PELABELAN *GRACEFUL* PADA DIGRAF LINTASAN DAN DIGRAF BIPARTIT LENGKAP

Lusia Tri Listyowati
Kristiana Wijaya
M. Fatekurohman

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
e-mail: kristiana_wijaya@yahoo.com dan m_fatkur@yahoo.com

Abstract: A *graceful* labeling of digraph $D(V, A)$ is a one to one function $\lambda : V(D) \rightarrow \{0,1,2,\cdots,|A(D)|\}$ such that each *arc* $a = \overrightarrow{uv}$ in D is labeled with $\lambda(a) = \lambda(\overrightarrow{uv}) = \lambda(v) - \lambda(u) \mod (|A(D)|+1)$, the resulting arc labels are distinct. A digraph D is called *graceful* if it admits any *graceful* labeling. In this paper we give a method for constructing a *graceful* labeling of path digraph $\overrightarrow{P_n}$ and complete bipartite digraph $\overleftrightarrow{K}_{m,n}$.

Kata kunci: pelabelan *graceful*, digraf, lintasan digraf, bipartit digraf lengkap.

Pelabelan graf sudah dikaji mulai tahun 60-an. Sejak itu sekitar 300 tulisan mengenai pelabelan banyak bermunculan. Pelabelan pada graf adalah pemberian nilai pada himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan himpunan titik dan sisi pada graf yang memenuhi sifat tertentu. Misal G graf tanpa loop, sisi paralel, dan hingga. Pelabelan *graceful* pada graf G merupakan pemberian nilai pada titik-titiknya dengan bilangan bulat tak negatif, yaitu nol sampai dengan sejumlah sisi yang dimiliki oleh graf G sehingga sisinya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang menempel pada sisi tersebut yang berbeda semua. Sebuah graf G disebut graf *graceful* jika setiap titik dan sisi pada graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*. Dalam hal ini, pelabelan *graceful* untuk beberapa kelas graf telah ditunjukkan. Rosa (1967) menunjukkan bahwa graf sikel C_n adalah *graceful* jika dan hanya jika $n \equiv 0$ atau 3 (mod 4). Hoede & Kuiper (1978) membuktikan bahwa graf roda W_n adalah *graceful* untuk semua $n \geq 3$. Graf lengkap K_n adalah *graceful* jika dan hanya jika $n \leq 4$ dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ adalah *graceful* untuk setiap m dan n dibuktikan oleh Golomb (1972). Aldred & McKay (1998) menunjukkan bahwa graf pohon T_n adalah *graceful* untuk $n \leq 23$, sedangkan untuk $n > 23$ masih menjadi *open problem*. Selain itu telah dibuktikan oleh Huda & Wijaya (2002) bahwa graf tangga L_n yang diperoleh dari hasil kali kartesius $P_2 \times P_n$ dan graf gabungan m buah graf tangga mL_n adalah *graceful* untuk setiap m dan n.

Sejalan dengan ide pelabelan *graceful* pada graf, Bloom & Hsu (1985) memperkenalkan pelabelan *graceful* pada digraf (graf berarah). Misal D digraf dengan himpunan titik $V(D)$ dan himpunan *arc* $A(D)$. Pelabelan *graceful* pada digraf D merupakan pemberian nilai pada titik-titiknya dengan himpunan bilangan bulat tidak negatif, yaitu nol sampai dengan banyaknya *arc* yang dimiliki oleh digraf D sedemikian hingga *arc*-nya mendapat label selisih pelabelan kedua titik yang menempel pada *arc* tersebut dalam bilangan bulat modulo $(|A(D)|+1)$ yang berbeda semua. Secara matematis, pelabelan *graceful* pada digraf D adalah fungsi satu-satu:

$$\lambda : V(D) \rightarrow \{0, 1, 2, \cdots, |A(D)|\}$$

sehingga setiap *arc* $a = \overrightarrow{uv}$ di D mendapat label $\lambda(a) = \lambda(\overrightarrow{uv}) = \lambda(v) - \lambda(u) \mod (|A(D)|+1)$ yang berbeda semua. Sebuah digraf D disebut digraf *graceful* jika setiap titik dan *arc* pada digraf D

dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*.

Konsep dasar graf dan digraf dapat dilihat di Chartrand & Lesniak (1996). Misalkan u dan v titik di $V(D)$, maka u dan v dapat mempunyai satu atau dua arah, yaitu dari u ke v atau dari v ke u. Oleh sebab itu, ada kelas digraf satu arah dan kelas digraf dua arah. Pada paper ini, akan diinvestigasi pelabelan *graceful* pada kedua kelas digraf, yaitu digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ untuk kelas digraf satu arah dan digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ untuk kelas digraf dua arah. Adapun definisi dari digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ dan digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ adalah sebagai berikut. Digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ adalah digraf terhubung dengan n titik dan $n-1$ *arc* dengan 1 titik berderajat keluar 1, 1 titik berderajat masuk 1, dan $n-2$ titik berderajat masuk 1 dan berderajat keluar 1. Digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ adalah digraf yang himpunan titiknya dapat dipartisi ke dalam dua subhimpunan V_1 dan V_2 dengan $|V_1| = m$ dan $|V_2| = m$ sehingga setiap *arc* di $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ menghubungkan setiap titik di V_1 dengan setiap titik di V_2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan mengenai pelabelan *graceful* pada digraf lintasan dan digraf bipartit lengkap. Pada setiap pembuktian diperlukan notasi $\lfloor\ \rfloor$ yang mempunyai arti bilangan pembulatan keatas dan $\lfloor\ \rfloor$ yang mempunyai arti bilangan pembulatan ke bawah. Sebagai contoh, $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 2$ dan $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$.

Pelabelan *Graceful* pada Digraf Lintasan

Misalkan digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ mempunyai himpunan titik $V\left(\overrightarrow{P_n}\right) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ dan himpunan *arc* $A\left(\overrightarrow{P_n}\right) = \{a_1, a_2, a_3, ..., v_{n-1}\}$ dengan $a_i = v_i\ v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$.

Berikut ini diberikan teorema pelabelan *graceful* pada digraf lintasan.

Teorema 1 Digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ merupakan digraf *graceful* jika dan hanya jika n genap.

Bukti

Definisikan pelabelan untuk titik-titik dari digraf $\overrightarrow{P_n}$ sebagai berikut.

$$\lambda(v_i) = (-1)^{i+1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \pmod n \text{ untuk } i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pendefinisian dari label titik di atas merupakan fungsi satu-satu dari $V(\overrightarrow{P_n})$ k $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

Misal $v_i, v_j \in V(\overrightarrow{P_n})$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$, yaitu

$$(-1)^{i+1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = (-1)^{j+1} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \pmod n$$

$$(-1)^{i} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = (-1)^{j} \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \pmod n.$$

Akan ditunjukkan $v_i = v_j$, yaitu dengan menunjukkan bahwa $i = j$.

Apabila $i \neq j$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu: Jika i ganjil dan j genap (atau sebaliknya), maka $-\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \pmod n$. Dengan demikian $-\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \pmod n$ dipenuhi oleh $j = 1, 2, 3, ..., n$. Karena $2n - (i-1) > n$ maka kontradiksi dengan $j = 1, 2, 3, ..., n$. Jika i dan j keduanya genap (atau keduanya ganjil), maka $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$.

Persamaan $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$ dipenuhi oleh $j = i+1$ jika $\frac{1}{2}$ bulat dan $j = i-1$ jika $\frac{1}{2}$ tidak bulat (pecahan). Karena i genap maka diperoleh j ganjil. Hal ini bertentangan dengan i dan j keduanya genap (atau keduanya ganjil). Jadi haruslah $i = j$. Dengan demikian pendefinisian label titik $\lambda(v)$ memenuhi fungsi satu satu dari $V(\overrightarrow{P_n})$ ke $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka perumusan pelabelan *arc* $a_i \in A(\overrightarrow{P_n})$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n-1$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\lambda(\overrightarrow{a_i}) &= \lambda\left(\overrightarrow{v_i v_{i+1}}\right) \\
&= \lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i) \\
&= (-1)^{i+2} \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor - (-1)^{i} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \pmod n \\
&= \begin{cases} -\left(\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right) \pmod n, \text{ Untuk } i \text{ ganjil} \\ \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \pmod n, \text{ Untuk } i \text{ genap} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -i \pmod n, \text{ Untuk } i \text{ ganjil} \\ i \pmod n, \text{ Untuk } i \text{ genap} \end{cases} \\
&= (-1)^i\,(i) \pmod n
\end{aligned}$$

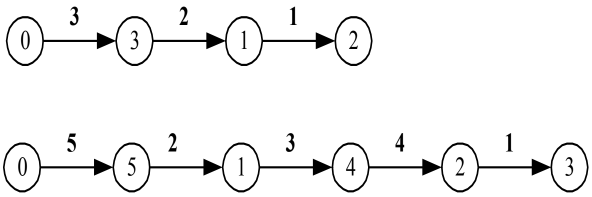
Dengan demikian himpunan label dari setiap *arc* di $\overrightarrow{P_n}$ adalah:

$\{n-1, n-3, n-5, \cdots, 3, 1\}$ untuk $i = 1, 3, 5, \cdots, n-1,$

$\{2, 4, 6, \cdots, n-4, n-2\}$ untuk $i = 2, 4, 6, \cdots, n-2.$

Jadi setiap *arc* di $\overrightarrow{P_n}$ mendapat label yang berbeda semua. Karena setiap titik pada digraf $\overrightarrow{P_n}$ dengan n genap dapat diberi label yang memenuhi fungsi satu-satu dari $V(\overrightarrow{P_n})$ ke $\{0, 1, 2, ..., n\}$ sehingga setiap *arc* di $\overrightarrow{P_n}$ mendapat label yang berbeda semua, maka digraf $\overrightarrow{P_n}$ untuk n genap adalah digraf *graceful*.

Sebagai ilustrasi, Gambar 1 menunjukkan pelabelan *graceful* pada digraf $\overrightarrow{P_n}$ untuk n genap.



Gambar 1. Pelabelan *Graceful* pada Digraf $\overrightarrow{P_4}$ dan $\overrightarrow{P_6}$

Teorema 2 Jika n ganjil maka digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ bukan merupakan digraf *graceful*.

Bukti

Andaikan digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ untuk n ganjil merupakan digraf *graceful*, maka ada pelabelan *graceful* λ pada digraf $\overrightarrow{P_n}$. Pelabelan untuk arc $(\overrightarrow{v_i, v_{i+1}})$ di $\overrightarrow{P_n}$ adalah:

$\lambda(\overrightarrow{v_i, v_{i+1}}) = \lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Karena digraf $\overrightarrow{P_n}$ merupakan lintasan satu arah, maka

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda(\overrightarrow{v_i v_{i+1}}) = (\lambda(v_n) - \lambda(v_{n-1})) + (\lambda(v_{n-1}) - \lambda(v_{n-2})) + \ldots + (\lambda(v_2) - \lambda(v_1))$$
$$= \lambda(v_n) - \lambda(v_1).$$

Sedangkan λ merupakan pelabelan *graceful* pada digraf $\overrightarrow{P_n}$, maka label dari *arc*-nya adalah 1, 2, 3, ..., n-1, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda(\overrightarrow{v_i v_{i+1}}) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}$$

Karena n ganjil, maka $\frac{(n-1)}{2}$ merupakan bilangan bulat. Akibatnya $\frac{n\,(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$.

Dengan demikian diperoleh

$\lambda(v_n) - \lambda(v_1) \equiv 0 \pmod{n}$.

Jadi, $\lambda(v_n) = \lambda(v_1)$. Hal ini tidak diperbolehkan, karena pada pelabelan *graceful*, pelabelan titik-titiknya harus memenuhi fungsi satu-satu. Jadi digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ untuk n ganjil bukan merupakan digraf *graceful*.

Pelabelan *Graceful* pada Digraf Bipartit Lengkap

Digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ mempunyai $m + n$ titik dan $2mn$ arc. Dengan demikian pelabelan *graceful* pada digraf bipartit $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ lengkap menggunakan modulo $2mn + 1$. Misalkan digraph bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ mempunyai himpunan titik

$V(\overleftrightarrow{K_{m,n}}) = \{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_n\}$

dan himpunan *arc*

$A(\overleftrightarrow{K_{m,n}}) = \{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}, b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}\}$

dengan

$a_{ij} = \overrightarrow{u_i\, v_j}$ dan $b_{ij} = \overrightarrow{v_j\, u_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., m, j = 1, 2, 3, ..., n$.

Sebagai ilustrasi penotasian titik dan *arc* pada digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ dapat dilihat pada Gambar 2.

Berikut ini diberikan teorema pelabelan *graceful* pada digraf bipartit lengkap.

Teorema 3 Untuk setiap m dan n digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ merupakan digraf *graceful*.

Bukti

Definisikan pelabelan untuk titik-titik dari digraf $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ sebagai berikut.

$\lambda(ui) = i - 1$

untuk $i = 1, 2, 3, ..., m$,

$\lambda(vj) = mj$

untuk $j = 1, 2, 3, ..., n$.

Dapat dilihat bahwa label dari titik u_i berbeda semua untuk $i = 1, 2, 3, ..., m$ dengan himpunan label $\{0, 1, 2, ..., m\text{-}1\}$. Demikian juga label titik v_j, berbeda semua untuk $j = 1, 2, 3, ..., n$ dengan himpunan label $\{m, 2m, 3m, ..., nm\}$. Dapat dilihat juga bahwa label titik u_i berbeda dengan label titik v_j. Jadi pelabelan titik pada digraf $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ memenuhi fungsi satu-satu $V\ \overleftrightarrow{K_{m,n}}$ ke $\{0, 1, 2, ..., 2mn\}$.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka *arc*-nya mendapat label menurut aturan sebagai berikut.

$\lambda(a_{ij}) = \lambda(\overrightarrow{u_i v_j}) = mj - i + 1$ dan

$\lambda(b_{ij}) = \lambda(\overrightarrow{u_i v_j}) = m\ (2n - j) + 1$

Untuk $i = 1, 2, 3, ..., m$,

$j = 1, 2, 3, ..., n$.

Dengan demikian untuk $i = 1, 2, 3, ..., m$, himpunan label untuk *arc* a_{ij} adalah $\{mj, mj - 1, mj - 2, ..., mj - m + 1\}$ dan himpunan label untuk *arc* b_{ij} adalah $\{ 2mn{-}mj + 1, 2mn{-}mj + 2, ..., 2mn + m\}$ Jadi untuk $j = 1, 2, 3, ..., n$ himpunan label untuk *arc* a_{ij} adalah $\{m, m - 1, m - 2, ..., 1\} \cup \{m, 2m, 2m - 1, 2m - 2, ..., m + 1\} \cup ... \cup \{mn, mn - 1, mn - 2, ..., mn - m + 1\}$ dan himpunan label untuk *arc* b_{ij} adalah $\{2mn - m + 1, 2mn - m + 2, ..., 2mn\} \cup \{2mn - 2m + 1, 2mn - 2m + 2, ..., 2mn - m\} \cup ... \cup \{mn + 1, mn + 2, \ldots, mn + m\}$.

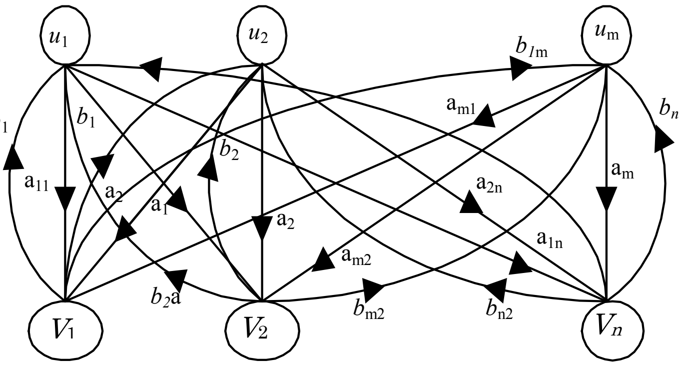
Jadi label setiap *arc* dari digraf $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ berbeda semua. Karena pelabelan titik-titiknya memenuhi fungsi satu-satu dari $V\,\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ ke $\{0, 1, 2, ..., 2mn\}$ dan pelabelan *arc*-nya berbeda semua maka pelabelan λ di atas adalah pelabelan *graceful*. Jadi digraf $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ adalah *graceful* untuk setiap m dan n.

Sebagai ilustrasi, Gambar 3 menunjukkan pelabelan *graceful* pada digraf $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$.

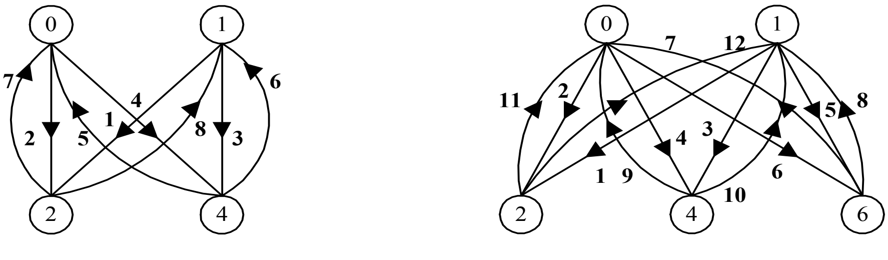
KESIMPULAN

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut. Digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ merupakan digraf *graceful* untuk n genap. Sedangkan untuk n ganjil digraf lintasan $\overrightarrow{P_n}$ bukan merupakan digraf *graceful*. Digraf bipartit lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$ merupakan digraf *graceful* untuk setiap m dan n.

Permasalahan pelabelan *graceful* pada kelas digraf masih terbuka bagi peneliti yang lain, misalnya pelabelan *graceful* pada digraf sikel, digraf lengkap, digraf kipas, digraf matahari, dan digraf *friendship*.



Gambar 2. Penotasian Digraf Bipartit Lengkap $\overleftrightarrow{K_{m,n}}$



Gambar 3. Pelabelan *Graceful* pada Digraf $\overleftrightarrow{K_{2,2}}$ dan $\overleftrightarrow{K_{2,3}}$

DAFTAR RUJUKAN

Aldred, R.E.L. & McKay, B.D. 1998. Graceful and Harmonious Labellings of Trees. *Bull. Inst. Combin. Application*, 23:69-72.

Bloom, G.S. & Hsu, D.F. 1985. Graceful Directed Graphs. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 519–536.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1996. *Graphs & Digraphs, 3rd edition*. New York: Chapman and Hall.

Golomb, S.W. 1972. *How to Number A Graph, in Graph Theory and Computing*. New York: Academic Press.

Hoede, C. & Kuiper, H. 1978. All Wheels are Graceful. *Utilitas Mathematica*, 14:311.

Huda, M.T. & Wijaya, K. 2002. Pelabelan Graceful pada Graf Tangga L_n dan Graf Gabungan m Buah Graf Tangga mL_n. Jember: *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 32–43.

Rosa, A. 1967. *On Certain Valuation of A Graph, in Theory of Graphs*. Proceeding of International Symposium on Mathematics, Paris, July 1967.