

DINAMIKA PROBLEMA PENYAKIT MALARIA

JUNLIADÉ SINAGA

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sistem dinamik penyakit malaria, menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit malaria dan kestabilannya. Dengan menggunakan program MATLAB, dapat digambarkan grafik titik kesetimbangan bebas penyakit malaria dan tiga jenis kestabilannya yaitu stabil berdasarkan teori stabilitas Lyapunov, stabil asimtotik, dan tidak stabil. Model penyakit malaria yang digunakan adalah model Chitnis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit x_{dfe} memiliki keadaan stabil berdasarkan Lyapunov, stabil asimtotik tetapi tidak memiliki keadaan tidak stabil. Hal ini karena nilai angka reproduktif R_0 selalu berada diantara 0 dan 1 yang berarti stabil, sedangkan keadaan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

1. PENDAHULUAN

Malaria merupakan satu jenis penyakit infeksi tertua yang mulai berjangkit di Mesir, India, dan Cina. Penyakit malaria ditularkan melalui gigitan nyamuk *Anopheles* yang menginfeksi protozoa dari genus *Plasmodium* yang hidup dan berkembang biak dalam sel darah manusia. Penyakit malaria termasuk dalam sepuluh penyakit paling berbahaya di dunia sebab telah banyak merenggut nyawa manusia setiap tahunnya. Manusia yang terinfeksi malaria umumnya berada di kawasan tropis dan subtropis. Terdapat 500 juta penduduk dunia telah terinfeksi penyakit ini, dengan 1-2 juta meninggal setiap tahunnya. Menurut *The World Malaria Report 2010*, sebanyak lebih dari 1 juta orang termasuk anak-anak setiap tahun meninggal akibat malaria dimana 80% kematian terjadi di Afrika, dan 15% di Asia.

Diantara hubungan nyamuk malaria dan manusia, terdapat suatu titik kesetimbangan dimana sudah tidak ditemukan penyakit. Titik kesetimbangan dapat diperoleh apabila tidak terdapat manusia yang terkena, terinfeksi, sembuh, nyamuk yang terkena dan terinfeksi. Pada

Received 21-04-2014, Accepted 23-05-2014.

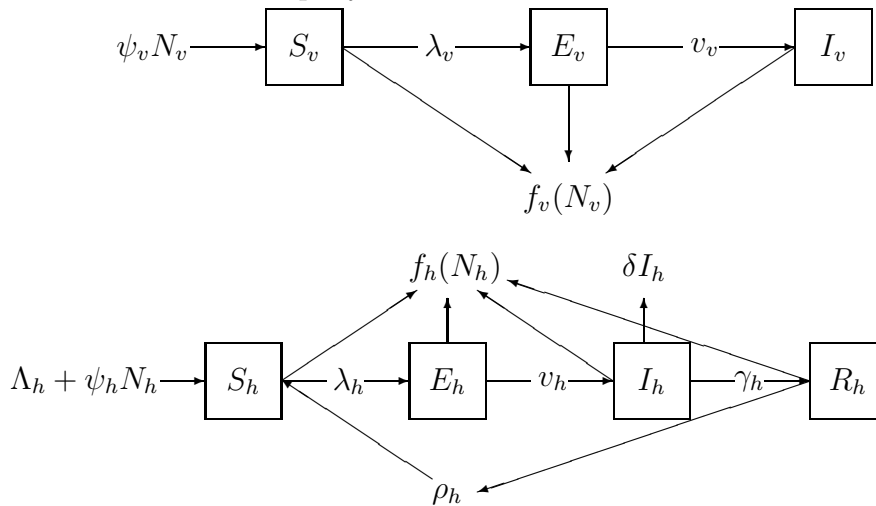
2014 *Mathematics Subject Classification* : 37B55, 37B25.

Key words and Phrases: Malaria, titik kesetimbangan, kestabilan, angka reproduktif.

titik kesetimbangan terdapat keadaan stabil. Teori stabilitas Lyapunov dapat digunakan untuk membuktikan titik kesetimbangan dan kestabilan antara hubungan nyamuk malaria dan manusia. Dengan menggunakan program MATLAB, dapat digambarkan grafik titik kesetimbangan bebas penyakit malaria dan tiga jenis kestabilannya yaitu stabil berdasarkan teori stabilitas Lyapunov, stabil asimtotik, dan tidak stabil.

2. LANDASAN TEORI

Berikut ini skema penyakit malaria:



Dari skema di atas, diperolehlah sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \Lambda_h + \psi_h N_h + \rho_h R_h - \lambda_h(t) S_h - f_h(N_h) S_h \\
 \frac{dE_h}{dt} &= \lambda_h(t) S_h - v_h E_h - f_h(N_h) E_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= v_h E_h - \gamma_h I_h - f_h(N_h) I_h - \delta_h I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \rho_h R_h - f_h(N_h) R_h \\
 \frac{dS_v}{dt} &= \psi_v N_v - \lambda_v(t) S_v - f_v(N_v) S_v \\
 \frac{dE_v}{dt} &= \lambda_v(t) S_v - v_v E_v - f_v(N_v) E_v
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = v_v E_v - f_v(N_v) I_v$$

$$\frac{dN_h}{dt} = \Lambda_h + \psi_h N_h - f_h(N_h) N_h - \delta_h i_h N_h$$

$$\frac{dN_v}{dt} = \psi_v N_v - f_v(N_v) N_v$$

dimana:

- S_h : Banyaknya manusia yang rentan pada waktu t
- E_h : Banyaknya manusia yang terkena pada waktu t
- I_h : Banyaknya manusia yang menularkan pada waktu t
- R_h : Banyaknya manusia yang sembuh pada waktu t
- N_h : Total populasi manusia pada waktu t
- S_v : Banyaknya nyamuk yang rentan pada waktu t
- E_v : Banyaknya nyamuk yang terkena pada waktu t
- I_v : Banyaknya nyamuk yang menularkan pada waktu t
- N_v : Total populasi nyamuk pada waktu t
- Λ_h : Laju imigrasi manusia
- ψ_h : Laju kelahiran manusia per kapita
- ψ_v : Laju pertumbuhan nyamuk per kapita
- σ_v : Banyaknya seekor nyamuk menggigit manusia per unit waktu
- σ_h : Maksimum nyamuk dapat menggigit manusia per unit waktu
- v_h : Laju perubahan keadaan manusia yang terkena menjadi manusia yang menularkan per kapita
- v_v : Laju perubahan keadaan nyamuk yang terkena menjadi nyamuk yang menularkan per kapita
- γ_h : Laju kesembuhan manusia yang menularkan menjadi manusia yang sembuh per kapita
- δ_h : Laju kematian manusia yang disebabkan penyakit per kapita
- ρ_h : Laju manusia kehilangan imunitas per kapita
- β_{hv} : Probabilitas penyebaran penyakit dari nyamuk yang menularkan kepada manusia yang rentan
- β_{vh} : Probabilitas penyebaran penyakit dari manusia yang menularkan kepada nyamuk yang rentan
- b_h : Laju penyakit pada manusia

- $\tilde{\beta}_{vh}$: Probabilitas penyebaran penyakit dari manusia yang sembuh kepada nyamuk yang rentan
- μ_{1h} : Laju kematian manusia pada daerah bebas
- μ_{2h} : Laju kematian manusia pada daerah tidak bebas
- μ_{1v} : Laju kematian nyamuk pada daerah bebas
- μ_{2v} : Laju kematian nyamuk pada daerah tidak bebas
- $f_h(N_h)$: Tingkat kepadatan per kapita terhadap kematian dan emigrasi manusia
- $f_v(N_v)$: Tingkat kepadatan per kapita terhadap kematian nyamuk

Dengan membandingkan ukuran populasi tiap status dengan total populasi akan diperoleh sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{de_h}{dt} &= \frac{1}{N_h} \left(\frac{dE_h}{dt} - e_h \frac{dN_h}{dt} \right) \\
 \frac{di_h}{dt} &= \frac{1}{N_h} \left(\frac{dI_h}{dt} - i_h \frac{dN_h}{dt} \right) \\
 \frac{dr_h}{dt} &= \frac{1}{N_h} \left(\frac{dR_h}{dt} - r_h \frac{dN_h}{dt} \right) \\
 \frac{de_v}{dt} &= \frac{1}{N_v} \left(\frac{dE_v}{dt} - e_v \frac{dN_v}{dt} \right) \\
 \frac{di_v}{dt} &= \frac{1}{N_v} \left(\frac{dI_v}{dt} - i_v \frac{dN_v}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Setelah sistem persamaan (2.2) diselesaikan, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \frac{de_h}{dt} &= \frac{\sigma_v \sigma_h N_v \beta_{hv} i_v}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} (1 - e_h - i_h - r_h) - (v_h + \psi_h + \frac{\Lambda_h}{N_h}) e_h + \delta_h i_h e_h \\
 \frac{di_h}{dt} &= v_h e_h - (\gamma_h + \delta_h + \psi_h + \frac{\Lambda_h}{N_h}) i_h + \delta_h i_h^2 \\
 \frac{dr_h}{dt} &= \gamma_h i_h - (\rho_h + \psi_h + \frac{\Lambda_h}{N_h}) r_h + \delta_h i_h r_h \\
 \frac{dN_h}{dt} &= \Lambda_h + \psi_h N_h - (\mu_{1h} + \mu_{2h} N_h) N_h - \delta_h i_h N_h
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{de_v}{dt} &= \frac{\sigma_v\sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} (\beta_{vh}i_h + \tilde{\beta}_{vh}r_h)(1 - e_v - i_v) - (v_v + \psi_v)e_v \\ \frac{di_v}{dt} &= v_v e_v - \psi_v i_v \\ \frac{dN_v}{dt} &= \psi_v N_v - (\mu_{1v} + \mu_{2v} N_v)N_v \end{aligned}$$

dengan

- e_h = ukuran manusia terkena pada waktu t
- i_h = ukuran manusia terinfeksi pada waktu t
- r_h = ukuran manusia yang sembuh pada waktu t
- N_h = total populasi manusia pada waktu t
- e_v = ukuran nyamuk terkena pada waktu t
- i_v = ukuran nyamuk terinfeksi pada waktu t
- N_v = total populasi nyamuk pada waktu t

Persamaan 2.3 memiliki domain,

$$D = \left\{ \left(\begin{matrix} e_h \\ i_h \\ r_h \\ N_h \\ e_v \\ i_v \\ N_v \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^7; \begin{matrix} e_h \geq 0, \\ i_h \geq 0, \\ r_h \geq 0, \\ e_h + i_h + r_h \leq 1, \\ N_h \geq 0, \\ e_v \geq 0, \\ i_v \geq 0, \\ e_v + i_v \leq 1, \\ N_v > 0 \end{matrix} \right\}$$

yang dinotasikan $x = (e_h; i_h; r_h; N_h; e_v; i_v; N_v)$. Titik kesetimbangan diperoleh jika $e_h = i_h = r_h = e_v = i_v = 0$.

Teorema 2.1. *Sistem persamaan 2.3 mempunyai tepat sebuah titik kesetimbangan, $x_{afe} = (0; 0; 0; N_h^*; 0; 0; N_v^*)$ dimana tidak ada penyakit pada populasi.*

Dengan menyubstitusikan nilai $e_h = i_h = r_h = e_v = i_v = 0$ ke persamaan 2.3, diperoleh

$$N_h^* = \frac{(\psi_h - \mu_{1h}) + \sqrt{(\psi_h - \mu_{1h})^2 + 4\mu_{2h}\Lambda_h}}{2\mu_{2h}} \text{ dan } N_v^* = \frac{\psi_v - \mu_{1v}}{\mu_{2v}} \quad (2.4)$$

Parameter yang umum pada model penyakit adalah angka re-produktif, dinotasikan dengan R_0 yang menyatakan banyaknya infeksi

yang dihasilkan dari seorang manusia atau seekor nyamuk selama masa penyakit menular dimana diasumsikan bahwa semua individu (manusia atau nyamuk) yang lain rentan. R_0 didefinisikan sebagai

$$R_0 = \sqrt{K_{vh}K_{hv}} \tag{2.5}$$

Keterangan:

- $R_0 =$ angka reproduktif
- $K_{vh} =$ banyaknya manusia yang terinfeksi dari seekor nyamuk jika semua manusia termasuk dalam keadaan rentan
- $K_{hv} =$ banyaknya nyamuk yang terinfeksi dari seorang manusia jika semua nyamuk termasuk dalam keadaan rentan

Dimana:

$$\begin{aligned}
 K_{hv} &= \left(\frac{v_v}{v_v + \mu_{1v} + \mu_{2v}N_v^*} \right) \cdot \frac{\sigma_c \sigma_h N_h^*}{\sigma_v N_v^* + \sigma_h N_h^*} \cdot \beta_{hv} \cdot \left(\frac{1}{\mu_{1v} + \mu_{2v}N_v^*} \right) \\
 K_{vh} &= \left(\frac{v_h}{v_h + \mu_{1h} + \mu_{2h}N_h^*} \right) \cdot \frac{\sigma_v N_h^* \sigma_h}{\sigma_v N_v^* + \sigma_h N_h^*} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_h + \delta_h + \mu_{1h} + \mu_{2h}N_h^*} \right) \cdot \\
 &\quad \left[\beta_{vh} + \tilde{\beta}_{vh} \left(\frac{\gamma_h}{\rho_h + \mu_{1h} + \mu_{2h}N_h^*} \right) \right] \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Titik kesetimbangan bebas penyakit, x_{df_e} , adalah lokal stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.*

Definisi 2.1. *Misalkan sistem dinamik memenuhi $\dot{x} = f(x, t)$ dengan $x(t_0) = x_0$ dan $x \in \mathbb{R}^n$. Sistem dinamik tersebut memiliki titik kesetimbangan $x^* = 0$ adalah stabil pada $t = t_0$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sehingga*

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

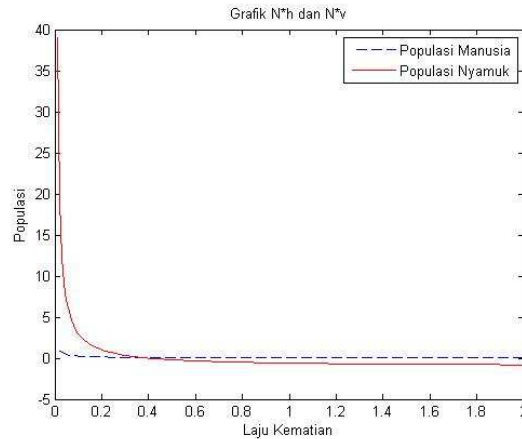
1. Menjelaskan penyebab malaria, hubungan manusia dan nyamuk.
2. Menentukan model matematis menggambarkan hubungan antara manusia dan nyamuk.
3. Menjelaskan definisi titik kesetimbangan bebas penyakit malaria dan kestabilan.
4. Menjelaskan definisi teori stabilitas Lyapunov.
5. Menggambarkan grafik dengan menggunakan MATLAB.

6. Membuat kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Grafik Titik Kesetimbangan

Misalkan nilai $\psi_h = 7,666.10^{-5}$, $\Lambda_h = 3,285.10^{-2}$, dan $\psi_v = 0,4$ disubstitusikan ke persamaan 2.4 yaitu populasi manusia dan nyamuk.



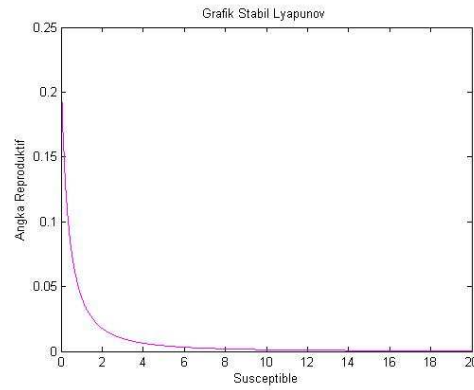
Gambar 1: Titik kesetimbangan dari model penyakit malaria Chitnis

Perhatikan bahwa populasi manusia dipengaruhi populasi nyamuk. Pada saat laju kematian bernilai nol, populasi nyamuk sangat banyak sedangkan populasi manusia sedikit. Semakin besar laju kematian, maka populasi nyamuk semakin sedikit. Hal ini terjadi karena salah satu faktor yang mempengaruhi populasi suatu individu, manusia atau nyamuk adalah laju kematian.

2. Grafik Kestabilan Berdasarkan Lyapunov

Suatu sistem disebut stabil berdasarkan Lyapunov jika angka reproduktif R_0 bernilai 0. Pada gambar 4.2 dimisalkan nilai $v_v = 2$, $v_h = 4$, $\mu_{1h} = 2$, $\mu_{2h} = 5$, $\mu_{1v} = 2$, $\mu_{2v} = 6$, $\sigma_h = 15$, $\beta_{hv} = 0,7$, $\beta_{vh} = 0,2$, $\beta_v h = 0,1$, $\delta_h = 7$, $\rho_h = 5$, $\gamma_h = 3$.

Perhatikan bahwa semakin banyak individu yang rentan maka angka reproduktif akan bernilai 0 dimana menurut Lyapunov hal ini

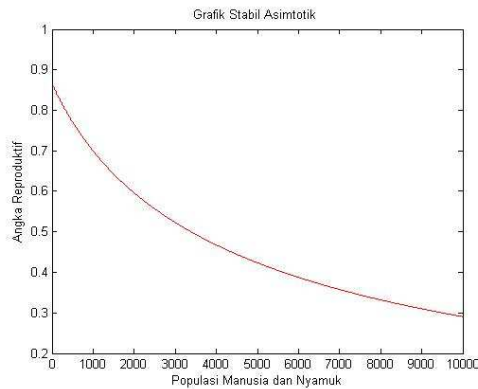


Gambar 2: Titik kestabilan berdasarkan Lyapunov

adalah keadaan stabil.

3. Grafik Stabil Asimtotik

Stabil asimtotik adalah keadaan dimana angka reproduktif, $R_0 < 1$. Pada gambar 4.3 diasumsikan nilai $v_v = 0,091$, $v_h = 0,1$, $\mu_{1h} = 1,6 \cdot 10^{-5}$, $\mu_{2h} = 3 \cdot 10^{-7}$, $\mu_{1v} = 0,033$, $\mu_{2v} = 2 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_v = 0,5$, $\sigma_h = 19$, $\beta_{hv} = 0,022$, $\beta_{vh} = 0,48$, $\beta_v \tilde{h} = 0,048$, $\delta_h = 9 \cdot 10^{-5}$, $\rho_h = 5,5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_h = 0,0035$ disubstitusikan ke persamaan 2.5.

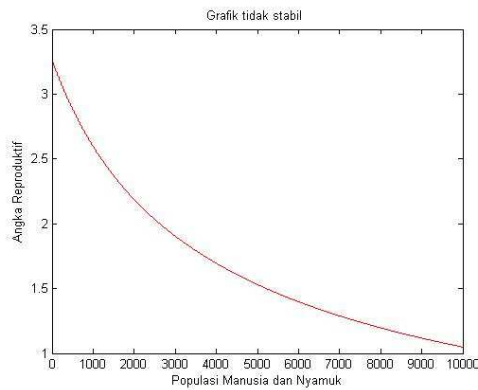


Gambar 3: Grafik Titik Stabil Asimtotik

Perhatikan bahwa semakin besar angka reproduktif berarti infeksi semakin banyak mengakibatkan populasi manusia dan nyamuk semakin sedikit. Sebaliknya jika angka reproduktif semakin kecil maka populasi manusia dan nyamuk semakin banyak. Hubungan angka reproduktif terhadap populasi manusia dan nyamuk adalah berbanding terbalik.

4.Grafik Titik Tidak Stabil

Keadaan tidak stabil adalah keadaan dimana terdapat penyakit dalam populasi. Jika maka terdapat sedikitnya satu titik kesetimbangan endemik. Untuk gambar 4.4 diasumsikan $v_v = 0,083$, $v_h = 0,1$, $\mu_{1h} = 8,8.10^{-6}$, $\mu_{2h} = 2.10^{-7}$, $\mu_{1v} = 0,033$, $\mu_{2v} = 4.10^{-5}$, $\sigma_v = 0,33$, $\sigma_h = 4,3$, $\beta_{hv} = 0,022$, $\beta_{vh} = 0,24$, $\beta_v h = 0,024$, $\delta_h = 1,8.10^{-5}$, $\rho_h = 2,7.10^{-3}$, $\gamma_h = 0,0035$ disubstitusikan ke persamaan 2.5. Sehingga diperoleh grafik berikut.



Gambar 4: Grafik Titik Tidak Stabil

Perhatikan bahwa hubungan antara angka reproduktif terhadap populasi manusia dimana syarat suatu keadaan dikatakan tidak stabil jika angka reproduktifnya lebih dari satu. Pada grafik di atas terlihat bahwa angka reproduktif tertinggi berada diantara 3 dan 3,5. Angka reproduktif menurun hingga berada di antara 1 dan 1,5. Angka reproduktif menyatakan banyak infeksi, sehingga pada grafik tersebut jika infeksi semakin kecil maka populasi semakin banyak sebaliknya jika

angka reproduktif semakin besar maka populasi manusia dan nyamuk semakin sedikit. Hal ini dapat terjadi karena banyaknya infeksi yang ada berbanding terbalik dengan populasi manusia.

5. KESIMPULAN

Pada model penyakit malaria yang diteliti, terdapat empat status atau keadaan manusia yaitu status rentan, terkena, terinfeksi dan sembuh. Sedangkan pada nyamuk terdapat tiga status yaitu status rentan, terkena dan terinfeksi. Terdapat suatu titik kesetimbangan dimana tidak terdapat penyakit yaitu x_{dfe} . Titik kesetimbangan dapat diperoleh jika $e_h = i_h = r_h = e_v = i_v = 0$. Pada titik kesetimbangan tersebut, terdapat kestabilan. Kestabilan dapat diketahui dari angka reproduktif. Angka reproduktif memiliki hubungan dengan populasi manusia dan nyamuk dan laju kematian. Angka reproduktif dapat bernilai lebih kecil dari 1 dan lebih besar dari 1 yang berarti titik kesetimbangan bebas penyakit dapat disebut stabil asimtotik dan tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- Chitnis, N. 2005. Using Mathematical Models in Controlling the Spread of Malaria. PhD thesis. University of Arizona.
- Chitnis, N. J. M, Cushing. M. Hyman. 2006. Bifurcation Analysis of Mathematical Model for Malaria Transmission. Siam J. Appl. Math.
- Chitnis, N. J. M, Cushing. M. Hyman. 2008. Determining Important Parameters in The Spread of Malaria through The Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. Bulletin of Mathematical Biology.
- Johansson, P. Jacob, L. 2010. Mathematical Modeling of Malaria. Methods for Simulation of Epidemics. Chalmers University of Thecnology. Gothenburg.
- Murray, R. M. Z, Li. S, S. Sastry. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Pp. 43-45.
- World Health Organization. 2011. World Malaria Report 2011. United Nations Children's Fund. Geneva. Switzerland.

Daftar Pustaka

- [1] Chitnis, N. *Using Mathematical Models in Controlling the Spread of Malaria..* PhD thesis. University of Arizona.(2005)
- [2] Chitnis, N. J. M, Cushing. M. Hyman. Bifurcation Analysis of Mathematical Model for Malaria Transmission. *Siam J. Appl. Math.* (2006)
- [3] Chitnis, N. J. M, Cushing. M. Hyman. Determining Important Parameters in The Spread of Malaria through The Sensitivity Analysis of a Mathematical Model., *Bulletin of Mathematical Biology.*, (2008)
- [4] Johansson, P. Jacob, L. *Mathematical Modeling of Malaria. Methods for Simulation of Epidemics..* Chalmers University of Technology, (2010)
- [5] Murray, R. M. Z, Li. S, S. Sastry. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi.* Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga, (2004)
- [6] World Health Organization. *World Malaria Report 2011.* United Nations Children's Fund. Geneva. Switzerland, (2011)
- [7] Tulus, Tulus. Numerical Study on the Stability of Takens-Bogdanov Systems. *Bulletin of Mathematics*, Vol. 04, No. 01, 17-24. Medan Indonesia, (2012)