

SKETSA GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

$$y = a \sin kx \pm b \cos px$$

Teguh Wibowo

Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Grafik fungsi trigonometri $y = a \sin kx + b \cos px$ dapat dilukis dengan menjumlahkan secara aljabar nilai ordinat $y = a \sin kx$ dan $y = b \cos px$ untuk setiap nilai x pada selang yang ditentukan. Grafik fungsi trigonometri $y = a \sin kx - b \cos px$ lebih mudah diselesaikan apabila diubah dalam bentuk $y = a \sin kx + (-b \cos px)$. Grafik $y = -b \cos px$ dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = b \cos px$ terhadap sumbu x . Menggunakan prinsip yang sama yaitu dengan menjumlahkan setiap nilai dari $y = a \sin kx$ dan $y = -b \cos px$ dapat dilukis grafik fungsi trigonometri $y = a \sin kx - b \cos px$.

Kata kunci : *grafik, fungsi trigonometri*

Pendahuluan

Sketsa grafik fungsi trigonometri telah dipelajari di SMA, yaitu fungsi $y = a \sin kx$ dan $y = b \cos px$ dengan a , b , k dan p suatu konstanta. Untuk fungsi $y = a \sin kx \pm b \cos px$ materi ini di luar silabus kurikulum matematika SMA. Kurikulum matematika SMA tahun 2004 sesuai dengan konsep KBK, tidak secara eksplisit menje-laskannya. Siswa

akan mengalami kesulitan jika menemui soal-soal seperti ini.

Oleh karena itu, tulisan ini sengaja diturunkan untuk mem-bahas secara praktis sketsa grafik fungsi trigonometri

$$y = a \sin kx \pm b \cos px$$

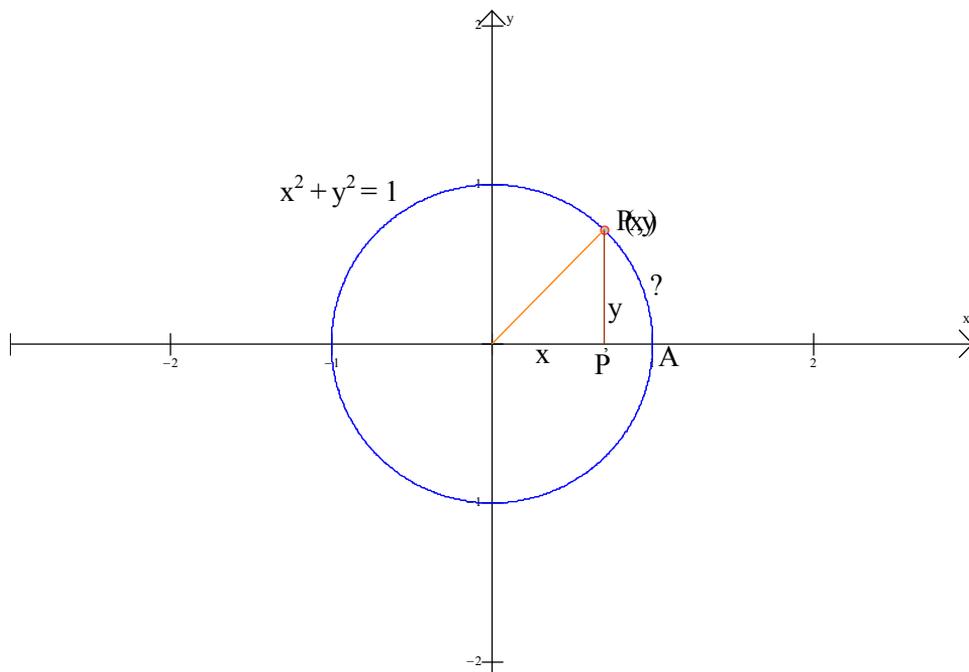
dengan a , b , k dan p suatu kons-tanta. Materi ini dapat dipergunakan sebagai bahan pengayaan oleh guru matematika SMA berkaitan dengan

sub pokok bahasan grafik fungsi trigonometri, sehingga wawasan siswa dan guru semakin bertambah. Bagi mahasiswa pendidikan matematika dapat dipergunakan untuk memperdalam materi grafik fungsi trigonometri pada mata kuliah trigonometri. Kita awali tulisan ini dengan fungsi trigonometri.

Fungsi Trigonometri

Misalkan lingkaran satuan dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1$ berpusat di titik asal sistem koordinat dengan radius 1 (gambar 1). Jika titik $P(x,y)$ terletak di sembarang lingkaran satuan dan titik $(1,0)$ dinyatakan dengan A , maka akan terdapat bilangan positif θ . Panjang busur AP yang diukur menurut arah berlawanan jarum jam dari A sepanjang lingkaran satuan adalah θ .

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1

Keliling lingkaran adalah 2π , sehingga jika $\theta > 2\pi$ diperlukan lebih dari satu putaran untuk menelusuri busur AP. Apabila $\theta = 0$, maka $P = A$. Untuk $\theta > 0$ (dengan memutar berlawanan jarum jam) kita akan mendapatkan sembarang titik $P(x,y)$ demikian juga jika $\theta < 0$ (dengan memutar searah jarum jam) maka akan diperoleh pula sembarang titik $P(x,y)$ pada lingkaran satuan. Pada lingkaran satuan di atas, untuk seti-ap nilai θ (busur dimana terdapat titik $P(x,y)$ pada lingkaran) maka nilai $\sin \theta$ ditunjukkan oleh $y(PP')$, sedangkan nilai $\cos \theta$ ditunjukkan oleh $x(OP')$.

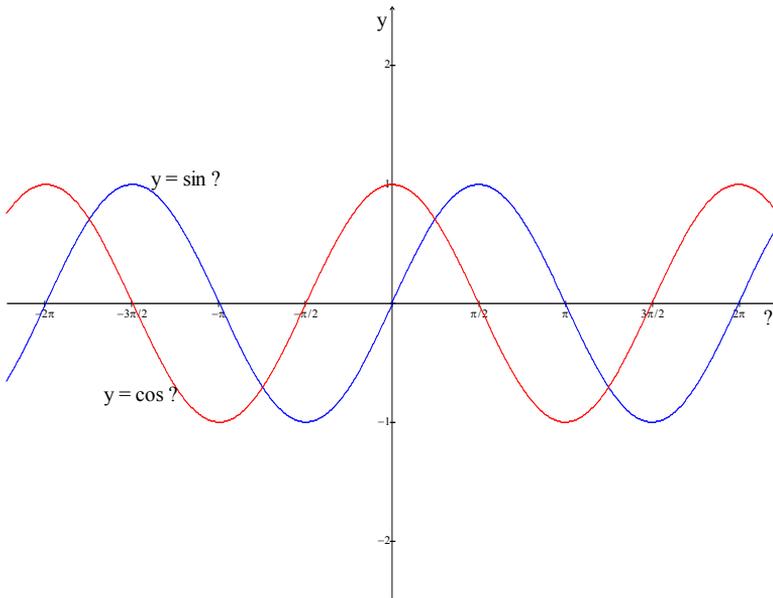
Definisi:

Misalkan θ menentukan titik $P(x,y)$ seperti ditunjukkan pada gambar 1
Maka $\sin \theta = y$ $\cos \theta = x$

Hubungan fungsional ini dinamakan fungsi trigonometri, dimana θ merupakan domain fungsi dalam radian atau derajat, sedangkan y atau x adalah range dari fungsi.

Grafik Fungsi Sinus dan Cosinus

Untuk menggambar grafik fungsi $y = \sin \theta$ dan $y = \cos \theta$, kita ingatkan bahwa daerah hasil kedua fungsi ini adalah selang $[-1,1]$. Grafik fungsi sinus dan cosinus terletak antara garis mendatar $y = 1$ dan $y = -1$. Nilai $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ untuk beberapa sudut istimewa telah diketahui. Dari nilai-nilai ini dapat digambar fungsi sinus $y = \sin \theta$ dan cosines $y = \cos \theta$ berikut.



Gambar 2

Daerah asal fungsi sinus dan cosinus adalah selang $[0, 2\pi]$. Perhatikan bahwa grafik fungsi sinus dan cosinus mempunyai sifat mengulang, sehingga kedua fungsi tersebut dinamakan fungsi periodik. Grafik fungsi sinus dan cosinus akan kembali seperti semula setelah 2π , dengan kata lain periode fungsi tersebut adalah 2π . Karena sifat keperiodikannya, grafik fungsi sinus dan cosinus dapat digeser ke kiri maupun ke kanan. Grafik yang dihasilkan seperti tampak pada gambar 2 yaitu untuk θ dalam selang $[-2\pi, 2\pi]$.

Ada beberapa hal yang dapat diketahui dari grafik pada gambar 2:

1. Daerah hasil $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ berkisar antara -1 sampai 1 .
2. Kedua grafik mempunyai amplitudo 2π .
3. Amplitudonya 1 , yang didapat dari $\frac{1}{2} \times (\text{nilai max} - \text{nilai min})$.
4. Grafik $y = \sin \theta$ simetris terhadap titik asal dan $y = \cos \theta$ simetris terhadap sumbu y .
5. Grafik $y = \sin \theta$ sama seperti $y = \cos \theta$, tetapi digeser $\frac{\pi}{2}$ satuan ke kanan.
6. $y = \sin \theta$ merupakan fungsi ganjil karena $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, sedangkan

$y = \cos \theta$ merupakan fungsi genap karena

$$\cos(-\theta) = \cos \theta.$$

Grafik Fungsi Sinus $y = a \sin kx$

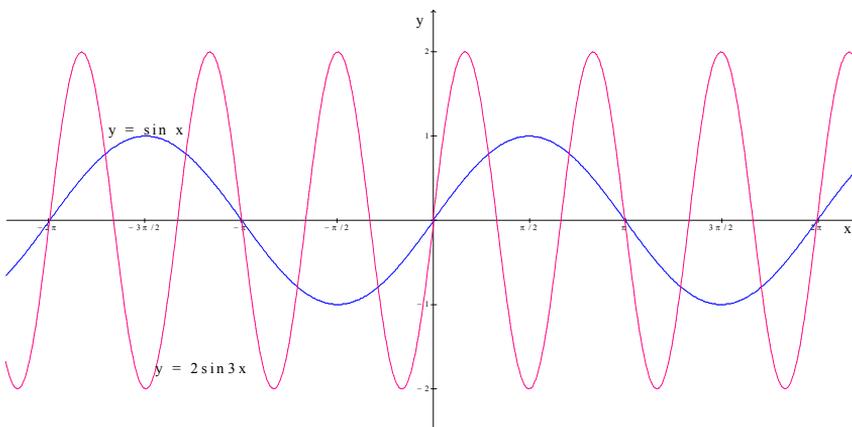
Grafik fungsi $y = \sin x$ (huruf x sebagai ganti dari θ) mempunyai amplitudo 1 dan periode 2π . Fungsi $y = a \sin x$ dengan a suatu konstanta dan $a \neq 0$, nilai dari $y = a \sin x$ adalah a kali nilai $y = \sin x$. Sehingga grafik $y = \sin x$ mempunyai amplitude $|a|$ dan periodenya 2π . Sedangkan grafik $y = a \sin kx$ dengan a, k suatu konstanta $a \neq 0$ dan $k > 0$ mempunyai amplitude $|a|$ dan pe-

riode $\frac{2\pi}{k}$. Dapat disimpulkan bahwa:

Grafik fungsi $y = a \sin kx$ dengan $a \neq 0$ dan $k > 0$ mempunyai amplitudo $|a|$ dan periode $\frac{2\pi}{k}$

Sebagai contoh gambarlah grafik $y = 2 \sin 3x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Diketahui bahwa amplitudo 2 dan periodenya adalah $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Sehingga nilai maksimum suatu fungsi adalah 2 dan nilai minimum adalah -2 . Grafik akan kembali seperti semula setelah $\frac{2\pi}{3}$ atau 120° .

Perhatikan grafik berikut.



Gambar 4

Bagaimana jika nilai a negatif?

Contoh: sketsa grafik $y = -2\sin\frac{1}{2}x$

untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Amplitudo fungsi

$y = 2\sin\frac{1}{2}x$ adalah 2 dengan

periode 4π , Artinya siklus fungsi

$y = 2\sin\frac{1}{2}x$ dalam selang $[0, 4\pi]$

atau dalam selang yang panjangnya

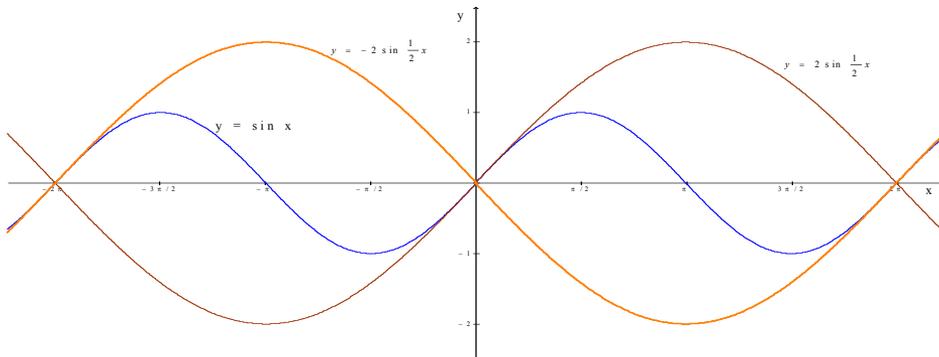
4π . Grafik $y = 2\sin\frac{1}{2}x$ dapat

diperoleh melalui pencerminan

grafik $y = 2\sin\frac{1}{2}x$ terhadap sumbu x .

Grafik ini ditunjukkan pada gambar

5.



Gambar 5

Grafik Fungsi Cosinus

$$y = b \cos px$$

Seperti halnya pada fungsi

$y = a \sin kx$, sketsa grafik fungsi

$y = b \cos px$ dengan $b \neq 0$ dan

$p \neq 0$ dapat dikembangkan dengan

konsep yang sama. Fungsi $y = \sin x$

dan $y = \cos x$ mempunyai

amplitudo 1 dan periode 2π ,

sehingga fungsi $y = b \cos px$

mempunyai amplitudo $|b|$ dan

periode $\frac{2\pi}{p}$. Diperoleh kesimpulan bahwa:

grafik fungsi $y = b \cos px$ dengan

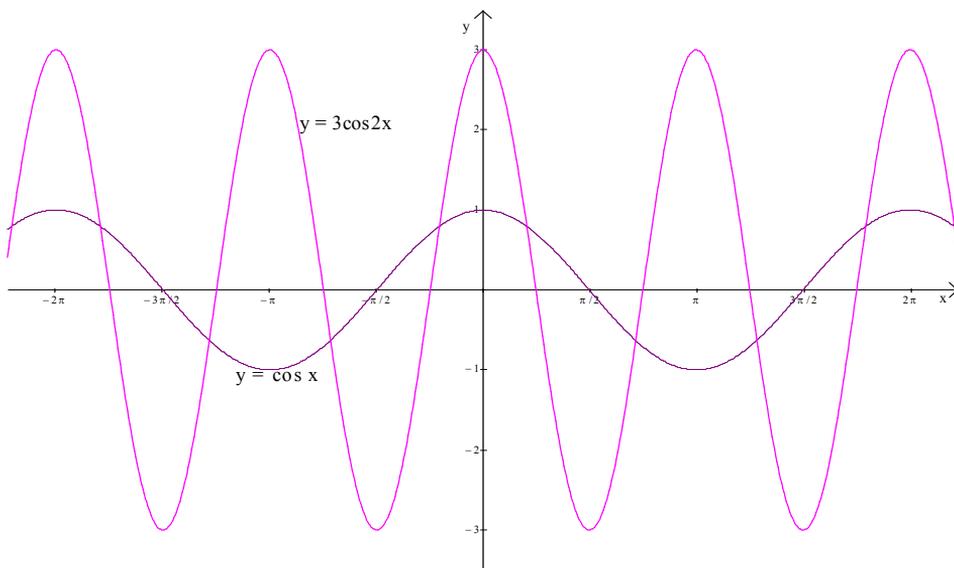
$b \neq 0$ dan $p \neq 0$ mempunyai amplitudo

$|b|$ dan periode $\frac{2\pi}{p}$.

Contoh:

Gambarlah grafik fungsi $y = 3 \cos 2x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Diketahui bahwa amplitudo $y = 3 \cos 2x$ adalah 3 dan periodenya $\frac{2\pi}{2}$ atau π . Jadi nilai maksimum fungsi adalah 3 dan

nilai minimumnya -3 . Grafik akan mengalami siklus atau kembali seperti semula setelah π atau 180° .



Gambar 6

Grafik fungsi trigonometri

Jika nilai b negatif, grafik $y = -b \cos px$ dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = b \cos px$ terhadap sumbu x . Amplitudonya adalah $|-b| = b$ dan periodenya $\frac{2\pi}{p}$.

$y = a \sin kx + b \cos px$ dengan $a, b, k,$ dan p suatu konstanta dapat dikonstruksi melalui pengembangan konsep dari grafik fungsi trigonometri yang kita pelajari. Caranya adalah pertama kita sketsa dulu grafik $y = a \sin kx$ pada sistem koordinat, kemudian kita lukis grafik $y = b \cos px$ pada sistem koordinat yang sama pula. Grafik

Grafik Fungsi Trigonometri
 $y = a \sin kx + b \cos px$

$y = a \sin kx + b \cos px$ dapat dilukiskan dengan menjumlahkan setiap nilai dari $y = a \sin kx$ dan $y = b \cos px$.

Contoh: Sketsa grafik trigonometri $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$ untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$!

Penyelesaian:

Mula-mula lukislah terlebih dulu grafik $y = \sin 2x$, grafik ini mempunyai amplitudo 1 dan periode π atau 180° . Kemudian lukislah grafik $y = 2 \cos 3x$, dengan amplitudo 2 dan periodenya 120° . Grafik $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$ diperoleh dengan

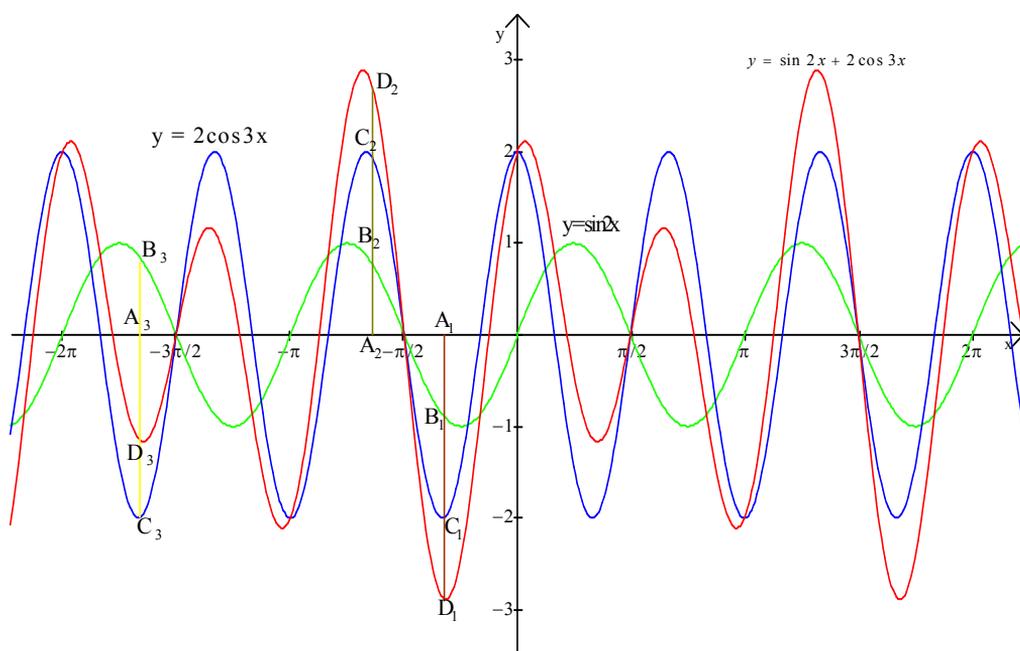
menjumlahkan nilai ordinat $y = \sin 2x$ dan $y = 2 \cos 3x$ untuk setiap nilai x pada selang $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Misal untuk nilai $x = OA_1$, maka ordinat A_1D_1 dari fungsi $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$ merupakan jumlah aljabar ordinat A_1B_1 dari $y = \sin 2x$ dan A_1C_1 dari $y = 2 \cos 3x$.

Jadi $A_1D_1 = A_1B_1 + A_1C_1$

Demikian pula $A_2D_2 = A_2B_2 + A_2C_2$,

$A_3D_3 = A_3B_3 + A_3C_3$ dan seterusnya.

Gambar 7 merupakan sketsa dari fungsi $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$.



Gambar 7

Untuk diingat bahwa nilai ordinat di atas sumbu x adalah positif sedangkan di bawah sumbu x adalah negatif. Nilai ordinat dari $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$ bergantung pada nilai nilai ordinat $y = \sin 2x$ dan $y = 2 \cos 3x$ apakah bernilai positif atau negatif. Hasil penjumlahannya untuk setiap nilai x terlihat pada gambar 7. Konsep ini dapat dikembangkan pula untuk menggambar grafik fungsi trigonometri yang lain berbentuk $y = a \sin kx + b \cos px$ atau $y = a \cos kx + b \sin px$.

Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimana menggambar grafik fungsi trigonometri berbentuk $y = a \sin kx + b \cos px$? Grafik fungsi $y = a \sin kx + b \cos px$ dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma yang sama seperti fungsi $y = a \sin kx + b \cos px$. Agar lebih mudah diselesaikan kita ubah dulu fungsi $y = a \sin kx + b \cos px$ ke dalam bentuk $y = a \sin kx + (b \cos px)$.

Fungsi $y = b \cos px$ diubah menjadi $y = -b \cos px$, kemudian dijumlahkan dengan nilai fungsi $y = a \sin kx$.

Contoh: Untuk $-2\pi \leq x \leq 2\pi$!

Sketsalah $y = 2 \sin \frac{1}{2}x + \cos 2x$,

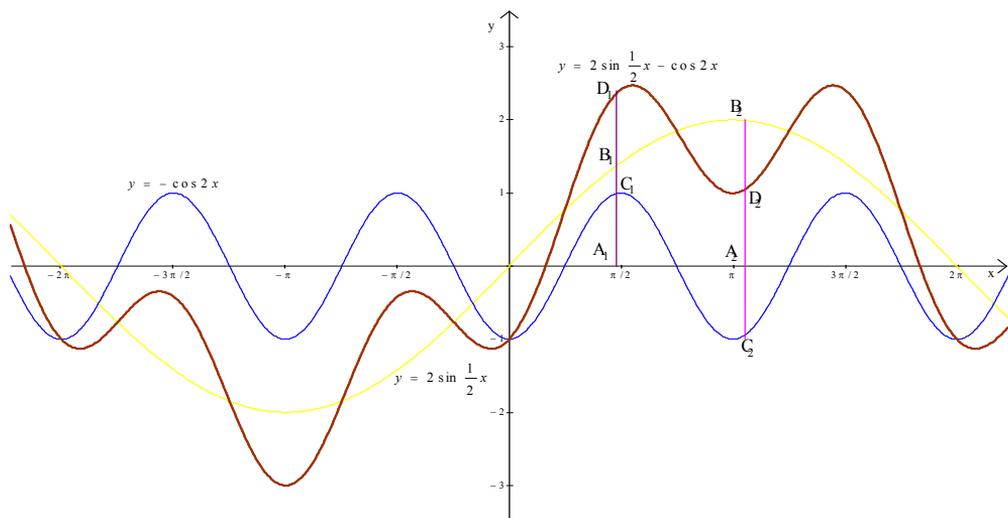
Penyelesaian:

Lukislah terlebih dulu grafik $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$, grafik ini mempunyai amplitudo 2 dan periode 4π . Fungsi $y = 2 \sin \frac{1}{2}x + \cos 2x$ dapat diubah dalam bentuk:

$y = 2 \sin \frac{1}{2}x + (\cos 2x)$. Kemu-

dian dilukis grafik $y = \cos 2x$ yang dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = \cos 2x$ terhadap sumbu x . Amplitudo fungsi $y = \cos 2x$ adalah 1 dan periodenya π atau 180° . Langkah selanjutnya analogi seperti menggambar grafik $y = \sin 2x + 2 \cos 3x$. Gambar 8 merupakan sketsa grafik

$y = 2 \sin \frac{1}{2}x + \cos 2x$.



Gambar 8

Konsep yang sama dikembangkan pula untuk menggambar grafik fungsi trigonometri ber-bentuk:

$$y = -a \sin kx + b \cos px,$$

$$y = -a \sin kx - b \cos px,$$

$$y = -a \sin kx - b \sin px,$$

$y = -a \cos kx - b \cos px$ dan sebagainya.

Penutup

Sketsa grafik fungsi trigonometri $y = a \sin kx + b \cos px$ dapat dilukiskan dengan menjumlahkan nilai ordinat dari $y = a \sin kx$ dan $y = b \cos px$, untuk setiap nilai x pada selang yang ditentukan. Sedang grafik $y = a \sin kx - b \cos px$

dapat dilukiskan dengan melakukan pengembangan dari konsep $y = a \sin kx + b \cos px$. Pertama dilukiskan grafik $y = a \sin kx$, kemudian $y = b \cos px$ yang dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $y = b \cos px$ terhadap sumbu x . Grafik $y = a \sin kx - b \cos px$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan setiap nilai dari $y = a \sin kx$ dan $y = b \cos px$. Dari konsep ini dapat dikembangkan pula untuk menggambar grafik fungsi trigonometri yang lain.

Daftar Pustaka

- Connelly, James F and Robert A. Fratangelo. 1980. *Precalculus Mathematics A Functional Approach*. New York: Macmillan Publishing Co. , Inc.
- Departemen Pendidikan dan Kebudayaan
- Robert, A. Wayne. 1968. *Introductory Calculus*. New York: Academic Press
- Iskandar, Sidarto. 1980. *Trigonometri*. Semarang: IKIP Semarang
- Schwartz, Abraham. 1960. *Analytic Geometry and Calculus*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Kartini, dkk. 2004. *Matematika XB*. Klaten: Intan Pariwara
- Vance, Elbridge P. 1963. *Modern Algebra and Trigonometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Nasoetion, Andi Hakim. 1993. *Matematika 2*. Jakarta: