case non linear and special case linear vibration. Solution of differential equation Duffing uses numerical method Runge – Kutta with software application MAPLE ver. 14. Amplitude that evaluated for case hardening spring and softening spring, where getting smaller load excitation and ever greater damping value then wide jumping movement area/unstable on the decrease. At vibration case non linear with phenomenon chaos then with overview of time history very sensitive to initial condition with small change to its initial condition then will happen big change in system with time increase. For phase plane show irregular path and non stationary, this condition are seen also with at mapping Poincare that show random attraction pattern and show pattern fractal.*

**Key words :** *Vibration Nonlinear, Duffing Equation, Runge-Kutta, Chaos*

### Abstrak

Persamaan Duffing merupakan model persamaan getaran dengan kekakuan non linier derajat tiga (3). Dalam kajian ini dengan meninjau kasus getaran non linier serta kasus khusus getaran linier. Penyelesaian persamaan diferensial Duffing menggunakan metode numerik Runge – Kutta dengan aplikasi software MAPLE ver. 14. Amplitudo yang ditinjau untuk kasus pegas yang dikeraskan (*hard spring*) dan pegas yang dilunakkan (*soft spring*) dimana semakin kecil eksitasi gaya dan semakin besar nilai redaman maka lebar daerah lompatan/tidak stabil semakin berkurang. Pada kasus getaran non linier dengan fenomena chaos maka dengan tinjauan sejarah waktu (*time history*) sangat sensitif terhadap syarat awal dengan perubahan yang kecil terhadap syarat awalnya maka akan terjadi perubahan besar dalam sistem dalam hal ini perpindahan  $x(t)$  dengan pertambahan waktu ( $t$ ). Untuk Bidang Fase (*phase plane*) menunjukkan lintasan yang tidak beraturan dan non stasioner, hal ini terlihat juga dengan pada pemetaan Poincare (*Poincare map*) yang menunjukkan pola tarikan yang acak (*strange attractor*) dan memperlihatkan pola fraktal.

**Kata Kunci :** *Getaran Non Linier, Persamaan Duffing, Runge-Kutta, Chaos.*

### 1. Pendahuluan

Dalam kondisi nyata sebagaimana besar sistem struktur bersifat non linier sampai taraf tertentu, dan dalam kasus khusus disederhanakan menjadi sistem yang linier. Ketaklinieran dapat disebabkan oleh suatu faktor, atau kombinasi dari beberapa faktor-faktor

seperti kekakuan variabel, material maupun dalam persamaan pengatur dengan kekakuan dan redaman non linier. Pada sistem linier, sebab dan akibat berhubungan secara linier ; yaitu jika beban dilipat-duakan maka respons akan dilipat-duakan. Dalam sistem nonlinier hubungan antara sebab dan

---

\* Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Tadulako, Palu

akibat ini tidak sebanding lagi. Misalnya yang terjadi pada tekuk kolom, dan getaran sistem mekanis dengan gaya pemulih (*restoring*) nonlinier. Persamaan semacam ini dibedakan dari persamaan linier pada prinsip superposisi yang tidak berlaku untuk solusinya. Prosedur analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial non linier relatif sulit, solusi eksak yang diketahui relatif sedikit jumlahnya dan sebagian besar kemajuan dalam pengetahuan sistem nonlinier ini adalah dari pendekatan (metode numerik) dan solusi grafik dengan menggunakan aplikasi komputer.

Persamaan non linier yang menggambarkan osilator dengan ketaklinieran pangkat tiga disebut Persamaan Duffing (Georg Duffing, 1918). Persamaan Duffing, digunakan oleh banyak peneliti sebagai suatu pendekatan model banyak sistem fisik, persamaan ini memperlihatkan satu jangkauan sangat luas dari perilaku dalam sistem dinamika non linier. Sejak tahun 1970-an, semakin populer dengan penelitian dalam bidang chaos (kacau), hal ini mungkin karena merupakan salah satu dari persamaan sederhana yang menggambarkan perilaku chaos dari suatu sistem getaran non linier.

## 2. Persamaan Deferensial Gerak

Persamaan gerakan dari sistem sederhana seperti gambar (1) dapat dirumuskan dengan kesetimbangan gaya menggunakan prinsip d'Alembert. Aksi dari gaya dalam arah perpindahan dengan gaya yang diterapkan  $F(t)$  dan tiga gaya perlawanan yaitu gaya inersia  $F_I(t)$ , gaya redaman  $F_D(t)$  dan gaya pegas  $F_S(t)$ . persamaan gerakan tersebut dalam bentuk kesetimbangan gaya adalah:

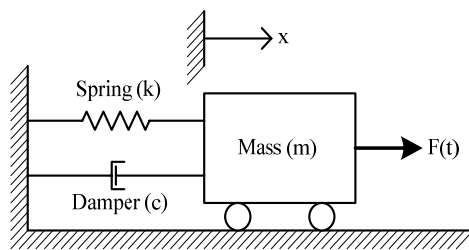
$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

Untuk gaya Inersia  $F_I(t) = m\ddot{x}$ , gaya redaman  $F_D(t) = c\dot{x}$  dan gaya pegas  $F_S(t) = kx$ , kemudian disubstitusi ke Pers. (1), hingga diperoleh persamaan diferensial yang menyatakan sistem getaran linier yaitu:

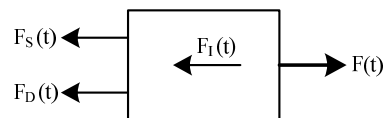
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad \dots\dots\dots(2)$$

Untuk simbol  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  dan  $\dot{x} = dx/dt$ , dalam bentuk non dimensional pers. (1) menjadi:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x = \bar{F}(t) \quad \dots\dots\dots(3)$$



(a) komponen dasar



(b) kesetimbangan gaya

Gambar 1. Idealisasi Gerakan ;

Sedang untuk Persamaan diferensial getaran non linier dengan redaman linear dan kekakuan non-linier disebut persamaan Duffing (*Duffing's equation*):

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x \pm \beta x^3 = \bar{F} \cos(\Omega t) \quad \dots\dots\dots(4)$$

Untuk tanda  $\pm$  menyatakan pegas yang dikeraskan (*hard spring*) dan pegas yang dilunakkan (*soft spring*). Sedangkan persamaan gerakan dengan redaman nonlinier yang dikenal sebagai persamaan Van der Pol:

$$\ddot{x} - \mu\dot{x}(1-x^2) + \alpha x = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

### 2.1 Solusi Persamaan Diferensial Gerak

Dengan penyelesaian langsung yaitu untuk solusi harmonis kondisi tetap (*steady-state*) dari pegas yang dikeraskan (*hard spring*) sesuai dengan pers. (4):

$$x = X \cos(\Omega t - \theta) \quad \dots\dots\dots(6)$$

Dengan menyelesaikan pers.(6) untuk turunan pertama ( $dx/dt$ ) dan kedua ( $d^2x/dt^2$ ) serta substitusi ke persamaan (4) dan menyelesaikannya dalam fungsi amplitudo (X), maka diperoleh persamaan non linier berikut:

$$X^2 = \frac{\bar{F}^2}{\left[4\zeta^2\Omega^2 + \left(\Omega^2 - \alpha - \frac{3}{4}\beta X^2\right)^2\right]} \quad \dots\dots\dots(7)$$

Dengan normalisasi maka diperoleh:

$$\omega^2 = \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}}, \quad \xi = \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha}}, \quad A^2 = \frac{\beta}{\alpha} X^2, \quad f^2 = \frac{\beta}{\alpha^3} \bar{F}^2$$

$$A^2 = \frac{f^2}{\left[4\xi^2\omega^2 + \left(\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}A^2\right)^2\right]} \quad \dots\dots\dots(8)$$

Untuk kurva tulang punggung (*backbone curve*) pada pegas yang dikeraskan (*hard spring*) yang didefinisikan oleh persamaan berikut:

$$\omega^2 = 1 + \frac{3}{4}A^2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

Pada kasus pegas yang dilunakkan (*soft spring*) dengan  $\alpha > 0$  dan  $\beta < 0$  dari persamaan (4), maka amplitudo normalisasi sesuai pers (8) diperoleh:

$$A^2 = \frac{f^2}{\left[4\xi^2\omega^2 + \left(\omega^2 - 1 + \frac{3}{4}A^2\right)^2\right]} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Dimana:

$$A^2 = -\frac{\beta}{\alpha} X^2, \quad f^2 = -\frac{\beta}{\alpha^3} \bar{F}^2$$

Untuk kurva tulang punggung (*backbone curve*) pada pegas yang dilunakkan (*soft spring*) yang didefinisikan oleh persamaan berikut:

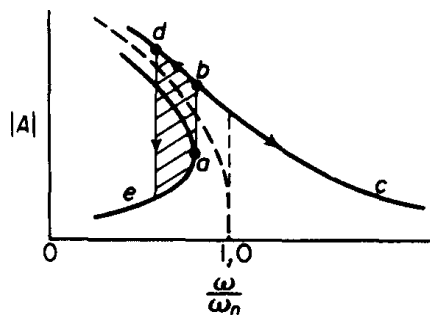
$$\omega^2 = 1 - \frac{3}{4}A^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

### 2.2 Respon Frekuensi

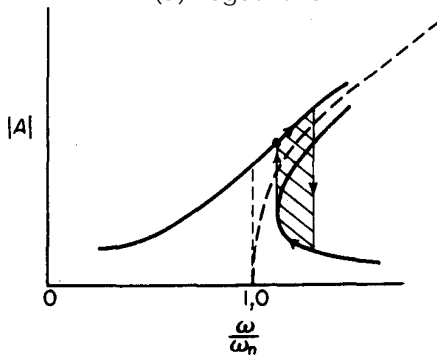
#### • Gejala lompatan

Dalam kasus ini sebagai konsekwensi solusi persamaan (8 & 10), diperoleh bahwa amplitudo A mengalami lompatan diskontinu yang mendadak di dekat resonansi. *Gejala lompatan* ini dapat dijelaskan sebagai berikut, untuk pegas yang dilunakkan (*soft spring*) dengan bertambahnya frekuensi eksitasi, maka amplitudo bertambah hingga titik 'a' dalam Gambar 2a tercapai. Amplitudo tiba-tiba melompat ke suatu nilai yang lebih tinggi yang ditandai oleh titik 'b', dan menurun sepanjang kurva ke kanan. Dalam mengurangi frekuensi

dari suatu titik 'c', amplitudo akan bertambah melalui titik 'b' menuju titik 'd', dan tiba-tiba turun ke suatu nilai yang lebih kecil 'e'. Daerah yang diarsir dalam gambaran amplitudo frekuensi adalah tidak stabil; luas ketidakstabilan tergantung pada faktor-faktor seperti jumlah redaman yang ada, laju perubahan frekuensi rangsangan dan lain-lain. Untuk pegas yang dikeraskan sebagai ganti pegas yang dilunakkan, maka dapat digunakan analisis yang sama dan hasilnya adalah sebuah kurva yang jenis-nya seperti terlihat dalam Gambar 2b.



(a) Pegas Lunak



(b) Pegas Keras

Gambar 2. Karakteristik Pegas Lunak (*Soft Spring*) dan Pegas Keras (*Hard Spring*)

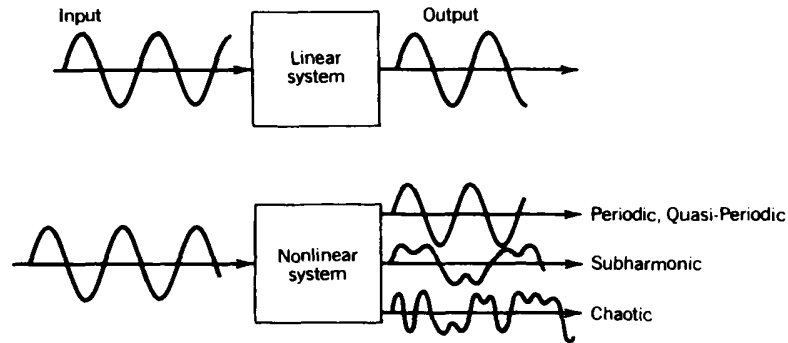
• Pengaruh redaman

Dalam kasus tanpa redaman kurva amplitudo frekwensi mendekati kurva tulang punggung (*backbone curve*) secara asimptotis. Hal ini juga terjadi dalam kasus linear dimana kurva tulang punggung adalah garis vertikal pada  $\omega/\omega_n = 1$ . Dengan jumlah redaman yang kecil, maka sifat sistem tidak berbeda banyak dengan sistem tanpa redaman. Bagian atas kurva tidak akan mendekati kurva tulangpunggung secara asimptotis tetapi akan memotong kurva kontinu. Gejala lompatan pun terjadi dalam kasus ini tetapi redaman pada umumnya cenderung untuk mengurangi ukuran luas daerah yang tidak stabil.

3. Perilaku Sistem Dinamis

Pada sistem dinamis diperlukan suatu diagnosa karena adanya osilasi yang tak dikehendaki dalam sistem fisik tersebut. Kemampuan untuk mengklasifikasikan sifat alami osilasi bisa menyediakan suatu petunjuk hingga bagaimana untuk mengendalikannya. Sebagai contoh, jika sistem adalah linier, osilasi periodik yang besar mungkin saja dilacak pada efek resonansi. Jika sistem adalah nonlinier, satu siklus batas mungkin saja sumber getaran periodik, yang pada gilirannya dapat dilacak pada beberapa ketidakstabilan dinamis dalam sistem.

Dalam sistem dinamis linier maupun non linier masing masing mempunyai karakteristik input - output yang berbeda-beda. Pada sistem linier dengan input periodik akan menghasilkan output periodik, maupun quasi periodik, sedangkan pada sistem non linier dengan input periodik akan menghasilkan output periodik, quasi periodik, subharmonic dan chaotic.



Gambar 3. Input – output sistem linear dan nonlinier

### 3.1. Perilaku Chaotic

Pada sistem non linier, dengan output gejala chaotic merupakan bidang yang banyak dikaji saat ini (*state of the art*). Chaos adalah suatu fenomena dinamis. Problem chaos pertama kali dipelajari oleh H. Poincare (1854 – 1912). Contoh yang terkenal adalah perilaku cuaca dari E. Lorenz dengan efek kupu-kupu (*butterfly effect*), dengan konsekwensi penemuannya “dua keadaan yang jumlah perbedaannya tidak signifikan pada saat awal akan berevolusi menjadi dua keadaan yang sangat besar perbedaannya diwaktu yang akan datang”. Ueda menggambarkan fenomena chaotic dalam sistem dinamis diatur oleh persamaan Duffing pada akhir tahun 1970-an (Ueda, 1979). Penelitian inovatif masalah resonansi subharmonic dan gerakan acak (chaos) dari struktur lepas pantai (offshore) diterbitkan oleh Thompson dan Stewart (1986), serta kajian dari Patrick de Leeuw (1989).

Dalam rangka untuk identifikasi gerakan nonperiodik maupun gerakan chaotic (*chaotic motions*), berikut beberapa langkah antara lain :

- (a) Sejarah waktu (*time history*) dari sistem berupa perpindahan, kecepatan & percepatan.

- (b) Sejarah bidang fase (*phase plane history*).
- (c) Pemetaan Poincare (*Poincare map*).
- (d) Mencari pencabangan (*bifurcations*) dan rute kearah chaotic (*routes to chaos*).

### 3.2 Bidang Fase

Dalam sistem otonomi waktu ‘t’ tidak muncul secara eksplisit dalam persamaan diferensial gerak. Jadi hanya diferensial dt yang muncul dalam persamaan tersebut. Suatu persamaan diferensial gerak sebagai berikut:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

Dimana  $f(x, x')$  dapat dianggap suatu fungsi nonlinier  $x$  dan  $x'$ . Dalam Bidang Fase persamaan tersebut diatas dapat dinyatakan dalam dua persamaa orde pertama berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \ddot{x} = -f(x, y) \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

Jika  $x$  dan  $y$  adalah koordinat kartesian, maka bidang  $xy$  disebut bidang fase (*phase plane*). Keadaan suatu sistem didefinisikan oleh koordinat  $x$  dan  $y = x'$ , yang menggambarkan suatu titik pada

bidang fase, jika keadaan berubah, maka titik pada bidang fase akan bergerak dan akan menghasilkan suatu kurva yang disebut lintasan.

**4. Metode Numerik Runge - Kutta**

Penyelesaian persamaan (4) digunakan metode Rungr - Kutta. Dalam metode ini persamaan diferensial orde dua mula-mula direduksi menjadi dua persamaan orde pertama. Dari persamaan orde dua berikut dengan 1 derajat kebebasan sesuai pers. (4), yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\ddot{x} = [ F\cos(\Omega t) - 2\zeta\dot{x} - \alpha x - \beta x^3 ] \dots(14)$$

Dengan mengambil  $\dot{x} = y$ , persamaan tersebut direduksi menjadi dua persamaan orde pertama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & \dots\dots\dots(15) \\ \dot{y} &= \ddot{x} = f(x, y, t) \end{aligned}$$

x dan y disekitar  $x_i$  dan  $y_i$  dapat dinyatakan dalam deret Taylor. Dengan mengambil pertambahan waktu  $h = \Delta t$

$$\begin{aligned} x &= x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_i h + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2} + \dots \\ y &= y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i h + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2} + \dots \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

Turunan pertama dapat diganti dengan kemiringan (slope) rata-rata dan mengabaikan turunan dengan orde lebih tinggi.

$$x = x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_i h + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2} + \dots \dots\dots(17)$$

$$y = y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i h + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_i \frac{h^2}{2} + \dots$$

Bila digunakan aturan Simpson, maka kemiringan rata-rata dalam selang h menjadi:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{i \text{ rata-rata}} = \frac{1}{6} \left[ \left(\frac{dy}{dt}\right)_i + 4 \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+h/2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+h} \right] \dots\dots\dots(18)$$

Besaran-besaran tersebut selanjutnya digunakan dalam formula pengulangan (iterasi) berikut:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6} [ Y_1 + 2 Y_2 + 2 Y_3 + Y_4 ] \dots\dots\dots(19) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6} [ F_1 + 2 F_2 + 2 F_3 + F_4 ] \end{aligned}$$

Untuk aplikasi metode numerik Runge-Kutta menggunakan software MATLAB yaitu dengan kode **ode45** dan MAPLE dengan kode **rkf45**. Dalam kajian ini digunakan software MAPLE.

Tabel 1. Langkah perhitungan Metode Runge - Kutta

t	x	y = $\dot{x}$	f = $\dot{y} = \ddot{x}$
$T_1 = t_i$	$X_1 = x_i$	$Y_1 = y_i$	$F_1 = f(T_1, X_1, Y_1)$
$T_2 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_2 = x_i + Y_1 \frac{h}{2}$	$Y_2 = y_i + F_1 \frac{h}{2}$	$F_2 = f(T_2, X_2, Y_2)$
$T_3 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_3 = x_i + Y_2 \frac{h}{2}$	$Y_3 = y_i + F_2 \frac{h}{2}$	$F_3 = f(T_3, X_3, Y_3)$
$T_4 = t_i + h$	$X_4 = x_i + Y_3 h$	$Y_4 = y_i + F_3 h$	$F_4 = f(T_4, X_4, Y_4)$

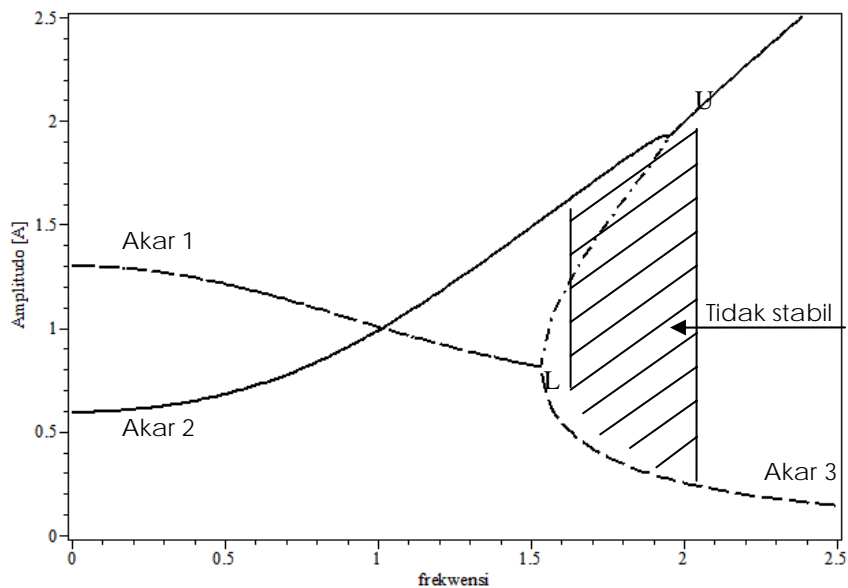
## 5. Studi Kasus

### 5.1. Amplitudo dan Gejala Lompatan

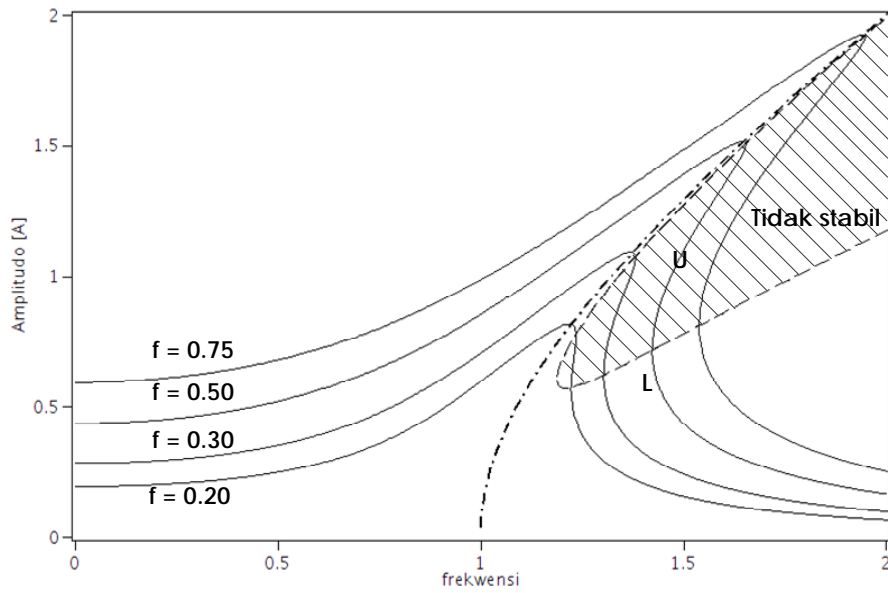
Dari pers. (8) diselesaikan akar dari persamaan non linier yang menghasilkan 3 akar persamaan (gambar 4 untuk  $\xi = 0.1$  dan  $f = 0.75$ ). Kurva respon frekwensi pada gambar 5 dengan mengambil nilai  $\xi$  tetap ( $\xi = 0,1$ ) dan variasi  $f$  (0.2 , 0.3, 0.5, 0.75).

Berdasarkan gambar 4 dan 5, kurva respons frekuensi mempunyai kemiringan (tangen) vertikal di titik U dan L : titik ini adalah titik lompatan (*jump points*) . Bagian dari kurva respons frekuensi antara titik lompatan adalah **tidak stabil**. Jika frekuensi dari eksitasi adalah secara gradual ditingkatkan dari suatu nilai rendah, kemudian di titik U (titik melompat ke bawah), lompatan respon dari resonansi ke cabang non resonansi mengalami satu lompatan atau pencabangan dua titik-pelana (*saddle-node bifurcation*).

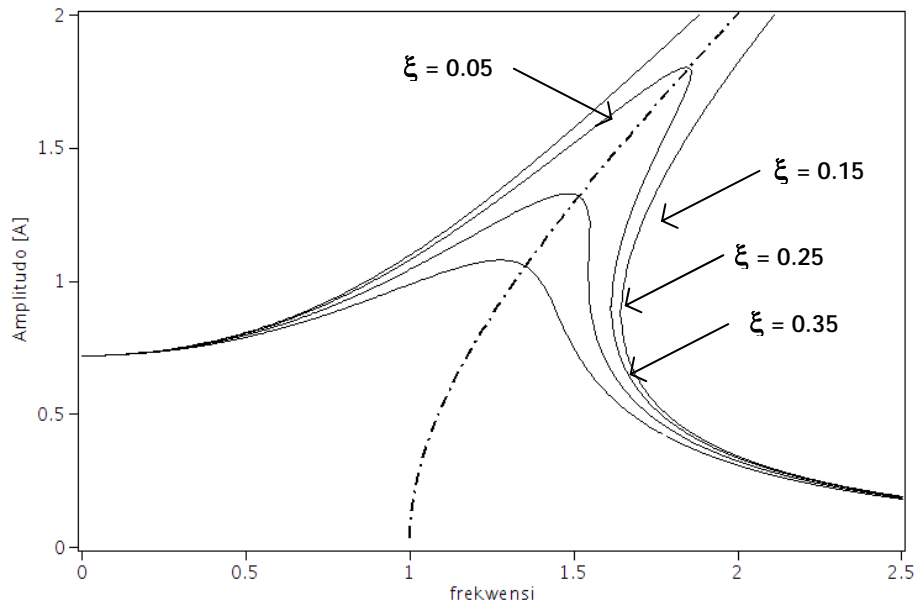
Pada kasus dengan frekuensi awal yang tinggi, dengan frekuensi dari eksitasi adalah secara gradual dikurangi, maka lompatan amplitudo ke resonansi di titik lompatan lebih rendah L (titik melompat keatas). Setelah satu lompatan terjadi, sistem membutuhkan lebih banyak waktu untuk menuju ke posisi tetap (*steady state*). Waktu penyelesaian tergantung pada tingkat eksitasi frekuensi dan besaran redaman (*damping*). Hal itu dengan jelas dilihat bahwa lebar dari daerah lompatan berkurang dengan peningkatan redaman (gambar 6). Dengan sejumlah variasi  $f$  (0.2 , 0.3, 0.5, 0.75) tersebut maka dari gambar 5 tersebut terlihat bahwa solusi tidak stabil adalah daerah yang diarsir, sedangkan garis tengah adalah kurva tulang punggung (*backbone curve*), yang menunjukkan ketergantungan dari frekwensi alami nonlinier terhadap amplitudo dari gerakan.



Gambar 4. Respons Frekwensi untuk  $\xi = 0.1$ ,  $f = 0.75$

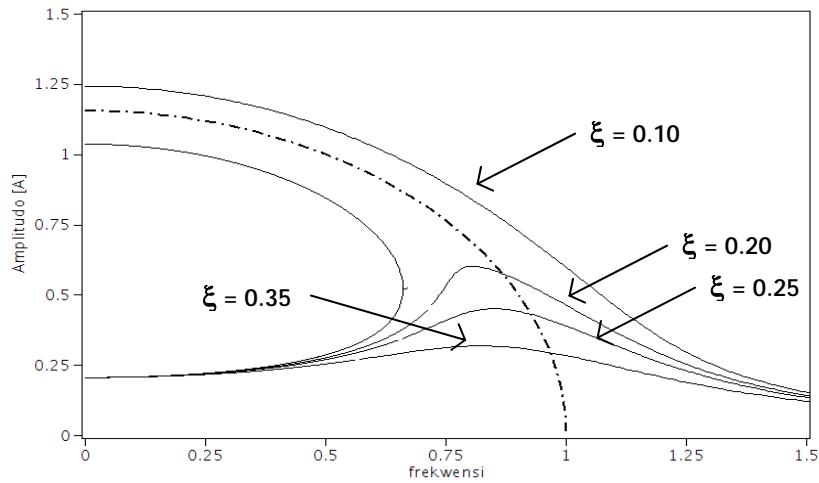


Gambar 5. Respons Frekwensi untuk  $\xi = 0.1$ ,  $f = 0.2, 0.3, 0.5, 0.75$

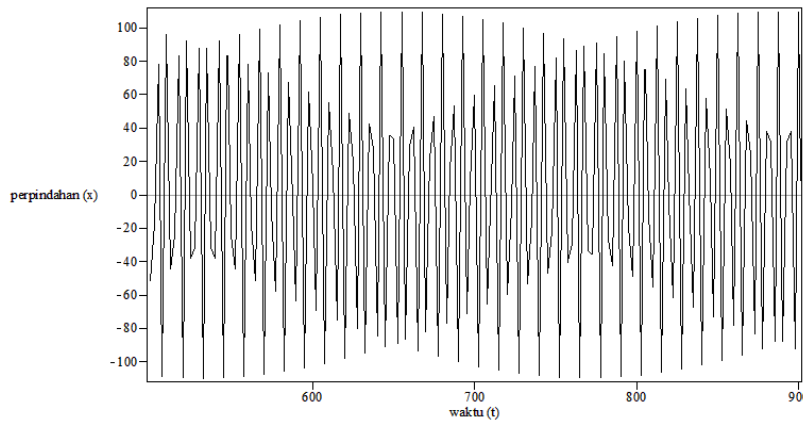


Gambar 6. Respons Frekwensi (*Hard Spring*) untuk  $f = 1$ , dan variasi  $\xi = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35$





Gambar 7. Respons Frekwensi (*soft spring*) untuk  $f = 0.2$ ,  $\xi = 0.1, 0.2, 0.25, 0.35$



Gambar 8. Sejarah Waktu (kasus a.)

Dari gambar 5 dan 6 dapat dilihat, bahwa dengan adanya variasi eksitasi gaya ( $f$ ) dan variasi redaman ( $\xi$ ) yang masing - masing dapat dijelaskan sebagai berikut ; dengan menurunnya nilai  $f$  maka lebar daerah lompatan (daerah tidak stabil) berkurang dan juga semakin besar nilai  $\xi$  maka lebar daerah lompatan (daerah tidak stabil) berkurang. Untuk kasus pegas yang dilunakkan (*soft*

*spring*) dengan solusi persamaan (10) maka perilakunya sama dengan kasus pegas yang dikeraskan (*hard spring*) hanya berbeda arah kurva respon frekwensinya (gambar 7).

### 5.2. Sejarah waktu dan Bidang Fase

Sesuai dengan persamaan (4) dengan mengkaji beberapa kondisi yaitu:

a). Getaran linier dengan parameter sebagai berikut :

$$\zeta = 0,025 ; \alpha = 1 ; \beta = 0 ; \bar{F} = 5,50 ; \Omega = 1,00$$

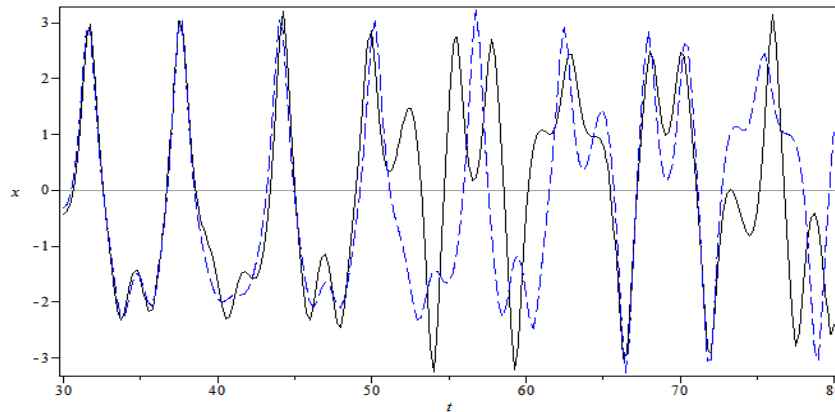
$$x(0) = 0 ; \dot{x}(0) = 0$$

b). Getaran non linier dengan parameter sebagai berikut:

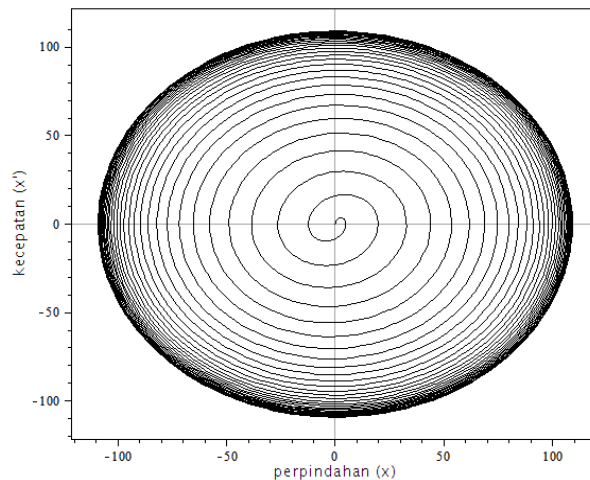
$$\zeta = 0,025 ; \alpha = -1 ; \beta = 1 ; \bar{F} = 5,50 ; \Omega = 1,00$$

$$x_1(0) = 0 ; x_2(0) = 0,01 ; \dot{x}(0) = 0$$

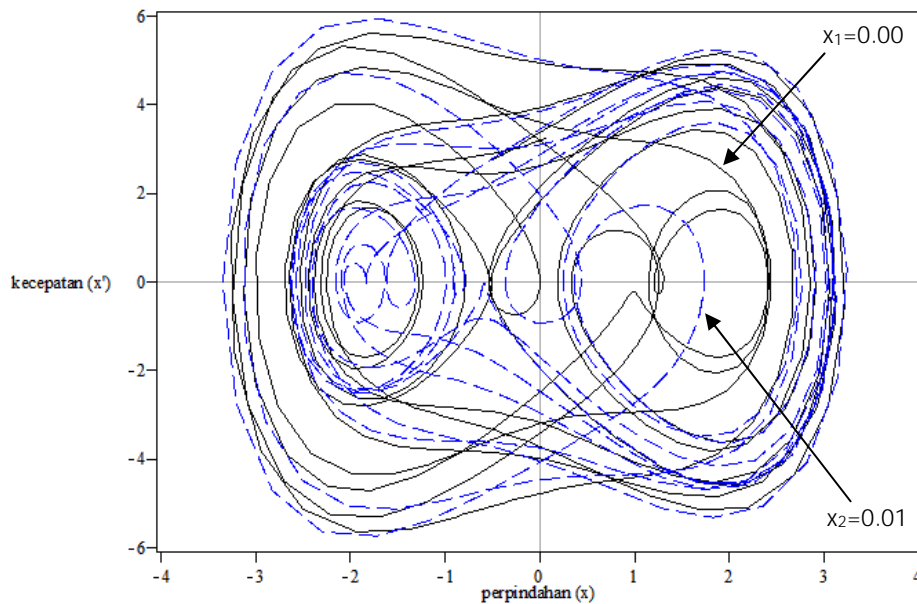
Pada kasus linier (kasus a), maka respons perpindahan terhadap waktu terlihat dengan pola perulangan secara periodik (gambar 8). Sedangkan pada kasus non linier (kasus b) dengan pola perpindahan yang acak, dan juga dalam kasus ini dengan sedikit perubahan pada kondisi awal  $x_1(0) = 0$  menjadi  $x_2(0) = 0.01$ , maka kedua sistem tersebut (dalam hal ini perpindahan) terjadi perbedaan yang besar dengan bertambahnya waktu (gambar 9).



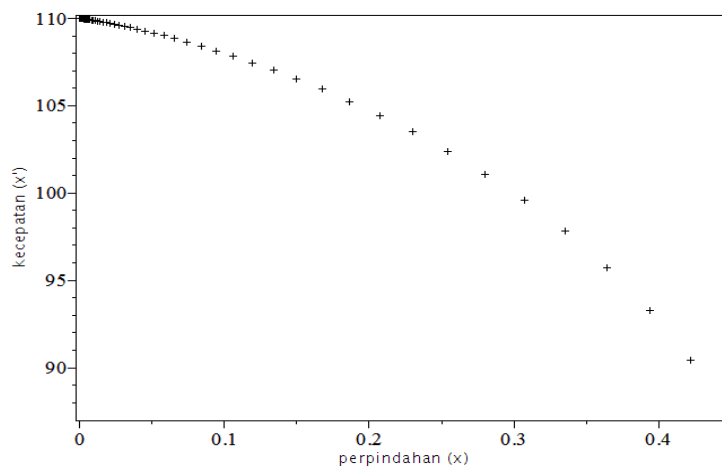
Gambar 9. Sejarah Waktu (kasus b). )



Gambar 10. Bidang Fase (kasus a)



Gambar 11. Bidang Fase (kasus b.)



Gambar 12. Pemetaan Poincare (kasus a.)

Untuk Bidang Fase (*phase plane*) dengan hubungan perpindahan dan kecepatan, maka pada kasus (a) gerakan sistem akan mencapai stasioner (ditunjukkan dengan lintasan yang teratur dan konvergensi di tepi luar

lingkaran pada gambar 10), sangat berbeda dengan kondisi non linier (kasus b) maka Bidang Fasenya mempunyai lintasan yang tidak teratur dan tidak stasioner (gambar 11).

Berdasarkan Bidang Fase (gambar 11 juga terlihat dengan perubahan yang kecil terhadap kondisi awal  $x_1(0) = 0$  menjadi  $x_2(0) = 0.01$ , maka kedua sistem tersebut (dalam hal ini lintasan) terjadi perbedaan yang besar dengan bertambahnya waktu.

### 5.3. Pemetaan Poincare dan Bifurkasi

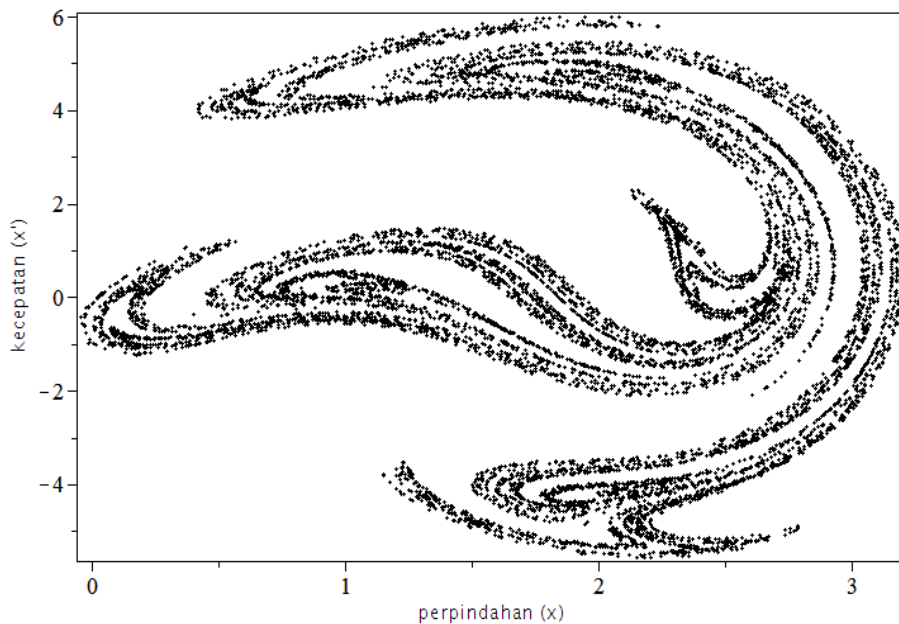
Dengan pemetaan Poincare pada kasus linier (kasus a) yang menunjukkan titik-titik dengan jumlah periode pada sistem tersebut (gambar 12). Pada kasus non linier (kasus b) dengan plot 10.000 titik yang memperlihatkan pola tarikan yang acak (*strange attractor / attractor chaotic*). Pola ini juga dikenal pola fraktal (*fractal*) dimana suatu bagian lokal juga

menggambarkan bagian globalnya (gambar 13).

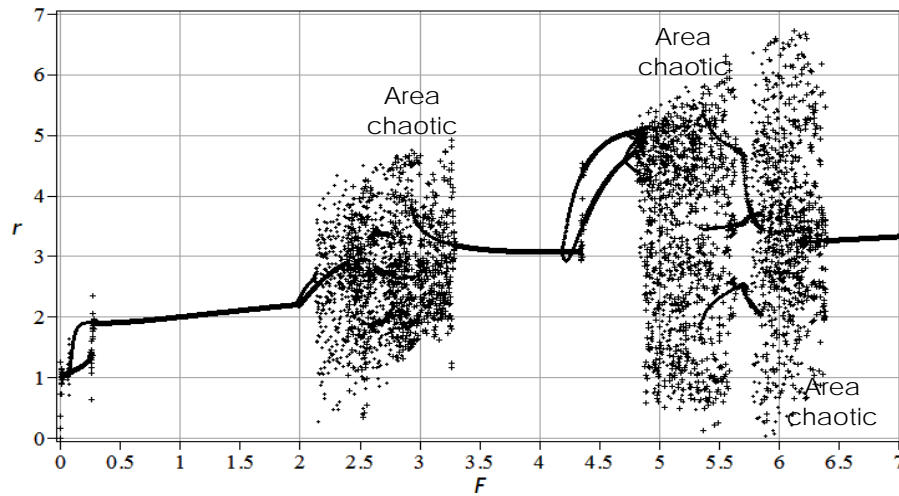
Untuk meninjau kriteria bifurkasi, berdasarkan kasus non linier (kasus b), sesuai dengan parameter sebelumnya yaitu :

$$\zeta=0,025 ; \alpha=-1 ; \beta=1 ; \Omega=1,00 ; x(0)=0 ; \dot{x}(0)=0$$

Sedangkan untuk nilai F dijadikan variabel. Dengan menghitung nilai r sebagai fungsi  $F \{r=f(F)\}$ , maka dapat diplot sesuai dengan gambar (14). Dari gambar tersebut dapat dilihat sebagai contoh, bahwa untuk nilai F berkisar antara 0.5 – 2.0 dan 3.5 – 4.0 termasuk daerah stabil dengan periode tertentu, sedangkan F berkisar antara 2.5 – 3.0 , 5.0 – 5.5, 5.9 – 6.3 termasuk dalam daerah chaotic.



Gambar 13. Pemetaan Poincare (kasus b).)



Gambar 14. Pola Pencabangan (*bifurcations*) pada kasus non linier

## 6. Kesimpulan

- Amplitudo pada sistem non linier mengalami fenomena lompatan dengan lebar daerah lompatan/tidak stabil semakin berkurang dengan semakin kecil gaya eksitasi ( $f$ ) dan semakin besar nilai redaman ( $\xi$ ).
- Perilaku chaotic merupakan sistem dengan ketergantungan sensitif terhadap syarat awal, dimana perubahan kecil terhadap syarat awal akan berpengaruh besar terhadap sistem dengan bertambahnya waktu, hal ini terlihat pada riwayat waktu maupun ruang fase.
- Dari diagram bifurkasi, dengan  $F$  variabel terlihat daerah pencabangan yang menggambarkan periode tertentu ataupun daerah chaos.
- Persamaan Duffing menggambarkan sistem deterministik yang tepat dan dapat menentukan perilaku jangka panjang suatu sistem kacau (*chaotic*) jika kita mengetahui syarat awal dengan tepat.

## 7. Daftar Pustaka

- Thompson, J.M.T. and Stewart, H. B. (1986), *Nonlinear Dynamics and Chaos Geometrical Methods or Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons New York.
- Ueda, Y. (1979), " Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 20, No. 2, pp.181-196.
- Francis G. Moon, *Chaotic Vibration*, John wiley & Sons, 1987, New York.
- Ziauddin Zardar, Iwona Abrams, *Chaos for Beginners*, Icon Brooks, Cambridge, Inggris, 1998.
- Stanley J. Farlow, *Differential equation*, Mc Graw Hill 1984
- Anil K. Chopra, *Dynamics Structure*, Prentice Hall, 1995.
- Farzad K. Naeim, *Seismic design Handbook*.

- Shuichi Asayama, Masato Aizawa, (2000), *Response of Base Isolated Structure in Chaotic Dynamic System Under Earthquake Motion with Large Amplitude*.
- J. Awrejcewicz · V. A. Krysko, (2008), *Chaos in Structural Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Paul S Addison, (1997), *Fractals and Chaos An Illustrated Course*, The Institute of Physics, London
- Stephen Lynch, (2010), *Dynamical Systems with Applications using Maple*, Springer Verlag.
- Patrick de Leeuw, (1989), *The Duffing System Applied To Jacket Type Offshore Structures*.
- Abdelhak Fahsi, Mohamed Belhaq, Faouzi Lakrad, (2009), *Suppression of hysteresis in a forced van der Pol-Duffing oscillator*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14 (2009) 1609–1616.
- Henk Broer & Floris Takens, (2011), *Dynamical Systems and Chaos*, Springer Science+Business Media, Netherlands
- Visarath In , Patrick Longhini & Antonio Palacios, (2009) *Applications of Nonlinear Dynamics Model and Design of Complex Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Ali H. Nayfeh & P. Frank Pai, (2004), *Linear dan Nonlinear Structural Mechanics*, John Wiley & Sons. USA
- Muthukrishnan Sathyamoorthy, (1998), *Nonlinear Analysis of Structures*, CRC Press LLC, USA.