TEOREMA GREEN UNTUK MENYELESAIKAN PERHITUNGAN INTEGRAL GARIS

Prasetiyo Budi Darmono
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Integral merupakan operasi kebalikan dari turunan. Salah satu bentuk dari penerapan integral adalah integral garis. Dalam menyelesaikan perhitungan integral garis dapat dilakukan menggunakan Teorema Green. Teorema ini dipilih karena proses perhitungannya lebih cepat dan tepat. Namun, dalam menggunakan teorema green diharuskan memiliki keahlian dalam mencari turunan parsial.

Pada dasarnya fungsi dari teorema green sama dengan integral garis yaitu untuk mengetahui panjang lintasan sekeliling kurva C. integral sekeliling C seringkali dinamakan suatu integral Contour (integral Lintasan). Teorema green dapat diterapkan dalam kurva atau daerah terhubung sederhana dan berganda.

Kelebihan lain dari teorema green adalah tidak harus memper-hatikan arah positif seperti halnya secara langsung jika dengan cara lang-sung arah positif tersebut berlawanan arah putaran jarum jam.

Kata kunci : *Teorema Green, Integral Garis.*

Pendahuluan

Dalam kerja ilmiah atau teknik, sering dijumpai suatu masalah (problem) untuk mencari akar-akar persamaan yang berbentuk *f(x) = 0*. Bila *f(x)* berbentuk kuadrat, pangkat tiga atau pangkat empat maka ada rumus-rumus aljabar untuk menghitung akar-akarnya. Apabila *f(x)* suatu polinom berderajat tinggi atau berbentuk fungsi transeden seperti
$1 + \cos(x - 5x)$, $e^x - \cos x$,
$\sin(x - 3) + 2x$ dan seterusnya, tidak tersedia metode aljabar untuk menyelesaikannya (solusinya). Untuk itu digukan cara mencari akar-akarnya dengan metode(cara) aproksimasi (pendekatan). Adapun meto-

de yang digunakan antara lain Metode Biseksi, Metode Iteratif, Metode Posisi Salah, Metode Newton-Raphson, Metode Muller, dan lain-lain.

Metode yang sering digunakan untuk menghitung integral antara lain: metode substitusi, integral parsial dan pecahan parsial (Spiegel, 1990:84-85). Di samping itu, diperkenalkan adanya integral garis yang penyelesaiannya menggunakan integral rangkap dua dengan metode berlainan.

Dalam tulisan ini diuraikan teorema untuk menyelesaikan integral garis. Teorema tersebut adalah Teorema Green oleh George Green.

Integral Garis Riil

Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ adalah fungsi riil dari x dan y yang kontinyu di semua titik pada kurva C, maka integral garis riil dari $Pdx + Qdy$ sepanjang kurva C dapat didefinisikan dengan cara sebagai berikut:

$$\int_c \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right]$$

atau $\int_c Pdx + Qdy$.................. (1)

Perhitungan integral garis dapat dilakukan dengan dua cara.

1. Jika diberikan persamaan kurva C sebagai $y = f(x)$, maka integral garis (1) dihitung dengan menempatkan $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$ dan dua titik dalam kurva C yang dihubungkan adalah (a_1, b_1) dan (a_2, b_2) maka untuk menghitung integral tertentunya:
$$\int_{a_1}^{a_2} P\{x, f(x)\}dx + Q\{x_1 f(x)\}f'(x)dx$$
yang kemudian dihitung biasa.
2. Jika C diberikan $x = g(y)$, maka $dx = g^1(y)$ dan integral garis tersebut menjadi:
$$\int_{b_1}^{b_2} P\{g,(y).y\}g^1(y)dx + Q\{g(y).y\}dx$$

Perhitungan integral garis bertujuan untuk menghitung panjang lintasan kurva dari titik (a_1, b_1) dan (a_2, b_2)menggunakan sifat-sifat yang analog dengan sifat-sifat integral biasa.

Misal :

1. $\int_c [P(xy)dx + Q(xy)]$ atau

$\int_c P(xy)dx + \int_c (xy)dx$

2. $\int_{(a_2b_2)}^{(a_2b_2)} Pdx + Qdy = -\int_{(a_2b_2)}^{(a_1b_1)} Pdx + Qdy$

Jadi pembalikan jalan integrasi akan mengubah tanda integral garis tersebut.

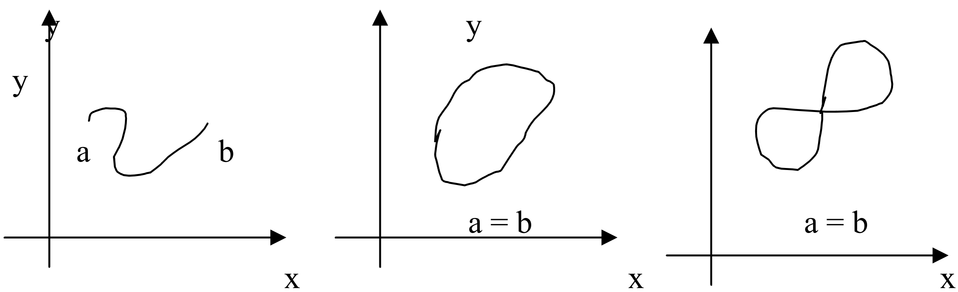
3. $\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} [Pdx + Qdy] = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_3,b_3)} [Pdx + Qdy]$

$+ \int_{(a_3,b_3)}^{(a_2,b_2)} [Pdx + Qdy]$

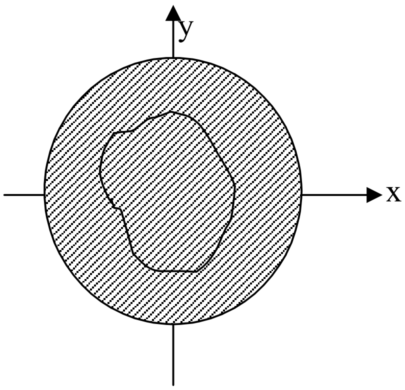
dimana *(a_3, b_3)* sebuah titik lain pada C.

Kurva Tertutup Sederhana Daerah Terhubung Sederhana dan daerah Terhubung Lipat Ganda

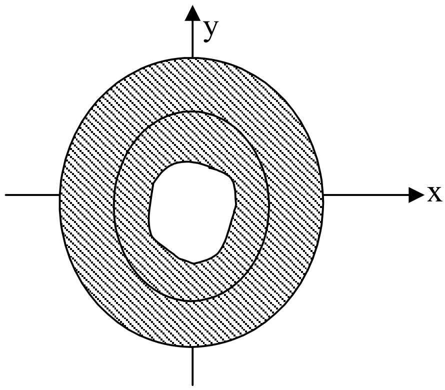
Kurva tertutup seder-hana (simple closed curve) adalah kurva tertutup yang tidak memotong dirinya sendiri di setiap titiknya. Suatu daerah R dinamakan *tertutup sederhana (simply connec-ted)* jika suatu kurva tertutup sederhana yang terletak dalam R dapat menyusut ke suatu titik tanpa meninggalkan R, dan jika tidak demikian maka dae-rah tersebut dinamakan *terhubung lipat ganda (multiply connected).*



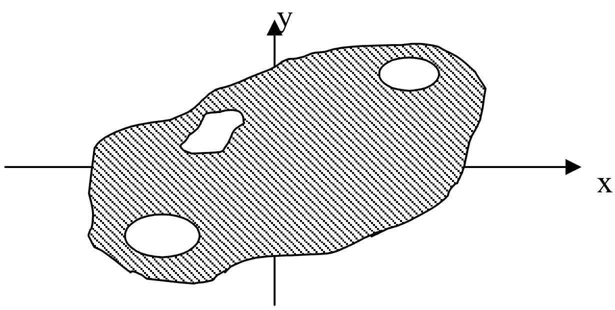
Kurva Kontinu Tertutup dan Sederhana Tertutup, tidak sederhana



Daerah Terhubung Sementara



Daerah terhubung berganda memiliki satu lubang



Daerah terhubung berganda memiliki tiga lubang

Secara intuitif, daerah tertutup sederhana adalah suatu daerah yang tak memiliki "lubang" di dalamnya, sedangkan suatu daerah terhubung berganda memilikinya.

Teorema Green dalam Bidang

Misalkan P(xy) dan Q(xy) suatu fungsi-fungsi yang ditentukan berharga tinggal dan kontinu dalam sebuah daerah sederhana R yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana c dan mempunyai turunan parsial pertama $\left(\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ maka

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_{IR} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dimana $\oint_c$ digunakan untuk menekankan bahwa c tertutup dan bahwa kurva tersebut dijelaskan dalam arah positif.

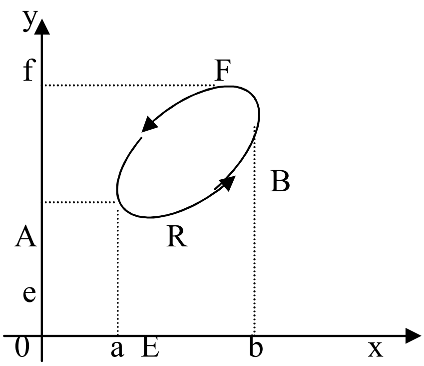
Bukti :

Untuk membuktikannya akan ditunjukkan :

a) $\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \oint P(x_1 y)dx$

b) $\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \oint Q(x_1 y)dy$

Untuk dapat membuktikannya dapat dengan menampilkan R dalam bentuk



Misalkan persamaan kurva AEB dan kurva AFB berturut-turut adalah $y = Y_1(x)$ dan $y = Y_2(x)$. Jika R adalah daerah yang dibatasi oleh C maka kita peroleh :

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y1(x)}^{Y2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} P(x,y) \int_{y=Y(x)_1}^{Y_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [P(x,y_2) - P(x,y_1)]$$

$$= \int_a^b \left[P(x,y_1)dx - \int_b^a P(x,y_2)dx = -\oint_c Pdx \right]$$

Maka $\oint_c Pdx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy \ldots.$ (1)

Demikian juga misalkan persamaan kurva EAF dan kurva EBF berturut-turut adalah $x = X_1(y)$ dan $x = X_2(y)$ maka

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{y=C}^{f} \left[\int_{R=X_1(y)}^{X_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy$$

$$= \int_C^f [Q(x_2,y) - Q(x_1,y)]dy$$

$$= \int_f^C Q(x_1,y)dy + \int_C^f Q(x_2,y)dy$$

$$= \oint_C Qdy$$

Maka $\oint_C Qdy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy$ (2)

Dengan menambahkan (1) dan (2) maka

$$\oint_{Cc} Pdx + Qdy = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

(terbukti)

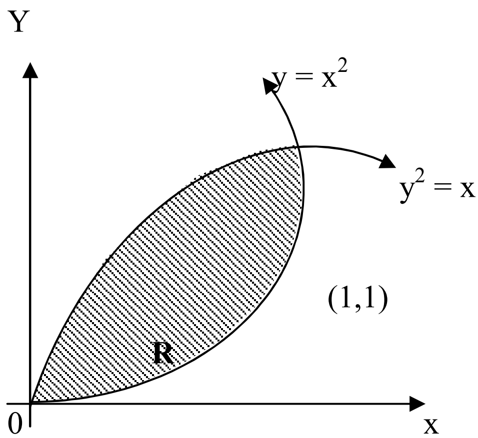
Agar lebih memahami pene-rapan Teorema Green, perhatikan contoh berikut.

1. Jelaskan Teorema Green dalam bidang untuk:

   $$\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

   dimana c adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$.

Penyelesaian



Perpotongan dua kurva :

$x^2 = \sqrt{x}$

$x^2 - \sqrt{x} = 0$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

Kurva-kurva $y = x^2$ dan $y^2 = x$ berpotongan di (0,0) dan (1,1). Arah positif dalam lintasan adalah seperti yang diperlihatkan dalam gambar. Dengan Teorema Green diperoleh:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \iint_R \left\{ \frac{\partial (x + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial (2xy - x^2)}{\partial y} \right\} dxdy$$

$$= \iint_R (1 - 2x) dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dydx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

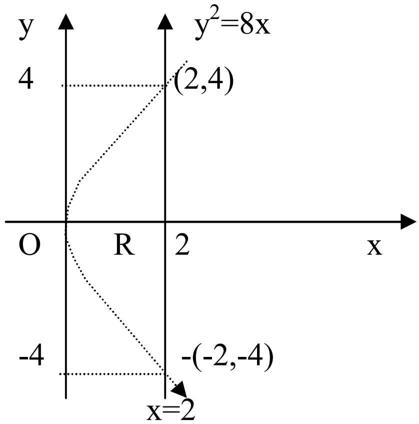
$$= \int_{x=0}^{1} \left(\sqrt{x} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3 \right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{30} \text{ satuan}$$

2. Hitunglah $\oint (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)$ mengelilingi daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 8x$ dan $x = 2$ secara langsung dan dengan Teorema Green

   Penyelesaian:



   a) Secara langsung

      Kurva-kurva bidang $y^2 = 8x$ dan x= 2 berpotongan di (2,4) dan (-2,-4). Arah positif dalam melintasi C diperlihatkan dalam gambar sepanjang x=2, dx = 0, integral garis tersebut menyamai:

$$\int_{y=4}^{-4} (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)dy$$

$$= \int_{-4}^{4} (4y + 3)dy$$

$$= \left[2y^2 + 3y\right]_{-4}^{4}$$

$$= 32 + 12 - 32 + 12$$

$$= 24 \text{ satuan}$$

Sepanjang $y^2 = 8x$,

$dx = \frac{1}{4}y\,dy$ integral garis tersebut sama dengan

$$\int_{y=4}^{-4} (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)dy$$

$$= \int_{4}^{-4} \left[\left(\frac{y^4}{64} - \frac{y^3}{4}\right)\frac{y}{4} + \left(\frac{y^5}{64} + 3\right)\right]dy$$

$$= \int_{4}^{-4} \left(\frac{1}{256}y^5 - \frac{1}{16}y^4 + \frac{y^5}{64} + 3\right)dy$$

$$= \int_{4}^{-4} \left(\frac{5}{256}y^5 - \frac{1}{16}y^4 + 3\right)dy$$

$$= \left[\frac{5y^6}{1536} - \frac{y^5}{80} + 3y\right]_4^{-4}$$

$$= \frac{128}{5} - 24 \text{ satuan}$$

Seluruhnya

$$\int_{y=4}^{-4} (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)dy$$

$$= \frac{128}{5} - 24 + 24 = \frac{128}{5}$$

b) Dengan Teorema Green

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\oint (x^2 - 2xy)dx + (x^2y + 3)dy$$

$$= \iint_R (2xy - 2x)dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (2xy - 2x)dydx$$

$$= \int_0^2 \left[xy^2 - 2xy \right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(8x^2 - 4x\sqrt{2x}\right) - \left(8x^2 + 4x\sqrt{2x}\right) \right] dx$$

$$= -\int_2^0 8x\sqrt{2x}\ dx$$

$$= \frac{128}{5} \text{ satuan}$$

Dari contoh soal di atas dapat terlihat bahwa menggunakan teorema Green pengerjaannya akan lebih mudah. Ini telihat bila kita menggunakan metode secara langsung kita harus meninjau kurva satu persatu sesuai arah positif setelah itu dijumlahkan.

$$= \frac{128}{5} \text{ satuan}$$

Penutup

Dari yang telah diuraikan di depan dapat disimpulkan bahwa penggunaan Teorema Green memiliki keunggulan yaitu lebih cepat dan tepat dibandingkan cara langsung. Namun, kelemahannya adalah kita harus memiliki keterampilan mencari turunan parsial pertama dari P dan Q. Kelebihan yang lain yaitu tidak diharuskannya memperhatikan arah positif seperti dengan cara langsung.

Definisi dari Teorema Green dalam bidang:

“Misalkan P(x,y) dan Q(x,y) suatu fungsi-fungsi yang ditentukan berharga tunggal dan kontinu dalam sebuah daerah sederhana R yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C dan mempunyai turunan parsial pertama $\left(\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ maka

$$: \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Daftar Pustaka

A, Postol.M.Tom. 1985. *Mathemtical Analysis*, Massachusetts: Addison Weskey

Purcell. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 2*, Jakarta: Erlangga

Spiegel, R, Murray, 1990. *Kalkulus Lanjutan Versi S1/Metrik*. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, R, *Murray*. 1994. *Peubah Kompleks*. Jakarta: Erlangga.