

## SIMULASI KONVEKSI-DIFUSI DALAM MEDIA BERPORI

Huda, C., Harja, A. dan Dharmawan, I.A.

Departemen Fisika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran  
Jl. Raya Bandung-Sumedang Km. 21 Jatinangor 45363, Sumedang, Jawa Barat,  
Email: iad@geophys.unpad.ac.id

### ABSTRAK

Fenomena perpindahan panas merupakan fenomena alam yang banyak diteliti dan diaplikasikan di berbagai bidang baik itu sains, teknologi maupun industri. Dalam paper ini, disajikan pemodelan dan simulasi untuk mengamati distribusi temperatur dan kecepatan dari proses perpindahan panas secara konveksi-difusi. Simulasi ini dilakukan menggunakan metode *Lattice Boltzmann* dalam dua dimensi. Dalam simulasi ini nilai bilangan *Rayleigh* divariasikan untuk mengetahui pengaruhnya terhadap proses perpindahan panas yang terjadi. Hasil simulasi menunjukkan terdapat pengaruh dari variasi bilangan *Rayleigh*, geometri dan *buoyancy* terhadap proses perpindahan panas.

**Kata kunci:** Konveksi-difusi, metode *Lattice Boltzmann*, bilangan *Rayleigh*, *buoyancy*

### ABSTRACT

The phenomenon of heat transfer is a natural phenomenon that is widely studied and applied in various fields such as science, technology and industry. In this paper, modeling and simulation are presented to observe the distribution of temperature and velocity of the process of heat transfer by convection-diffusion. This simulation was performed using the *Lattice Boltzmann* method in two dimensions. In this simulation on the value of the Rayleigh number was varied to determine its influence on heat transfer process occurs. The simulation results show the effect of variations of Rayleigh numbers, geometry and buoyancy on the heat transfer process.

**Key words:** convection-diffusion, Lattice Boltzmann methods, Rayleigh number, buoyancy

## PENDAHULUAN

Fenomena perpindahan panas merupakan salah satu fenomena yang ada di dalam kehidupan sehari-hari. Pembahasan mengenai perpindahan panas ini pun menjadi hal penting dalam berbagai macam bidang baik itu bidang sains, teknologi maupun bidang industri. Bidang teknologi industri misalnya, banyak menggunakan prinsip-prinsip dasar proses perpindahan panas. Chen and Doolen, 1998. Dalam bidang Geofisika, perpindahan panas merupakan salah satu fenomena yang sangat penting. Salah satunya adalah tentang penelitian dan eksplorasi geotermal yang sangat berkaitan dengan fenomena perpindahan panas. Oleh karena itu, fenomena perpindahan panas ini merupakan hal yang menarik untuk dapat diteliti dan dikembangkan. Dalam penelitian ini, fenomena yang diteliti adalah fenomena aliran konveksi-difusi. Fenomena konveksi-difusi merupakan fenomena perpindah secara konveksi dan difusi secara bersamaan. Perpindahan panas konveksi terjadi pada saat sejumlah fluida (gas ataupun cair) mengalir dengan membawa panas yang ikut dengan aliran fluida tersebut. Sedang-

kan difusi adalah peristiwa mengalirnya suatu zat dari bagian yang berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Sukup and Thorne, 2005.

Suatu penelitian dapat dilakukan secara eksperimen di laboratorium maupun secara numerik. Akan tetapi, penelitian secara eksperimen di laboratorium terkadang membutuhkan biaya yang mahal dan proses yang cukup rumit. Oleh karena itu, dibutuhkan metode alternatif dalam mempelajari suatu fenomena atau permasalahan, salah satu metodenya adalah dengan menggunakan simulasi secara komputasi.

Metode simulasi secara komputasi memiliki beberapa keuntungan. Diantaranya proses penelitian dapat dilakukan tanpa membutuhkan dana yang besar, memiliki tingkat resiko yang rendah dan membutuhkan waktu yang lebih singkat. Apabila penelitian dilakukan dengan menggunakan sistem aslinya, kemungkinan akan membutuhkan dana yang besar, waktu yang lama dan terkadang beresiko tinggi. Oleh karena itu, simulasi secara komputasi dapat membantu dalam mempelajari karakteristik suatu sistem atau fenomena (Bhatnagar *et al.*, 1954).

Penelitian mengenai konveksi-difusi telah banyak dilakukan sebelumnya. Diantara penelitian-penelitian yang ada, penelitian pada tahun 1996 yang dilakukan oleh Xiaowen Shan tentang simulasi konveksi alamiah (Xiaowen, 1997), kemudian pada tahun 2011 penelitian mengenai pengaruh nilai Rayleigh dalam konveksi alamiah oleh Ramathan Vishnampet (Vishnampet, 2011) dan penelitian oleh Zhenhua Chai tahun 2013 mengenai metode Lattice Boltzmann untuk persamaan konveksi-difusi (Chai dan Zhao, 2013). Pada penelitian ini, yang dilakukan adalah mensimulasikan fenomena konveksi-difusi pada media berpori.

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode Lattice Boltzmann. Suatu fluida dapat dianggap sebagai kumpulan-kumpulan partikel yang terdistribusi, sehingga dengan melakukan diskritisasi dari persamaan transport Boltzmann dan dengan menggunakan aproksimasi dari Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) maka fungsi distribusi dari tiap partikel dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan Lattice Boltzmann yang terdiskritisasi (Leal and Oberhauser, 2000). Terdapat beberapa variasi yang dilakukan, diantaranya adalah variasi bilangan Rayleigh, variasi gaya gravitasi yang mempengaruhi aliran fluida dan variasi model geometri yang digunakan. Bilangan Rayleigh adalah bilangan tak berdimensi yang berhubungan dengan perpindahan oleh pengaruh gaya apung (*buoyancy*). Bilangan ini digunakan untuk menghitung konveksi bebas (*natural convection*)

**Persamaan Difusi**, merupakan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan tentang fluktuasi densitas suatu material yang mengalami proses difusi. Persamaan difusi dapat dijelaskan pada persamaan di ini.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\phi, \mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}, t))$$

Dalam satu dimensi persamaan difusi dapat dituliskan sebagai berikut (Mohamad, 2011).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

dengan  $\phi$  merupakan variabel terikat (temperatur, densitas, momentum dan lain-lain) yang berdifusi di dalam medium tak hingga ke segala arah. Laju difusi bergantung kepada parameter D, dengan D dapat merupakan koefisien difusi panas, koefisien difusi massa atau viskositas kinematik untuk difusi energi, massa dan momentum. Proses difusi akan bertambah cepat apabila nilai parameter D naik (Bhatnagar *et al.*, 1954).

Persamaan 2 di atas, memiliki turunan kedua terhadap ruang, untuk itu proses difusi berlangsung untuk kedua arah dan membutuhkan dua syarat batas. Selain itu, persamaan tersebut juga memiliki turunan pertama terhadap waktu, difusi terjadi satu arah terhadap waktu, sehingga difusi pada suatu titik bergantung pada waktu sebelumnya dan tidak bergantung pada waktu setelahnya. Hal ini juga membutuhkan kondisi awal untuk menyelesaikan persamaan difusi di atas (Mohamad, 2011).

Dari persamaan difusi pada persamaan 2.1, persamaan konveksi-difusi dapat diperoleh dan dijelaskan oleh persamaan 2.3 (Chai and Zhao, 2013) berikut.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot (D \nabla \phi)$$

dengan  $\phi$  merepresentasikan variabel skalar dan merupakan fungsi dari waktu dan ruang, D adalah koefisien difusi dan  $\mathbf{u}$  adalah kecepatan yang ditentukan dari persamaan Navier-Stokes untuk fluida inkompresibel (Chai and Zhao, 2013).

Persamaan Navier-Stokes adalah bentuk diferensial dari hukum kedua Newton tentang gerakan. Persamaan gerak yang paling lengkap untuk elemen fluida berviskositas dalam medan gravitasi adalah persamaan Navier-Stokes. Untuk fluida dengan aliran tidak termampatkan, dalam dua dimensi, bentuk konservatif dari persamaan Navier-Stokes dapat ditulis dalam sistem koordinat Cartesian. Persamaan Navier-Stokes dituliskan dapat dijelaskan dalam persamaan 4 berikut (Chai and Zhao, 2013).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{a}$$

dengan P adalah tekanan,  $\nu$  merupakan viskositas kinematik,  $\mathbf{u}$  adalah kecepatan dan  $\mathbf{a}$  merepresentasikan percepatan yang diakibatkan oleh gaya luar. Ruas kanan merupakan gaya adveksi atau total percepatan dari fluida. Persamaan pertama dari ruas kanan, merupakan persamaan yang menunjukkan *pressure gradient* dan dua persamaan setelah *pressure gradient* merupakan persamaan yang menjelaskan tentang *shear stress* yang disebabkan karena efek viskositas (Mohamad, 2011) Dalam persamaan Navier-Stokes ini, persamaan kontinuitas harus terpenuhi,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Metode Lattice Boltzmann merupakan salah satu metode yang dapat menyelesaikan persamaan Navier-Stokes dengan menggunakan model mikroskopik dan persamaan kinetik mesoskopik. Dalam penelitian ini digunakan model *lattice* D2Q9 yang merupakan model *lattice* dalam bentuk 2 dimensi dan memiliki 9 arah kecepatan. Metode ini merupakan metode yang berdasarkan pada persamaan transport Boltzmann dengan pendekatan Bhatnagar-Gross-Krook yang dapat ditulis dalam bentuk diskrit pada persamaan 6 berikut

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)]$$

Distribusi kesetimbangan pada model ini menggunakan persamaan (6):

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = \omega_i \rho \left( 1 + 3e_i \mathbf{u} + \frac{9}{2} (e_i \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right)$$

dengan  $\mathbf{c}_i$  adalah arah kecepatan partikel,  $f_i(\mathbf{r}, t)$  merepresentasikan kemungkinan menemukan partikel pada *node*  $\mathbf{r}$  dan waktu  $t$  yang bergerak pada arah  $\mathbf{c}_i$ ,  $\tau$  adalah parameter relaksasi BGK dan  $f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)$  menyatakan distribusi kesetimbangan pada *node*  $\mathbf{r}$  dan waktu  $t$  yang besarnya bergantung pada densitas lokal,  $\rho$  dan kecepatan makroskopik  $\mathbf{u}$ . Variabel  $\omega_i$  merupakan faktor bobot partikel yang besarnya bergantung arah kecepatan,  $\rho$  merupakan massa jenis. Massa jenis ( $\rho$ ) dan momentum ( $j$ ) disajikan pada persamaan 7 dan persamaan 8 yang diperoleh dengan menjumlahkan semua komponen masing-masing

$$\rho(\mathbf{x}, t + 1) = \sum_{i=0}^8 f_i(\mathbf{x}, t + 1)$$

$$j(\mathbf{x}, t + 1) = \sum_{i=0}^8 [f_i(\mathbf{x}, t + 1) \mathbf{c}_i]$$

Dengan  $\rho(\mathbf{x}, t + 1)$  adalah densitas dan  $j(\mathbf{x}, t + 1)$  adalah momentum pada posisi  $\mathbf{x}$ , dan waktu  $t + 1$ . Kecepatan makroskopik ( $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + 1)$ ) pada setiap titik dihitung dengan menggunakan persamaan 9 berikut:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + 1) = \frac{j(\mathbf{x}, t + 1)}{\rho(\mathbf{x}, t + 1)}$$

Untuk kasus konveksi-difusi, persamaan transport Boltzmann dapat ditulis seperti pada persamaan 10 berikut

$$\phi_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - \phi_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_\phi} [\phi_i(\mathbf{x}, t) - \phi_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] + R_i(\mathbf{x}, t)$$

dengan  $\phi_i(\mathbf{x}, t)$  adalah fungsi distribusi dan fungsi distribusi setelah tabrakan yang berhubungan dengan kecepatan  $\mathbf{c}_i$  pada posisi  $\mathbf{x}$  dan waktu  $t$ , dan  $\tau_\phi$  adalah parameter relaksasi.

Dari persamaan 11, pada proses konveksi-difusi ini terdapat pengaruh gaya luar,  $R_i(\mathbf{x}, t)$  yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$R_i(\mathbf{x}, t) = \omega_i \left( 1 - \frac{1}{2\tau_\phi} \right) \delta \frac{c_i (\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \mathbf{a})}{c_i^2}$$

Untuk fungsi kesetimbangan  $\phi_i^{eq}$ , didefinisikan pada persamaan 12 di bawah ini:

$$\phi_i^{eq} = \omega_i \phi \left[ 1 + \frac{c_i \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(c_i \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right] + \lambda_i \frac{\phi P}{\rho_0 c_s^2}$$

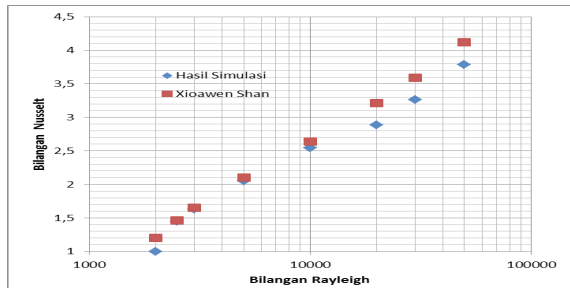
Dalam mensimulasikan konveksi-difusi dengan menyelesaikan persamaan konveksi-difusi, persamaan Navier-Stokes juga harus diselesaikan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Agar simulasi yang dilakukan dapat memberikan hasil yang sesuai dengan teorinya, perlu dilakukan validasi. Pada tahapan ini, validasi dilakukan dengan membandingkan hasil simulasi yang dilakukan dengan hasil simulasi yang telah dilakukan oleh Xiowen Shan sebelumnya. Penelitian tersebut berjudul *Simulation of Rayleigh-Benard Convection using Lattice Boltzmann Method* yang dilakukan oleh Xiaowen Shan pada tahun 1996. Simulasi dalam tahap validasi ini dilakukan dengan keadaan yang sama dengan yang dilakukan oleh Xiaowen sebelumnya.

Simulasi dilakukan dengan menggunakan geometri berukuran 100×50 piksel dengan nilai bilangan Prandtl 0.71. Pada simulasi ini divariasikan bilangan Rayleigh yang digunakan. Simulasi dimulai dengan bilangan Rayleigh 2000, kemudian dinaikkan ketika simulasi sudah dalam keadaan setimbang. Variasi nilai Rayleigh yang digunakan adalah 2000, 2500, 3000, 5000, 10000, 20000, 30000 dan 50000. Dari hasil simulasi akan diperoleh nilai bilangan *Nusselt*.

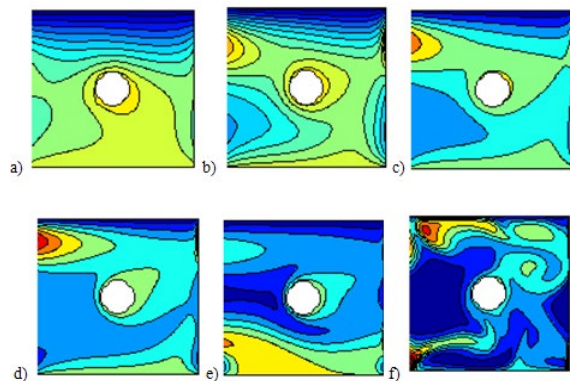
Setelah simulasi selesai, kemudian data bilangan *Nusselt* dan bilangan *Rayleigh* diplot ke dalam grafik kemudian dibandingkan dengan grafik hasil simulasi yang dilakukan oleh Xiaowen sebelumnya. Data hasil simulasi dan data dari penelitian oleh Xiaowen Shan diplot di dalam satu grafik dan diperoleh bentuk grafik seperti Gambar 1 berikut.



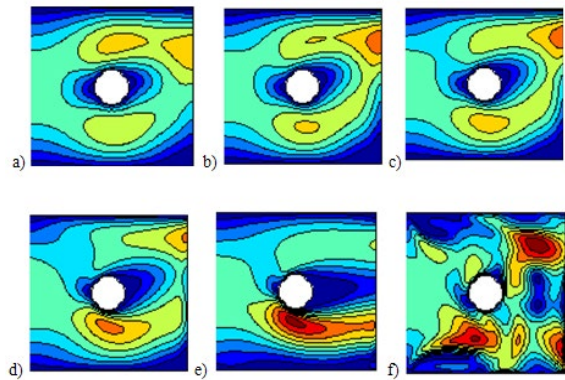
Gambar 1. Grafik perbandingan hasil simulasi dengan penelitian oleh Xiaowen Shan tahun 1996

Dari grafik di atas, dapat dilihat bahwasanya simulasi yang dilakukan tidak jauh berbeda dengan yang dilakukan oleh Xiaowen Shan. Dari data yang hasil simulasi, nilai error dapat dihitung diperoleh nilai error rata-rata sebesar 6,59%.

Selanjutnya adalah melakukan simulasi konveksi-difusi pada media berpori dengan memvariasikan bilangan Rayleigh. Geometri yang digunakan adalah geometri berukuran 100×100 piksel dengan satu penghalang dan tiga penghalang. Simulasi dimulai dengan nilai Rayleigh yang dimulai dari 1000. Ketika simulasi sudah pada keadaan setimbang, bilangan Rayleigh dinaikkan. Selain itu, pada simulasi ini fluida dibuat bergerak sehingga terjadi pemanasan fluida yang bergerak dengan sumber panas berasal dari dasar geometri dan penghalang. Fluida bergerak dengan kecepatan awal 0,1  $lu/it^2$  dengan  $Pr = 1$ , gravitasi = 0,001.

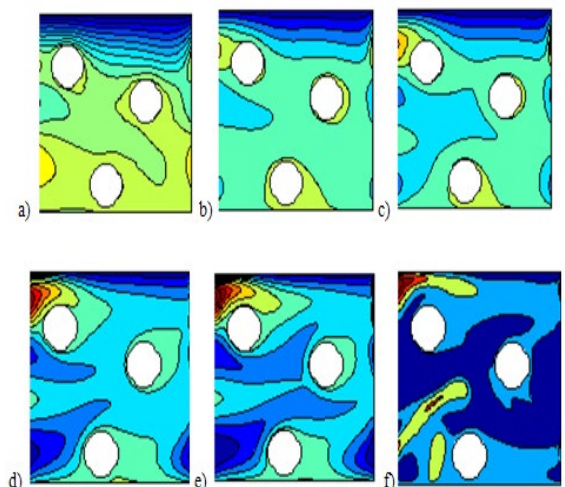


Gambar 2. Kontur distribusi temperatur geometri satu penghalang dengan nilai Rayleigh (a) 1000 (b) 5000 (c) 10 000 (d) 50000 (e) 100 000 (f) 1 000 000

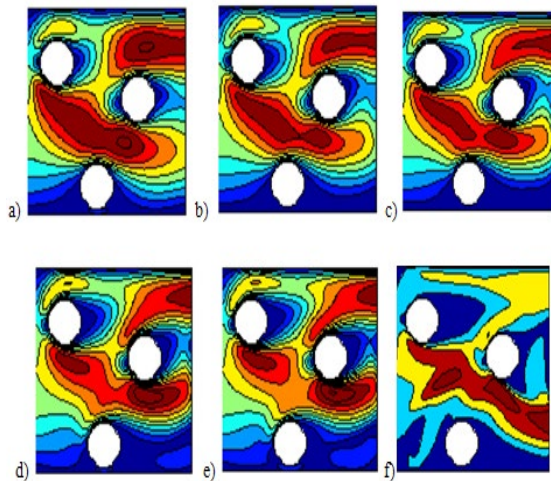


Gambar 3. Kontur distribusi kecepatan geometri satu penghalang dengan nilai Rayleigh (a) 1000 (b) 5000 (c) 10 000 (d) 50000 (e) 100 000 (f) 1 000 000

Pada variasi bilangan Rayleigh untuk geometri satu penghalang, ketika bilangan Rayleigh kecil distribusi temperatur yang dihasilkan besar. Hal ini menjelaskan bahwa perpindahan panas yang terjadi cenderung secara konduksi. Apabila keadaan fluida diam, pola distribusi temperatur yang dihasilkan adalah linear, seperti pada fenomena konveksi bebas (*natural convection*). Akan tetapi, pada hasil simulasi, terdapat perubahan pola distribusi temperatur. Hal ini disebabkan karena fluida dalam keadaan bergerak. Ketika bilangan Rayleigh dinaikkan, distribusi temperatur yang dihasilkan kecil. Hal ini disebabkan karena bertambah besarnya bilangan Rayleigh menyebabkan bertambah besar juga gaya apung (*buoyancy*). Hal ini mengakibatkan fluida akan bergerak lebih cepat akibat dari aliran konveksi yang terbentuk sehingga proses perpindahan panas ke fluida kecil. Hal ini menjelaskan bahwa perpindahan panas yang terjadi adalah secara konveksi. Dari distribusi kecepatan, semakin besar bilangan Rayleigh maka semakin cepat fluida mengalir. Hal ini dapat dilihat pada gambar 3 untuk bilangan Rayleigh 1 000 000 yang memiliki kecepatan fluida paling cepat. Hal ini disebabkan karena pengaruh dari aliran konveksi yang dihasilkan oleh proses perpindahan panas secara konveksi.



Gambar 4. Kontur distribusi temperatur geometri tiga penghalang dengan nilai Rayleigh (a) 1000 (b) 5000 (c) 10 000 (d) 50000 (e) 100 000 (f) 1 000 000



Gambar 5. Kontur distribusi geometri tiga penghalang kecepatan dengan nilai Rayleigh (a) 1000 (b) 5000 (c) 10 000 (d) 50000 (e) 100 000 (f) 1 000 000

Untuk geometri tiga penghalang dengan variasi bilangan Rayleigh, ketika bilangan Rayleigh kecil distribusi temperatur yang dihasilkan adalah besar sama seperti simulasi pada geometri satu penghalang. Perbedaannya adalah pada geometri ini, distribusi temperatur yang dihasilkan lebih besar. Hal ini disebabkan sumber panas yang digunakan selain berasal dari dasar geometri, juga berasal dari tiga penghalang tersebut. Hasil simulasi ini juga menjelaskan bahwa perpindahan panas yang terjadi cenderung secara konduksi. Ketika bilangan Rayleigh besar distribusi temperatur yang dihasilkan adalah kecil, sama seperti simulasi pada geometri satu penghalang. Akan tetapi untuk geometri tiga penghalang, distribusi yang dihasilkan lebih kecil. Hal ini disebabkan karena sumber panas yang digunakan lebih besar mengakibatkan fluida memiliki temperatur yang lebih tinggi dan hal ini juga menyebabkan fluida memiliki densitas yang lebih kecil sehingga fluida lebih mudah untuk berpindah. Oleh karena itu distribusi yang dihasilkan lebih kecil.

### SIMPULAN

Metode lattice Boltzmann dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan konveksi-difusi dalam hal melakukan mensimulasi konveksi-difusi dalam media berpori dengan variasi bilangan Rayleigh. Ketika bilangan Rayleigh kecil distribusi temperatur yang dihasilkan besar. Pola distribusi temperatur yang dihasilkan ketika bilangan Rayleigh kecil adalah

linear. Perubahan pola distribusi temperatur yang dihasilkan dalam tugas akhir ini disebabkan karena fluida yang digunakan dalam kondisi bergerak. Dari hasil simulasi tersebut dapat disimpulkan bahwa ketika bilangan Rayleigh itu kecil perpindahan panas yang terjadi secara konduksi dan hal ini sesuai dengan teori yang mendasari penelitian ini. Ketika bilangan Rayleigh besar menyebabkan bertambah besarnya gaya apung (*buoyancy*) yang dihasilkan, menyebabkan distribusi temperatur yang dihasilkan adalah kecil dan menjelaskan bahwasanya perpindahan yang terjadi cenderung secara konveksi. Untuk distribusi kecepatan yang dihasilkan dari proses simulasi, semakin bertambahnya bilangan Rayleigh maka aliran fluida akan semakin cepat.

### DAFTAR PUSTAKA

- Bhatnagar, P., Gross, E.P., & Krook, M.K. 1954. A model for collision process in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral onecomponent system Phys. Rev, 94: 511.
- Chai, Z. & Zhao, T.S. 2013. Lattice Boltzmann model for the convection diffusion equation. Phys. Rev E 87.063309.
- Chen, S. & Doolen, G.D. 1998. Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annual Rev Fluid Mech 30:329-364.
- Shan, X. 1997. Simulation on Rayleigh-Benard convection using a lattice. Boltzmann method. Phys. 55 (3).
- Leal, L.G. & Oberhauser, J.P. 2000. Non-Newtonian fluid mechanics for polymeric liquids: A status report, Korea-Australia Rheology Journal March 2000 12 (1): 1-25.
- Mohamad, A.A. 2011. Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. London: Springer
- Sukop, M.C. & Thorne, D.T. Jr. 2005. Lattice Boltzmann Modelling: An Introduction for Geoscientists and Engineers. Miami: Springer.
- Vishnampet, R. 2011. High Rayleigh number natural convection inside. 2D porous enclosures using the lattice Boltzmann method. Journal of HeatTransfer, 133: 062501-1.