

PENERAPAN TEORI BACKWARD RECURSIVE UNTUK MENENTUKAN JUMLAH TENAGA KERJA DAN GAJI PADA PT XYZ

RINA TINARTY SIHOMBING, HENRY RANI SITEPU,
ROSMAN SIREGAR

Abstrak. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penggunaan Program Dinamik dengan perhitungan mundur (backward recursive) model matematis : $f_i(S_i, X_i) = r_i(S_i, X_i) + f(i-1)(S(i-1), X(i-1))$ dimana $i =$ nomor tahap ($i = 1, 2, \dots, n$), $X_i =$ variabel keputusan pada tahap i , $S_i =$ keadaan pada tahap i , $r_i(S_i, X_i) =$ keputusan pada tahap i , $f_i(S_i, X_i) =$ keputusan optimal dari tahap 1 sampai i , $f_{i-1}(S_{i-1}, X_{i-1}) =$ keputusan optimal dari tahap i sampai 1. Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dengan cara mengumpulkan data dari perusahaan. Dengan menggunakan teori Program Dinamik perhitungan mundur maka jumlah jam kerja efektif 573.460 jam dapat dioptimalkan menjadi 468.714,27 jam dengan jumlah tenaga kerja (orang) yang dibutuhkan setiap bulan pada tahun 2011 adalah 152 orang/bulan. Biaya yang dikeluarkan untuk kebutuhan tenaga kerja sebesar Rp 3.976.509.219 dengan menggunakan program dinamik dapat dioptimalkan menjadi Rp 3.236.431.421,94.

1. PENDAHULUAN

Salah satu alat bantu untuk mengetahui jumlah tenaga kerja yang dibutuhkan perusahaan adalah program dinamik. Program dinamik adalah merupakan teknik matematis yang sering digunakan untuk membuat serangkaian keputusan yang saling berkaitan dengan suatu prosedur yang sistematis untuk menentukan kombinasi keputusan yang mengoptimasi efektivitas keseluruhan keputusan. Dalam hal ini, suatu

Received 02-03-2013, Accepted 25-03-2013.

2010 Mathematics Subject Classification: 90C39

Key words and Phrases: Program Dinamik, Backward Recursive.

masalah pengambilan keputusan yang *multistage* dipisah-pisahkan menjadi suatu submasalah yang berurutan dan saling berhubungan sehingga pemecahan masalah dapat dilakukan dengan lebih mudah. Tujuan dari penggunaan program dinamik adalah mempermudah penyelesaian persoalan optimasi yang mempunyai karakteristik tertentu dan mengetahui dan memahami solusi yang dihasilkan dari model program dinamis dalam rangka pengambilan keputusan yang optimal. Program dinamik dikembangkan pertama kali oleh Richard E. Bellman pada tahun 1957 [1, 2, 3].

Penelitian ini memilih melakukan pembahasan dengan menggunakan perhitungan mundur (*backward recursive*). Tetapi perhitungan mundur ini juga memiliki kelemahan yaitu proses perhitungannya hanya secara manual, tidak memakai program komputer. Program dinamik dengan perhitungan mundur ini, bergerak mulai dari tahap n , terus mundur ke tahap $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ [4].

2. PROGRAM DINAMIK

Suatu masalah dapat di formulasikan kedalam model program dinamis akan memiliki karakteristik sebagai berikut [1] :

1. Permasalahan dapat dibagi menjadi beberapa tahap dengan sebuah keputusan pada setiap tahap.
2. Setiap tahap memiliki sejumlah keadaan yang berhubungan dengan tahap tersebut. Secara umum, keadaan merupakan berbagai kemungkinan masukan yang ada pada sistem tertentu. Jumlah keadaan bisa terbatas atau tidak terbatas.
3. Pilihan keputusan setiap tahap adalah keputusan yang dapat dipilih untuk tahap tertentu.
4. Solusi optimal dari masalah program dinamis adalah sama dengan keputusan pemilihan keadaan dari tahap yang terakhir.
5. Hubungan rekursif yang mengidentifikasi pilihan optimal untuk setiap keadaan pada tahap n memberikan pilihan optimal untuk setiap keadaan pada $n+1$.

Bentuk umum dari perhitungan mundur yang digunakan untuk memperoleh keputusan optimal adalah sebagai berikut [4] :

$$f_i(S_i, X_i) = r_i(S_i, X_i) + f_{i-1}(S_{i-1}, X_{i-1}) \quad (1)$$

keterangan :

- i = nomor tahap ($i = 1, 2, \dots, n$)
- X_i = jam kerja yang dioptimalkan pada tahap i
- S_i = jumlah jam kerja pada tahap i
- $r_i(S_i, X_i)$ = keputusan pada tahap i
- $f_i(S_i, X_i)$ = keputusan optimal dari tahap 1 sampai i
- $f_{i-1}(S_{i-1}, X_{i-1})$ = keputusan optimal dari tahap i sampai 1.

Satu tahun kerja dibagi menjadi empat tahap yang didasarkan pada kuartal. Dengan demikian, diketahui :

$$f_i = \min[r_i + f_{i-1}] \quad (2)$$

keterangan :

- r_i = biaya untuk waktu menganggur dan biaya penambahan dan pengurangan tenaga kerja pada tahap i
- f_{i-1} = biaya minimum pada tahap i sampai 1.

Jika biaya penambahan atau pengurangan tenaga kerja adalah 1% dari kuadrat penambahan atau pengurangan tenaga kerja [1], maka :

$$r_i = P_i(S_{i-1} - D_i) + 0,01X_i^2 \quad (3)$$

keterangan :

- i = nomor tahap ($i=1,2,3,4$)
- P_i = gaji per jam pada tahap i (rupiah)
- S_i = tingkat satu jumlah jam kerja pada tahap i (jam)
- D_i = kebutuhan untuk tenaga kerja pada tahap i (jam)
- X_i = waktu untuk tenaga kerja yang ditambah atau dikurangi pada tahap i (jam).

Apabila persamaan (3) disubstitusikan terhadap persamaan (2), formulasi untuk fungsi biaya pada tahap i dapat dituliskan menjadi :

$$f_i = \min[P_i(S_{i-1} - D_i) + 0,01X_i^2 + f_{i-1}]. \quad (4)$$

Fungsi transformasi yang menyatakan hubungan antara dua tahap berdekatan adalah :

$$S_{i-1} = S_i + X_i. \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke persamaan (4) diperoleh :

$$f_i = \min[P_i(S_i - D_i + P_i X_i + 0,01X_i^2 + f_{i-1}^*]. \quad (6)$$

Untuk menjamin bahwa kebutuhan untuk tenaga kerja terpenuhi pada tahap i , maka harus dipenuhi kendala sebagai berikut: $S_{i-1} = D_i$ sehingga $X_i = D_i - S_i$.

TAHAP 1 (KWARTAL IV)

Dengan menggunakan formulasi program dinamik perhitungan mundur, yaitu fungsi biaya :

$$f_1 = P_1(S_1 - D_1) + P_1 X_1 + 0,01X_1^2.$$

Pada kuartal ini, tingkat kebutuhan jam kerja yang dibutuhkan adalah D_1 . Karena waktu untuk penambahan dan pengurangan tenaga kerja pada tahap ini belum optimal (X_1), maka :

$$X_1^* = D_1 - S_1.$$

Ini menunjukkan bahwa S_1 tidak akan pernah melebihi D_1 . Dengan memasukkan persamaan $X_1^* = D_1 - S_1$ ke formulasi fungsi biaya diperoleh :

$$f_1^* = P_1(S_1 - D_1) + P_1 X_1^* + 0,01(X_1^*)^2$$

$$f_1^* = P_1(S_1 - D_1) + P_1(D_1 - S_1) + 0,01(D_1 - S_1)^2$$

$$\text{Atau } f_1^* = 0,01(D_1 - S_1)^2.$$

TAHAP 2 (KWARTAL III)

Dalam tahap ini, untuk mengoptimalkan keputusan pada tahap ini, dapat dilakukan dengan cara menurunkan f_2 secara parsial terhadap X_2 dan sama dengan nol [5, 6]. Dengan menyelesaikan persamaan tersebut akan dihasilkan X_2^* yang kemudian akan disubstitusikan ke f_2 sehingga menghasilkan f_2^* optimal :

$$\begin{aligned} X_2^* &= \frac{0,02(D_1 - S_1) - P_2}{0,04} \\ f_2^* &= P_2(S_2 - D_2) + P_2 X_2^* + 0,01(X_2^*)^2 + 0,01(D_1 - S_2 - X_2^*)^2 \\ f_2^* &= P_2(S_2 - D_2) + P_2 \left\{ \frac{(0,02(D_1 - S_2) - P_2)}{0,04} \right\} + \\ &\quad 0,01 \left\{ \frac{(0,02(D_1 - S_2) - P_2)}{0,04} \right\}^2 + \\ &\quad 0,01 \left\{ D_1 - S_2 - \frac{(0,02(D_1 - S_2) - P_2)}{0,04} \right\}^2. \end{aligned}$$

Perhitungan untuk tahap 3 dan tahap 4 akan dilakukan secara berulang maka akan didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned} X_3^* &= 0,33(D_1 - S_3) - 50P_3 \\ f_3^* &= P_3(S_3 - D_3) + P_3 \{0,33(D_1 - S_3) - 50P_3\} + \\ &\quad 0,01 \{0,33(D_1 - S_3) - 50P_3\}^2 + P_3 \{S_3 + (0,33(D_1 - S_3) \\ &\quad - 50P_3) - 25P_3\} + 0,01 \{0,5(D_1 - S_3) - 0,33(D_1 - S_3) \\ &\quad - 25P_3\}^2 + 0,01 \{0,5(D_1 - S_3) - 0,33(D_1 - S_3) - 50P_3\} \\ &\quad + 25P_3\}^2 \\ X_4^* &= 0,14(D_1 - S_4) - 78,8P_4 \\ f_4^* &= P_4(S_4 - D_4) + P_4(0,14(D_1 - S_4) - 78,8P_4) + 0,01 \\ &\quad \{0,14(D_1 - S_4) - 78,8P_4\}^2 \\ &\quad + P_4 \{S_4 + 0,14(D_1 - S_4) - 78,8P_4 - D_3\} \\ &\quad + P_4 \{0,33(D_1 - S_4 - 0,14(D_1 - S_4) + 78,8P_4) - 50P_4\} \\ &\quad + 0,01 \{0,33(D_1 - S_4 - 0,14(D_1 - S_4) + 78,8P_4) \\ &\quad - 50P_4\}^2 + P_4 \{(0,67(S_4 + 0,14(D_1 - S_4) - 78,8P_4) \\ &\quad + 0,33(D_1) - 50P_4) - 25P_4\} + 0,01 \{0,17(D_1 - S_4 - \\ &\quad 0,14(D_1 - S_4) + 78,8P_4) - 25P_4\}^2 + 0,01 \{0,17 \\ &\quad (D_1 - S_4 - 0,14(D_1 - S_4) + 78,8P_4) + 75P_4\}^2. \end{aligned}$$

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Mengelompokkan data sesuai dengan keberpengaruhannya terhadap biaya tenaga kerja, satu tahun dikelompokkan menjadi empat tahap yang didasarkan pada kuartal.
2. Memodelkan data kedalam bentuk program dinamik setelah data tersebut dikelompokkan.
3. Melakukan analisis data yang telah diambil dari perusahaan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil pengumpulan data, maka akan diperoleh data informasi pada waktu kerja efektif dan lembur tenaga kerja terkhusus bidang produksi.

Tabel 1: Data Informasi Kerja Efektif dan Lembur Perusahaan

Bulan	Keadaan Kerja Efektif			Keadaan Kerja Lembur		
	Jumlah Karyawan	Jumlah Jam Kerja Efektif/orang/Bulan	Jumlah Gaji/Orang /Bulan (Rp)	Jumlah Gaji/Orang /Jam(Rp)	Jumlah Jam Kerja/ Bulan	Jumlah Gaji /Bulan
Januari	186	250	1.800.000	7200	770	1.757.910
Februari	182	240	1.735.000	7229,17	768	1.753.344
Maret	184	270	1.845.000	6833,33	710	1.620.930
April	190	260	1.800.000	6923,08	740	1.689.420
Mei	188	260	1.750.000	6730,77	762	1.739.646
Juni	191	260	1.750.000	6730,77	710	1.620.930
Juli	183	270	1.800.000	6666,67	740	1.689.420
Agustus	186	250	1.770.000	7080	750	1.712.250
September	185	250	1.760.000	7040	700	1.598.100
Oktober	183	260	1.780.000	6846,15	630	1.438.290
Nopember	181	260	1.770.000	6807,69	705	1.609.515
Desember	186	260	1.760.000	6769,23	740	1.689.420

Sumber: PT XYZ

Kemudian data tahun 2011 diatas akan dibagi menjadi 4 tahapan atau 4 kuartal, dimana pembagiannya dilakukan dengan pengelompokan selama 3 bulan. Data jumlah kebutuhan akan jam kerja dan biaya untuk setiap kuartal pada tahun 2011 sebagai berikut :

Tabel 2: Data Olahan Keadaan Kerja Efektif dan Lembur Perusahaan

Kwartal	Keadaan Kerja Efektif			Keadaan Kerja Lembur		Kebutuhan Jam Kerja (jam)
	Jumlah Jam Kerja (Jam)	Gaji/Jam (Rp)	Jumlah Gaji (Rp)	Jumlah Jam Kerja (Jam)	Jumlah Gaji (Rp)	Jumlah Jam Kerja (Jam)
1	140360	7087,5	993.649.980,0	2248	5.132.184	142.572
2	147940	6794,87	1.005.250.228	2212	5.049.996	150.130
3	142160	6928,89	984.220.164,7	2190	4.999.770	144.235
4	143000	6807,69	973.469.671,2	2075	4.737.225	143.000

Analisa Data dan Perhitungan

Langkah awal dalam menganalisa data yang telah terkumpul adalah dengan melakukan perhitungan menggunakan formulasi program dinamik. Formulasi yang dipakai adalah formulasi yang telah optimal dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh dari data perusahaan.

Selanjutnya akan dihitung X_4^*, f_4^*, S_4^* hingga X_1^*, f_1^*, S_1^* . Harga ini dapat dihitung dengan harga $S_4 = 140.360$ yaitu jumlah jam kerja pada kwartal 1 namun belum optimal, sehingga penambahan atau pengurangan tenaga kerja dan biaya yang dikeluarkan dapat dihitung sebagai berikut :

KWARTAL I

$$\begin{aligned}
 X_4^* &= 112.823,15 - 0,98S_4 = -24,729,65 \\
 f_4^* &= 0,0098S_4^2 - 2256,46S_4 - 9.593.508.550,53 = -9.717.471.807,62 \\
 S_4^* &= 140.360 + X_4^* = 115630,35 \text{ (jam)}.
 \end{aligned}$$

KWARTAL II

$$\begin{aligned}
 X_3^* &= -348365,7 - 0,83S_3 = -44724,33 \\
 f_3^* &= 0,45S_3^2 - 110.884,80S_3 - 2.727.660.213,96 = -9.532.638.705,90 \\
 S_3^* &= 115630,35 + X_3^* = 70906,02 \text{ (jam)}.
 \end{aligned}$$

KWARTAL III

$$X_2^* = -101.722,25 - 0,5S_2 = 560354,68$$

$$f_2^* = 0,0125S_2^2 + 3656,10S_2 - 797.356.772,20 = 1.078.897.775,27$$

$$S_2^* = 70906,02 + X_2^* = 116.538,45 \text{ (jam)}.$$

KWARTAL IV

$$X_1^* = 143.000 - S_1 = 49.101$$

$$f_1^* = 0,01(143.000 - S_1)^2 = 24.109.082,01$$

$$S_1^* = 116.538,45 + X_1^* = 165.639,45 \text{ (jam)}.$$

Dengan menggunakan S_4^* hingga S_1^* maka akan didapatkan biaya yang dikeluarkan pada setiap kwartal. Formulasi yang digunakan adalah S_i^* dikali rata-rata gaji perjam dalam setiap kwartalnya. Hasil formulasi biaya dan jumlah jam kerja optimal setiap kwartalnya akan dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3: Data Hasil Perhitungan

Kwartal	Jumlah Jam Kerja Optimal (Jam)	Biaya (Rupiah)
1	115.630,35	819.530.105,63
2	70.906,02	481.797.188,12
3	116.538,45	807.482.100,82
4	165.639,45	1.127.622.027,37
Total	468.714,27	3.236.431.421,94

Berdasarkan Tabel 3, dapat dibuktikan bahwa keadaan paling optimal adalah $\max f_i^*$ yaitu f_2^* atau kwartal 3. Dikatakan kwartal 3 optimal dengan jumlah jam kerja dan biaya paling minimum. Selanjutnya akan diperoleh jumlah tenaga kerja yang dibutuhkan setiap bulan dengan membagikan jumlah jam kerja optimal pertahun dengan jumlah jam kerja efektif per tahun, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \text{Jumlah tenaga kerja} &= \frac{\text{jumlah jam kerja optimal}}{\text{jumlah jam kerja efektif}} \\ &= 152 \text{ orang/ bulan.} \end{aligned}$$

Dengan perhitungan data penelitian, dapat diperoleh biaya-biaya yang terdiri dari :

$$1. TPE = \sum TPE_i = 3.956.590.004 \text{ (rupiah)}$$

keterangan :

TPE = Gaji tenaga kerja pada jam kerja efektif

TPE_i = Gaji tenaga kerja pada jam kerja efektif tiap kwartal.

$$2. TPL = \sum TPL_i = 19.919.175 \text{ (rupiah)}$$

keterangan :

TPE = Gaji tenaga kerja pada jam kerja lembur

TPE_i = Gaji tenaga kerja pada jam kerja lembur tiap kwartal.

Maka, total biaya (gaji) untuk tenaga kerja yang bekerja pada jam kerja lembur dan jam kerja efektif selama satu tahun adalah :

$$= 3.956.590.044 + 19.919.175$$

$$= 3.976.509.219 \text{ (rupiah)}.$$

Total biaya inilah yang akan dibandingkan dengan total biaya yang diperoleh dengan perhitungan menggunakan teori program dinamik.

Selain itu, tingkat (jumlah) jam kerja pada tahun 2011 adalah :

$$TJ = \sum TJ_i = 573.460 \text{ jam}$$

keterangan :

TJ = Total jam kerja

TJ_i = Total jam kerja tiap kwartal.

5. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan dapat diambil kesimpulan yaitu jumlah jam kerja yang optimal diperoleh dari hasil perhitungan program dinamik adalah 468.714,27 jam. Jumlah tenaga kerja (orang) yang dibutuhkan setiap bulan pada tahun 2011 adalah 152 orang/ bulan. Dan biaya yang dikeluarkan untuk kebutuhan tenaga kerja dengan menggunakan program dinamik adalah sebesar Rp 3.236.431.421,94. Sedangkan dari hasil perhitungan perusahaan, jumlah jam kerja yang dibutuhkan oleh perusahaan adalah sebesar 573.460 jam, dengan jumlah biaya sebesar Rp 3.976.509.219.

Dari hasil perhitungan dengan menggunakan program dinamik memberikan penghematan biaya (keuntungan) sebesar Rp 740.077.796, 96 dari biaya yang dikeluarkan oleh PT XYZ pada tahun 2011. Keadaan paling optimal adalah pada kuartal 3, pada saat jumlah jam kerja dan biaya paling minimum.

Daftar Pustaka

- [1] A. H. Taha. Operations Research An Introduction Second Edition. Macmillan Publishing Co., Inc.,(1976)
- [2] S. F. Hillier . Introduction of Operasion Research Seventh Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.,(2000)
- [3] P. Subagyo,M. Asri, Handoko. Dasar-dasar Operations Research Edisi Kedua. Yogyakarta : BPEE,(2000)
- [4] F. S. Budnick ,R. Mojena .Principles of Operation Research For Management Second Edition. Home word: Illinois,(2002)
- [5] J. D. Moore , Lecture Notes : Introduction to Partial Differential Equations, 2002
- [6] E. J. Purcell, D. V. berg. Calculus with analytic Geometry,5th . Prentice Hall. USA. (1987)

RINA TINARTY SIHOMBING: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia

E-mail: rinatinartysihombing@students.usu.ac.id

HENRY RANI SITEPU: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia

E-mail: henry1@usu.ac.id

ROSMAN SIREGAR: Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Sumatera Utara, Medan 20155, Indonesia
E-mail: rosman@usu.ac.id