Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan Shock Absorber

[1)] Mangara Tua Sitanggang [2)]Tenang Ginting [3)]Tua Raja Simbolon
Jurusan Fisika Teoritis– Fakultas MIPA USU
[1]Mahasiswa FISIKA FMIPA
[2]Dosen Pembimbing FISIKA FMIPA
[3]Departemen FISIKA FMIPA
Jl. Bioteknologi No 1 USU
Email: ngara.sitanggang@yahoo.com

ABSTRAK

Telah dilakukan perhitungan secara analitik mengenai sistem persamaan fisis pada massa pegas shock absorber dengan menggunakan metode fungsi green dan metode koefisien tak tentu. Dalam hal ini akan didapatkan solusi yang sama dari persamaan fisis massa pegas dengan shock absorber dengan menggunakan metode yang berbeda tersebut. Perbedaannya hanya terletak pada nilai konstanta yang dihasilkan dari penyelesaian tersebut.Telah dilakukan juga verifiksi terhadap hasil yang didapat dengan menggunakan perangkat lunak mathematica 8.

Kata kunci :fungsi green, koefisien tak tentu

ABSTRACT

Analytical calculated about shock absorber physical system form had been done by green function method and indeterminate coefficients method. The same solution of shock absorber physical system form had been obtained by use this different methods. The difference lies only in the constant value resulting from the settlement. Verification has been carried out also on the results obtained by using the software Mathematica 8.

Key words: green function, indeterminate coefficients

1. Latar Belakang

.

Di dalam berbagai permasalahan fisika, matematika memegang peranan yang sangat penting.Banyak permasalahan fisika yang harus diselesaikan dengan menggunakan model matematika.Salah satu model matematika yang cukup penting adalah persamaan differensial.Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tidak diketahui.Persamaan diferensial seringkali muncul dalam permasalahan fisika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata.Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung persamaan diferensial.Sebagai contoh, turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan.Keadaan inilah yang merupakan persoalan pada banyak kasus fisika, sehingga untuk memperoleh suatu persamaan diferensial yang melukiskan suatu persoalan dalam kehidupan nyata, biasanya diambil permisalan bahwa keadaan sebenarnya diatur oleh hukum-hukum yang sangat sederhana yang biasanya sering dibuat permisalan yang ideal.

Persamaan diferensial yang terbentuk dari permasalahan yang ada tersebut juga bermacam-macam.Ada dua macam persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial tak homogen.Di samping itu, berdasarkan orde (tingkat)-nya, terdapat persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua, persamaan diferensial orde tiga, sampai dengan persamaan diferensial orde-n (orde tinggi).Sedangkan berdasarkan koefisiennya, terdapat persamaan diferensial dengan koefisien konstan dan persamaan diferensial dengan koefisien variabel (peubah).Serta berdasarkan kelineararannya, terdapat persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tidak linear.

Oleh karena banyaknya jenis persamaan diferensial, maka banyak pula cara mencari penyelesaiannya. Sebagai contoh, persamaan diferensial biasa orde satu, selesaiannya dapat dicari dengan pengintegralan.Sedangkan persamaan diferensial linear homogen, misalnya persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan, dapat diubah menjadi masalah pencarian akar persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial itu.Akan tetapi, masalahnya sekarang pada persamaan diferensial linear tak homogen, untuk mencari selesaian umumnya, selain harus mencari selesaian persamaan homogen pautannya, juga harus dicari selesaian khususnya.

1.1 Tujuan Penelitian

1. Untuk menyelesaikankasus fisis massa pegas dengan shock absorber dengan mengkonstruksi fungsi green.
2. Untuk membuat perbandingan solusi persamaan yang dihasilkan dengan menggunakan metode fungsi green dengan solusi persamaan yang dihasilkan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu

1.2 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengemukakan suatu metode sebagai alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear tak homogen yaitu dengan mengkonstruksi fungsi green

1.3 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana menyelesaikan suatu kasus persamaan diferensial linier tak homogen dengan menggunakan metode fungsi green

1.4 Batasan Masalah

a. Masalah yang diselesaikan adalahpersamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien konstanyang dikhususkan pada osilasi teredam pada shock absorber
b. Metode yang dipergunakan untuk mengkonstruksi fungsi green adalah metode variasi parameter
c. Metode pembanding yang dipergunakan adalah metode koefisien tak tentu

II. Tinjauan Pustaka

2.1 Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan adalah:

$$a_0 y^n + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.1)$$

Ada tiga kemungkinan penyelesaian dari persamaan (2.1), yaitu:

1. Bila akar-akarnya real dan berlainan, maka penyelesaian yaitu: $e^{t_1 x}, e^{t_2 x}, \ldots, e^{t_n x}$
2. Bila akar-akarnya real dan sama, maka penyelesaian yaitu: $e^{tx}, xe^{tx}, \ldots, x^{n-1} e^{tx}$
3. Bila akar-akarnya kompleks, maka penyelesaian yaitu: $e^{(a-bi)x}$ atau $e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$

2.2 Persamaan Diferensial Linier Orde-n Tak Homogen Dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial tak homogeny orde-n adalah sebagai berikut:

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + A_{n-2} y^{n-2} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = r(x) \qquad (2.2)$$

Solusi umum $y(x)$ akan didapatkan bila solusi umum $y_h x$ dari persamaan diferensial homogen diketahui.

Kemudian $y(x)$ dibentuk dengan penambahan $y_h x$ sebagai penyelesaian homogennya dengan $y_p x$ sebagai penyelesaian partikulirnya, sehingga:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \qquad (2.3)$$

2.3 Konsep Fungsi Green

Dari suatu sistem persamaan diferensial linear tak homogen orde-*n*:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (2.4)$$

dengan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi yang kontinyu. Fungsi $G(x,t)$ dikatakan sebagai fungsi green untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi berikut ini:

a) $G(x,t)$ terdefenisi pada daerah R=I x I dari semua titik (x,t) dimana x dan t terletak dalam selang I.

b) $G(x,t), \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ merupakan fungsi kontinu pada R=I x I

c) Untuk setiap x_0 dalam selang I, fungsi $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt$ adalah solusi persamaan diferensial di atas yang memenuhi kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \cdots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

2.4 Metode koefisien tak tentu

Ide dasar dari metode koefisien tak tentu adalah menduga dengan cerdas solusi y_p berdasarkan bentuk fungsi $r(x)$ di ruas kanan.
Bentuk persamaan umum:

$$A_n y^n + A_{n-1}y^{n-1} + A_{n-2}y^{n-2} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = r(x) \quad (2.5)$$

- Fungsi $r(x)$ yang merupakan bentuk solusi pertikular $y_p(x)$ diperoleh dengan cara menebak, seperti misalnya: fungsi cos, fungsi sin, fungsi exponensial atau jumlah dari beberpa fungsi
- $r(x)$ berisikan koefisien tak tentu
- Turunkan y_p sesuai persamaan umum di atas
- Subtitusikan y_p dan seluruh turunannya ke dalam persamaan

Bentuk $r(x)$	Pilihan untuk y_p
e^{ax}	Ae^{ax}
$k\,x^n \ (n = 0,1,\ldots)$	$k_n x^n + + \cdots + k_1 x + k_0$
$x\,e^{ax}$	$Ae^{ax} + Bx\,e^{ax}$
$\sin ax$	$A \sin ax + B \cos ax$
$\cos ax$	$A \sin ax + B \cos ax$

Tabel 2.1 Metode Koefisian Tak Tentu

Misal $f(x)$ merupakan fungsi polinom, eksponen, sinus atau cosines. Maka solusi y_p dimisalkan sebagai jumlah dari $f(x)$ dan semua turunannya. Selanjutnya y_p y_p' dan y_p'' disubstitusikan ke persamaan awal untuk menghitung nilai dari koefisiennya.

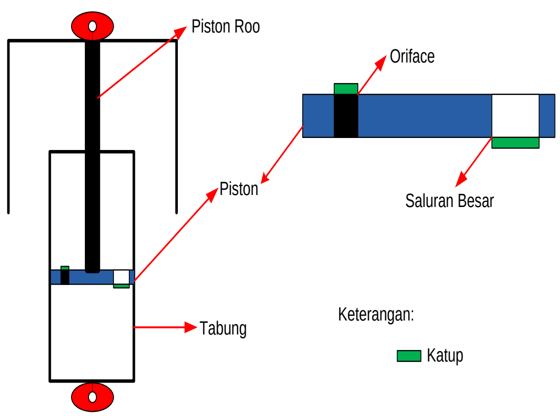
2.5 Sistem Fisis Persamaan Osilasi Harmonik Teredam

Sampai saat ini masih banyak anggapan bahwa tidak ada gaya gesekan yang bekerja pada osilator. Jika anggapan ini dipegang, maka bandul atau beban pada pegas akan berosilasi terus menerus. Pada kenyataannya, amplitudo osilasi berkurang sedikit demi sedikit sampai akhirnya menjadi nol karena pengaruh gesekan. Dikatakan bahwa geraknya teredam oleh gesekan dan disebut osilasi teredam. Gesekan seringkali muncul dari gesekan udara atau gaya dalam. Besar gaya gesekan biasanya bergantung kepada laju. Dalam banyak hal, gaya gesekan sebanding dengan kecepatan, tetapi arahnya berlawanan. Contoh dari osilasi teredam misalnya adalah pada shock absorber mobil.

Shock absorber merupakan komponen penting suatu kendaraan yaitu dalam sistem suspensi, yang berguna untuk meredam gaya osilasi dari pegas. Shock absorber berfungsi untuk memperlambat dan mengurangi besarnya getaran gerakan dengan mengubah energi kinetik dari gerakan suspensi menjadi energi panas yang dapat dihamburkan melalui cairan hidrolik.

Peredam kejut (shockabsorber) pada mobil memiliki komponen pada bagian atasnya terhubung dengan piston dan dipasangkan dengan rangka kendaraan. Bagian bawahnya, terpasang dengan silinder bagian bawah yang dipasangkan dengan as roda. Fluida kental menyebabkan gaya redaman yang bergantung pada kecepatan relatif dari kedua ujung unit tersebut. Hal ini membantu untuk mengendalikan guncangan pada roda.

Konstruksi shock absorber itu terdiri atas piston, piston rod dan tabung. Piston adalah komponen dalam tabung shock absorber yang bergerak naik turun di saat shock absorber bekerja. Sedangkan tabung adalah tempat dari minyak shock absorber dan sekaligus ruang untuk piston bergerak naik turun. Dan yang terakhir adalah piston rod adalah batang yang menghubungkan piston dengan tabung bagian atas (tabung luar) dari shock absorber. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Detail struktur shock absorber

Shock absorber bekerja dalam dua siklus yakni siklus kompresi dan siklus ekstensi.

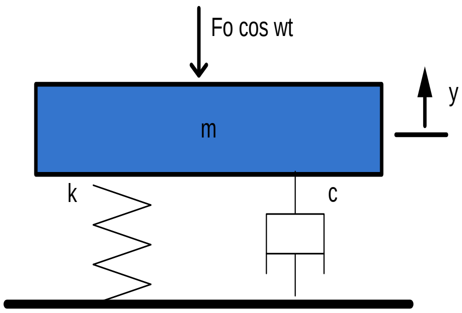
Siklus kompresi (penekanan)

Saat shock absorber ditekan karena gaya osilasi dari pegas suspensi, maka gerakan yang terjadi adalah shock absorber mengalami pemendekan ukuran. Siklus kompresi terjadi ketika piston bergerak ke bawah, menekan fluida hidrolik di dalam ruang bawah piston. Dan minyak shock absorber yang berada dibawah piston akan naik keruang atas piston melalui lubang yang ada pada piston. Sementara lubang kecil (orifice) pada piston tertutup karena katup menutup saluran orifice tersebut. Penutupan katub ini disebabkan karena peletakan katup yang berupa membran (plat tipis) dipasangkan dibawah piston, sehingga ketika minyak shock absorber berusaha naik ke atas maka katup membran ini akan terdorong oleh shock absorber dan akilbatnya menutup saluran orifice. Jadi minyak shock absorber akan menuju ke atas melalui lubang yang besar pada piston, sementara minyak tidak bisa keluar melalui saluran oriface pada piston. Pada saat ini shock absorber tidak melakukan peredaman terhadap gaya osilasi dari pegas suspensi, karena minyak dapat naik ke ruang di atas piston dengan sangat mudah.

Siklus ekstensi (memanjang)

Pada saat memanjang piston di dalam tabung akan begerak dari bawah naik ke atas. Gerakan naik piston ini membuat minyak shock absorber yang sudah berada diatas menjadi tertekan. Minyak shock absorber ini akan mencari jalan keluar agar tidak tertekan oleh piston terus. Maka minyak ini akan mendorong katup pada saluran oriface untuk membuka dan minyak akan keluar atau turun ke bawah melalui saluran oriface. Pada saat ini katup pada lubang besar di piston akan tertutup karena letak katup ini yang berada di atas piston. Minyak shock absorber ini akan menekan katup lubang besar, piston ke bawah dan mengaakibat katup ini tertutup. Tapi letak katup saluran oriface membuka karena letaknya berada di bawah piston, sehingga ketika minyak shock menekan ke bawah katup ini membuka. Pada saat ini minyak shock absorber hanya dapat turun ke bawah melalui saluran orifice yang kecil. Karena salurannya yang kecil, maka minyak shock absorber tidak akan bisa cepat turun ke bawah alias terhambat. Di saat inilah shock absorber melakukan peredaman terhadap gaya osilasi pegas suspensi.

Tipikal mobil atau truk ringan akan memiliki lebih banyak perlawanan selama siklus ekstensi daripada siklus kompresi. Semua peredam kejut modern adalah kecepatan-sensitif – suspensi semakin cepat bergerak, semakin banyak perlawanan yang shock breker sediakan. Hal ini memungkinkan guncangan untuk menyesuaikan diri dengan kondisi jalan dan untuk mengontrol semua gerakan yang tidak diinginkan yang dapat terjadi dalam kendaraan yang bergerak. Secara sederhana shock absorber merupakan pengaplikasian dari gerak osilasi harmonik yang teredam.



Gambar 2.2 Sistem fisis pada shock absorber

Persamaan osilasi teredam diberikan oleh hokum gerak kedua, $F = ma$, dengan F merupakan jumlah dari gaya pemulih $-\ ky$ dan gaya redaman $-\,c\ dy/dt$; dalam hal ini c adalah konstanta positif. Kita peroleh bahwa

$$\Sigma F = ma \tag{2.6}$$

Atau

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{2.7}$$

Dalam osilasi teredam sebenarnya masih terdapat gaya lain yang bekerja berupa gaya paksaan. Dalam hal ini, dimisalkan gaya paksaan yang diberikan terhadap sistem yang telah disebutkan adalah $F_0 \cos \omega t$. Di sini F_0 adalah harga dari gaya eksternal dan ω adalah frekuensi sudutnya. Untuk jelasnya, dapat kita bayangkan bahwa gaya eksternal tersebut diberikan langsung pada massa yang digantungkan pada pegas. Maka kita peroleh persamaan:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \tag{2.8}$$

3.1 Penyelesaian Dengan Menggunakan Metode Fungsi Green

Persamaan yang kita dapatkan dari sistem fisis-massa pegas shock absorber yang telah dibahas sebelumnya adalah:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \qquad (3.1.1)$$

Atau dapat kita tuliskan dalam bentuk lain yakni:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \qquad (3.1.2)$$

Maka untuk mendapatkan solusi dari persamaan (3.2) di atas kita selesaikan terlebih dahulu penyelesaian homogennya

$$P^2 + \frac{c}{m}P + \frac{k}{m} = 0 \qquad (3.1.3)$$

$$P_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)}}{2} \qquad (3.1.4)$$

Untuk gerak teredam kritis maka:

$$\frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = 0 \qquad (3.1.5)$$

Sehingga:

$$P_{1,2} = \frac{-c}{2m} \qquad (3.1.6)$$

Maka dari hasil ini didapatkan:

$$y_h = c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 t e^{\frac{-c}{2m}t} \qquad (3.1.7)$$

Kemudian kita selesaikan persamaan partikulernya melalui metode fungsi green:

Mis $\frac{c}{2m} = \gamma$

$$y_p = u_1 e^{-\gamma t} + u_2 t e^{-\gamma t} \qquad (3.1.8)$$

Dari sini kita dapatkan:

$$y_1 = e^{-\gamma t} \qquad (3.1.9)$$

$$y_2 = t e^{-\gamma t} \qquad (3.1.10)$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\gamma y} & y e^{-\gamma y} \\ -\gamma e^{-\gamma y} & e^{-\gamma y} - \gamma y e^{-\gamma y} \end{vmatrix} = e^{-2\gamma y} \qquad (3.1.11)$$

$$v_1(y) = \begin{vmatrix} 0 & y e^{-\gamma y} \\ 1 & e^{-\gamma y} - \gamma y e^{-\gamma y} \end{vmatrix} = -y e^{-\gamma y} \qquad (3.1.12)$$

$$v_2(y) = \begin{vmatrix} e^{-\gamma y} & 0 \\ -\gamma e^{-\gamma y} & 1 \end{vmatrix} = e^{-\gamma y} \qquad (3.1.13)$$

$$G(x,t) = \frac{y_1(t)v_1(y)+y_2(t)v_2(y)}{W} \tag{3.1.14}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang telah didapatkan sebelumnya ke persamaan (3.14), maka didapatkan:

$$G(y,t) = e^{(y-t)\gamma}(t-y) \tag{3.1.15}$$

Dengan

$$y_p = \int_{t_0}^{t} G(y,t).h(y)\ dy \tag{3.1.16}$$

Dengan

$$h(y) = \frac{F_0\ cos\omega t}{m} \tag{3.1.17}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.15) dan (3.17) ke dalam persamaan (3.16) didapatkan:

$$y_p = \int_{t_0}^{t} e^{(y-t)\gamma}(t-y)\frac{F_0\ cos\omega t}{m}\ \ dy \tag{3.1.18}$$

Kemudian dengan melanjutkan perhitungan secara matematis maka akan didapatkan nilainya sebagai berikut:

$$y_p = \frac{F_0}{m(\omega^2+\gamma^2)^2}[2\omega\gamma \sin\omega t + (\omega^2 + \gamma 2)\cos\omega t \tag{3.1.19}$$

Sehingga:

$$y = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} + \frac{F_0}{m(\omega^2+\gamma^2)^2}[2\omega\gamma \sin\omega t + (\omega 2+\gamma 2)\cos\omega t \tag{3.1.20}$$

Dengan y merupakan solusi dari persamaan (3.1.1) yang didapatkan melalui metode fungsi green.

3.2 Penyelesaian Dengan Menggunakan Metode Koefisien Tak Tentu

Sebagaimana diketahui bahwa persamaan dari gerak osilasi teredam pada schok mobil adalah sebagai berikut:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos\omega t \tag{3.2.1}$$

Dengan penyelesaian homogennya:

$$y_h = c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 t e^{\frac{-c}{2m}t} \tag{3.2.2}$$

Untuk persamaan partikulirnya:

$$y_p = P\cos\omega t + Q\sin\omega t \tag{3.2.3}$$

$$y_p{}' = -\omega P\sin\omega t + \omega Q\cos\omega t \tag{3.2.4}$$

$$y_p{}'' = -\omega^2\cos\omega t - \omega^2 Q\sin\omega t \tag{3.2.5}$$

Maka ketiga persamaan (3.2.3),(3.2.4) dan (3.2.3) kita substitusikan ke persamaan (3.2.1) sehingga didapatkan:

$$m(-\omega^2\cos\omega t - \omega^2 Q\sin\omega t) + c(-\omega P\sin\omega t + \omega Q\cos\omega t) + k(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) = F_0\cos\omega t \tag{3.2.6}$$

Kemudian dari persamaan ini akan didapatkan nilai P dan Q untuk persamaan (3.2.3), yakni sebagai berikut:

$$P = \frac{(-\omega^2 m+k)Q}{\omega c} \tag{3.2.7}$$

Dan

$$Q = \frac{F_0\omega c}{(-\omega^2 m+k)^2+(\omega c)^2} \tag{3.2.8}$$

Sehingga didapat nilai dari persamaan (3.2.3) adalah sebagai berikut:

$$y_p = \frac{(-\omega^2 m+k)F_0}{(-\omega^2 m+k)^2+(\omega c)^2}\cos\omega t + \frac{F_0\omega c}{(-\omega^2 m+k)^2+(\omega c)^2}\sin\omega t \tag{3.2.9}$$

Sehingga didapat nilai y yang merupakan solusi dari persamaan (3.2.1) dengan menjumlahkan nilai dari y_h dan y_p yakni:

$$y = c_1 e^{\frac{-c}{2m}t} + c_2 t e^{\frac{-c}{2m}t} + \frac{(-\omega^2 m+k)F_0}{(-\omega^2 m+k)^2+(\omega c)^2}\cos\omega t + F0\omega c{-}\omega 2m{+}k2{+}(\omega c)2\sin\omega t$$

(3.2.10)

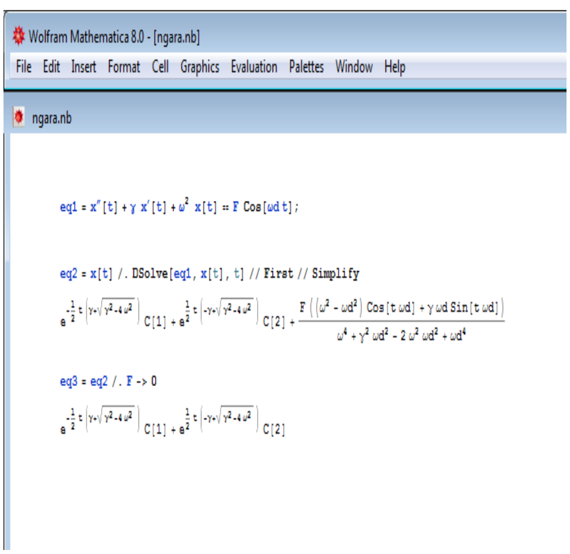
3.3 Perbandingan Antara Metode Fungsi Green dengan Metode Koefisien Tak Tentu

Kesamaan yang kita dapatkan dari kedua metode tersebut adalah penyelesaian dengan menggunakan kedua metode tersebut untuk sistem fisis- massa pegas dengan shock absorber yang dihasilkan adalah dalam bentuk sinusoidal. Sedangkan untuk perbedaannya dapat kita lihat pada tabel di bawah ini:

Metode Fungsi Green	**Metode Koefisien Tak Tentu**
• Pengerjaan lebih rumit • Dalam pengerjaan perlu diketahui selang waktu	• Pengerjaan Lebih Sederhana • Dalam pengerjaan tidak perlu diketahui selang waktu

Tabel 3.1 Perbedaan penyelesaian dengan metode fungsi green dengan metode koefisien tak tentu

3.4 Verifikasi Dengan Menggunakan Program Mathematica 8



IV. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Melalui metode fungsi green didapatkan solusi persamaan dari persamaan fisis-massa pegas dengan shock absorber. Dalam hal ini, hasil yang didapatkan melalui metode fungsi green tersebut adalah bersesuaian dengan hasil yang didapatkan melalui metode koefisien tak tentu. .
2. Perbandingan solusi yang dihasilkan dengan metode fungsi green dan dengan metode koefisien tak tentu adalah terletak pada perbedaan nilai konstantanya saja. Dengan demikian kita dapat mengetahui bahwa solusi yang didapatkan dari kedua metode tersebut adalah sama.

Daftar Pustaka

Ayres, Fank, 1972, *Differential Equations* , McGraw-Hill Book Company, New York.

Barton,G.1989. *Elements of Green Fuctions and Propagation.* Clarendon Press, Oxford

Herdiana,Heris, 2002, *Persamaan Differensial*, CV Pustaka Setia, Bandung.

Holzner,Steven,2008,*Differential for Dummies* Wiley Publishing,Inc,Indianapolis

Narayan,Shanti,2006,*Integral Calculus*, S.Chand & Company LTD, New Delhi

Soedojo,Peter,*Asas-Asas Matematika Fisika dan Teknik*, Gadjah Mada University Press: Yogyakarta

Sugiarto,Iwan,2002, *Mengkonstruksi Fungsi Green Persamaan Differensial Linier Orde-n* Jakarta.