Saintia Matematika
Vol. 1, No. 6 (2013), pp. 567–577.

OPTIMASI PEMBAGIAN TUGAS TIM RENANG GAYA GANTI ESTAFET MENGGUNAKAN METODE HUNGARIAN PADA TIM RENANG *AMPHIBI SWIMMING CLUB*

Martha Lia P, Elly Rosmaini, Agus Salim Harahap

Abstrak. *Masalah penugasan merupakan suatu masalah bagaimana memasangkan orang atau pekerja dengan pekerjaan yang ada secara tepat, sehingga biaya atau waktu yang diperlukan adalah minimum. Pada tim renang Amphibi Swimming Club, penugasan perenang untuk gaya renang yang tepat adalah salah satu masalah yang sering terjadi. Tujuan dari tulisan ini adalah untuk menetapkan perenang pada gaya renang yang tepat, sesuai dengan kecepatan yang dimiliki sehingga waktu yang dibutuhkan akan minimum. Berdasarkan data tim renang Amphibi Swimming Club yang diperoleh, maka hasil penugasan perenang yang optimal pada tim renang Amphibi Swimming Club dengan menggunakan metode Hungarian untuk renang gaya ganti estafet 4 x 100 m putra: Rio ditugaskan pada gaya kupu-kupu, Irfan ditugaskan pada gaya punggung, Reza ditugaskan pada gaya dada, Randa ditugaskan pada gaya bebas dan untuk renang gaya ganti estafet 4 x 100 m putri: Widia ditugaskan pada gaya punggung, Dara ditugaskan pada gaya kupu-kupu, Elsha ditugaskan pada gaya dada, Salsha ditugaskan pada gaya bebas.*

1. PENDAHULUAN

Masalah penugasan merupakan salah satu kasus yang ditemui dalam program linier. Dalam masalah penugasan akan didelegasikan sejumlah tugas kepada

Received 24-10-2013, Accepted 25-11-2013.
2013 Mathematics Subject Classification: 90C05
Key words : Metode Hungarian, Masalah Penugasan.

sejumlah penerima tugas dalam basis satu-satu. Jadi masalah penugasan ini diasumsikan bahwa jumlah tugas sama dengan jumlah penerima tugas, sehingga data pokok yang harus dimiliki untuk menyelesaikan suatu permasalahan penugasan adalah jumlah tugas dan penerima tugas.

Tujuan yang ingin dicapai dalam memecahkan masalah penugasan adalah berusaha untuk menjadwalkan setiap penerima tugas pada suatu tugas, di mana setiap pekerja mendapat satu tugas, sedemikian rupa kerugian yang ditimbulkan minimal dan keuntungan yang didapat maksimal. Kerugian dalam hal ini adalah biaya, waktu dan jarak, sedangkan yang dimaksud keuntungan diantaranya adalah pendapatan, laba dan nilai kemenangan. Secara garis besar ada dua jenis masalah dalam penugasan yaitu masalah minimasi dan masalah maksimasi.

Salah satu jenis metode penugasan adalah metode Hungarian, metode ini ditemukan dan dikembangkan oleh ahli matematika berkebangsaan Hungaria yang bernama D. Konig pada tahun 1916[1]. Tulisan ini membahas aplikasi metode Hungarian dalam menentukan gaya yang tepat untuk para perenang pada tim renang gaya ganti estafet *Amphibi Swimming Club*, sehingga diperoleh waktu yang minimum.

2. LANDASAN TEORI

Pada dasarnya persoalan optimasi adalah suatu persoalan untuk membuat suatu nilai fungsi $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ beberapa variabel menjadi maksimum atau minimumm dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada. Program linier adalah suatu teknik penyelesaian optimal atas suatu problema keputusan dengan cara menentukan terlebih dahulu fungsi tujuan (memaksimalkan atau meminimalkan) dan kendala-kendala yang ada ke dalam model matematik persamaan linier. Program linier sering digunakan dalam menyelesaikan problema-problema alokasi sumber daya, seperti dalam bidang pemasaran, keuangan, personalia, administrasi, dan sebagainya[2].
Bentuk umum model program linier:

Optimumkan

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

Dengan batasan:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\geq\ atau\ \leq)b_i \text{ untuk } i = 1, 2, ..., n$$
$$x_j \geq 0 \text{ untuk } j = 1, 2, ..., n$$

Atau dapat ditulis secara lengkap sebagai berikut:
Optimumkan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2}$$

dengan batasan:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n(\geq\ atau\ \leq)b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n(\geq\ atau\ \leq)b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n(\geq\ atau\ \leq)b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{gathered}$$

Keterangan:
Z = fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimal atau minimal)
c_j = kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan x_j dengan satu satuan unit atau sumbangan keluaran kegiatan j terhadap Z
n = kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia
m = batasan sumber atau fasilitas yang tersedia

Masalah penugasan merupakan kasus khusus dari masalah program linier pada umumnya. Masalah penugasan (*assignment problem*) adalah suatu masalah mengenai pengaturan pada individu (objek) untuk melaksanakan tugas (kegiatan), sehingga dengan demikian biaya/waktu/jarak yang digunakan untuk pelaksanaan tugas tersebut dapat diminimalkan[3].

Syarat-syarat metode Hungarian:

1. Jumlah sumber (m) yang ditugaskan harus sama dengan jumlah tugas (n) yang harus diselesaikan.

2. Setiap sumber hanya mengerjakan satu tugas.

3. Apabila jumlah sumber tidak sama dengan jumlah tugas, maka ditambahkan variabel *dummy*.

4. Terdapat dua permasalahan yaitu memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya.

Masalah penetapan tugas mensyaratkan bahwa banyaknya fasilitas sama dengan banyaknya tugas, katakanlah sama dengan n. Dalam hal ini, maka ada $n!$ cara yang berlainan untuk menetapkan tugas pada fasilitas berdasarkan penetapan satu-satu. Banyaknya penetapan ini adalah $n!$ karena terdapat n cara untuk menetapkan tugas pertama, $n-1$ cara untuk menetapkan tugas kedua, $n-2$ cara untuk menetapkan tugas ketiga, dan seterusnya, yang jumlah seluruhnya adalah: $n(n-1)(n-2)...(n-(n-1)) = n!$ penetapan yang mungkin.

Untuk mendefinisikan penetapan yang optimal secara tepat, maka akan diperkenalkan kuantitas-kuantitas berikut: c_{ij} = biaya untuk menetapkan tugas ke-j kepada fasilitas ke-i, untuk $i, j = 1, 2, ..., n$. Satuan dari c_{ij} dapat bernilai rupiah, dollar, mil, jam, dan lain-lain, satuan apapun yang sesuai dengan masalahnya[4]. Didefinisikan matriks biaya sebagai matriks n x n:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pernyataan bahwa sebuah tugas yang unik harus ditetapkan pada setiap fasilitas berdasarkan satu-satu adalah ekuivalen dengan syarat bahwa tidak ada dua c_{ij} yang bersangkutan berasal dari baris yang sama atau kolom yang sama.

Tabel 1: Tabel Persoalan Penugasan

Ke / Dari		Tujuan				Kapasitas
		1	2	...	n	
sumber	1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	1
	2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{12}	...	x_{2n} c_{2n}	1
	...	...	...	...	...	...
	m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	1
Kapasitas		1	1	...	1	

Dalam hal ini berlaku:

1. $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + ... + x_{in} = 1$ untuk $i = 1, 2, ..., m$. Ini artinya bahwa pada tiap i hanya ada satu x_{ij} yang bernilai 1 sedangkan yang lainnya bernilai 0.

2. $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + ... + x_{mj} = 1$ untuk $j = 1, 2, ..., n$. Ini artinya bahwa pada tiap j hanya ada satu x_{ij} yang bernilai 1 sedangkan yang lainnya bernilai 0.

3. Nilai alokasi dari sumber ke tujuan sangat bergantung kepada nilai c_{ij} dan x_{ij}, namun karena x_{ij} hanya bernilai 1 atau 0 maka nilai alokasi tersebut sangat dipengaruhi oleh c_{ij}.

Secara matematis model untuk masalah penugasan dapat ditulis dalam bentuk program linier[5] sebagai berikut:

Minimumkan:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4}$$

Dengan batasan:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ untuk } i = 1, 2, ..., m$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ untuk } j = 1, 2, ..., n$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Keterangan:
Z = fungsi tujuan yang dicari nilai optimalnya (maksimal, minimal)
x_{ij} = unit alokasi dari sumber i ke tujuan j (hanya bernilai 1 atau 0)
c_{ij} = parameter alokasi dari sumber i ke tujuan j

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode Hungarian:

1. Memodifikasi tabel penugasan ke dalam matriks biaya.
2. Melakukan pengurangan baris dengan nilai terkecil setiap baris.
3. Melakukan pengurangan kolom dengan nilai terkecil setiap kolom.
4. Membentuk penugasan optimum yaitu dengan menarik sejumlah garis horizontal dan vertikal yang melewati seluruh sel yang bernilai nol. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris/kolom maka penugasan telah optimal. Jika tidak maka harus direvisi.
5. Melakukan revisi, dengan memilih nilai terkecil yang tidak dilewati garis lalu kurangkan dengan semua nilai yang tidak dilewati garis. Kemudian ditambahkan pada angka yang terdapat pada persilangan garis. Kembali ke langkah 4.

Penugasan ditempatkan pada sel yang bernilai nol. Total nilai dari solusi yang diperoleh dihitung berdasarkan elemen dari matriks awal yang belum direduksi nilainya sehingga diperoleh total nilai optimum.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data kecepatan perenang dengan melakukan survei langsung pada tim renang *Amphibi Swimming Club* baik putra maupun putri.
2. Menghitung rata-rata kecepatan perenang tim putra dan tim putri.
3. Membuat tabel penugasan.
4. Menentukan penugasan optimum menggunakan metode Hungarian.
5. Membuat kesimpulan.

4. PEMBAHASAN

Data diperoleh dari survei langsung pada tim renang *Amphibi Swimming Club* sebanyak tiga kali survei, kemudian dihitung rata-rata kecepatan perenang baik tim putra maupun tim putri. Hasil rata-rata kecepatan perenang tim putra yang diperoleh adalah:

Tabel 2: Rata-rata Kecepatan Perenang Tim Putra (satuan detik)

Perenang/Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas
Rio	134	142	132,3	134
Irfan	139	131	140,3	129
Randa	142,3	143	142	132,7
Reza	144,3	140,7	139,3	132

Data Primer 2013

Tabel Penugasannya:

Tabel 3: Tabel Penugasan Tim Putra

Perenang \ Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas	Kapasitas
Rio	x_{11} 134	x_{12} 142	x_{13} 132,3	x_{14} 134	1
Irfan	x_{21} 139	x_{22} 131	x_{23} 140,3	x_{24} 129	1
Randa	x_{31} 142,3	x_{32} 143	x_{33} 142	x_{34} 132,7	1
Reza	x_{41} 144,3	x_{42} 140,7	x_{43} 139,3	x_{44} 132	1
Kapasitas	1	1	1	1	

Dengan menggunakan metode Hungarian diperoleh penugasan optimumnya yaitu:

Tabel 4: Tabel Optimal Tim Putra

Perenang/ Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas
Rio	0	8,3	0	9
Irfan	7,7	0	10,7	6,7
Randa	0,6	1,6	2	0
Reza	3,3	0	0	0

Penugasan ditempatkan pada sel yang bernilai nol. Penentuan penugasan sebaiknya dimulai dari baris yang hanya mengandung satu nilai nol. Pada tabel optimal di atas, baris yang hanya mengandung satu nilai nol adalah baris ketiga, hal ini berarti bahwa gaya bebas ditugaskan kepada Randa dan pada baris kedua, yang berarti Irfan ditugaskan pada gaya punggung. Selanjutnya pada baris keempat terdapat tiga nilai nol, tetapi karena gaya bebas telah ditugaskan kepada Randa dan gaya punggung telah ditugaskan kepada Irfan, maka nilai nol yang digunakan adalah nilai nol pada kolom ketiga, yang berarti gaya dada ditugaskan kepada Reza. Gaya kupu-kupu ditugaskan kepada Rio.

Total nilai dari solusi yang diperoleh dihitung berdasarkan elemen dari matriks awal yang belum direduksi nilainya. Perolehan waktu minimal untuk tim putra pada nomor lomba gaya ganti estafet 4 x 100 m adalah 537 detik

Rata-rata kecepatan perenang tim putri:

Tabel 5: Rata-rata Kecepatan Perenang Tim Putri (satuan detik)

Perenang/ Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas
Widia	150,3	154	150,7	142,3
Dara	146,7	154	148	147
Elsha	151,3	149,3	143,3	143,7
Salsha	150	154,3	148,7	139,7

Data Primer 2013

Tabel Penugasannya:

Tabel 6: Tabel Penugasan Tim Putri

Perenang \ Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas	Kapasitas
Widia	x_{11} 150,3	x_{12} 154	x_{13} 150,7	x_{14} 142,3	1
Dara	x_{21} 146,7	x_{22} 154	x_{23} 148	x_{24} 147	1
Elsha	x_{31} 151,3	x_{32} 149,3	x_{33} 143,3	x_{34} 143,7	1
Salsha	x_{41} 150	x_{42} 154,3	x_{43} 148,7	x_{44} 139,7	1
Kapasitas	1	1	1	1	

Dengan menggunakan metode Hungarian diperoleh penugasan optimumnya yaitu:

Tabel 7: Tabel Optimal Tim Putri

Perenang/ Gaya	Kupu-kupu	Punggung	Dada	Bebas
Widia	2,3	0	2,6	0
Dara	0	1,3	1,3	6
Elsha	8	0	0	6,1
Salsha	4,6	3	3,3	0

Penugasan ditempatkan pada sel yang bernilai nol. Pada tabel optimal di atas, baris yang hanya mengandung satu nilai nol adalah baris kedua dan baris keempat, hal ini berarti bahwa gaya kupu-kupu ditugaskan kepada Dara dan gaya bebas ditugaskan kepada Salsha. Selanjutnya pada baris pertama terdapat dua nilai nol, tetapi karena gaya bebas telah ditugaskan kepada Salsha, maka nilai nol yang digunakan adalah nilai nol pada kolom kedua, yang berarti gaya punggung ditugaskan kepada Widia dan yang terakhir gaya dada ditugaskan kepada Elsha.

Total nilai dari solusi yang diperoleh dihitung berdasarkan elemen dari matriks awal yang belum direduksi nilainya. Perolehan waktu minimal untuk tim putri pada nomor lomba gaya ganti estafet 4 x 100 m adalah $583,7$ detik.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pengolahan data yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Penugasan yang optimal dalam menetapkan perenang terhadap gaya renang yang tepat pada tim renang *Amphibi Swimming Club*, yaitu:
   (a) Tim Putra, penempatannya adalah Rio ditugaskan pada gaya Kupu-kupu, Irfan ditugaskan pada gaya Punggung, Reza ditugaskan pada gaya Dada, Randa ditugaskan pada gaya Bebas.
   (b) Tim Putri, penempatannya adalah Dara ditugaskan pada gaya Kupu-kupu, Widia ditugaskan pada gaya Punggung, Elsha ditugaskan pada gaya Dada, Salsha ditugaskan pada gaya Bebas.

2. Waktu minimal yang dibutuhkan tim renang *Amphibi Swimming Club* dalam menghadapi lomba renang gaya ganti estafet 4 x 100 m. Untuk Tim Putra dibutuhkan waktu 537 detik dan untuk Tim Putri dibutuhkan waktu 583,7 detik.

Daftar Pustaka

[1] Zulfikarijah, Fien. Operation Research. Malang: Bayumedia Publishing, (2004).

[2] Sitorus, Parlin. Program Linier. Jakarta: Universitas Trisakti, (1997).

[3] Subagyo, Pangestu., Asri, Marwan., dan Handoko, H.T. Dasar-Dasar Operations Research. Yogyakarta: BPFE-YOGYAKARTA, (1983).

[4] Anton, Howard. dan Rorres, Chris. Penerapan Aljabar Linear. Jakarta: Erlangga, (1987).

[5] Aminudin. Prinsip-prinsip Riset Operasi. Jakarta: Erlangga, (2005).

Martha Lia P: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: marthaliapalentina@yahoo.com

Elly Rosmaini: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: elly.rosmaini@yahoo.com

Agus Salim Harahap: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: agus6@usu.ac.id