

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH

Asep K. Supriatna *
Edy Soewono #

*) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
Km 21 Jatinangor Sumedang

#) Jurusan Matematika FMIPA ITB & P4M ITB
Ganesha 10, Bandung 40132

ABSTRAK

Di dalam paper ini dibahas model matematika deterministik untuk penyebaran penyakit demam berdarah. Ambang batas epidemik dapat ditentukan sebagai fungsi dari pertumbuhan nyamuk *Aedes aegypti*. Pertumbuhan nyamuk ini juga menentukan kestabilan dari state bebas demam berdarah dan state endemik demam berdarah. Analisis selanjutnya memperlihatkan bahwa pengontrolan epidemik yang efektif adalah dengan cara mengontrol pertumbuhan nyamuk tersebut secara periodik.

Kata kunci : model matematika, demam berdarah, ambang batas epidemik, state bebas demam berdarah, state endemik demam berdarah, kestabilan titik tetap, *Aedes aegypti*

A MATHEMATICAL MODEL FOR THE TRANSMISSION OF THE DENGUE FEVER

ABSTRACT

The paper discusses we discuss deterministic models for dengue transmission. An epidemic threshold can be obtained as a function of the growth rate of the *Aedes aegypti* mosquitoes. This growth rate determines the stability of the disease-free and endemic equilibrium. Further analysis shows that an effective control of the disease can be done by controlling the growth of the mosquitoes periodically.

Keywords : dengue model, epidemic threshold, disease-free equilibrium, endemic equilibrium, stability of a fixed point, *Aedes aegypti*

PENDAHULUAN

Demam Berdarah (DBD) merupakan suatu penyakit yang harus diwaspadai. Gubler dan Clark (1995) menyebutkan bahwa sekitar dua setengah milyar orang di seluruh dunia mempunyai resiko terjangkit penyakit ini. Penyakit ini sangat mematikan, rata-rata kematian bisa mencapai 40% kalau penderita dibiarkan tanpa pengobatan (Beneson, 1990). Umumnya DBD muncul di negara-negara tropis. Tetapi beberapa ilmuwan memprediksi bahwa kalau terjadi pemanasan bumi (*climate change*), tidak mustahil penyebaran juga bisa sampai ke tempat yang lebih dingin atau sub-tropis (Patz dkk, 1996). Hal inilah, salah satunya, yang

mendorong banyaknya penelitian DBD di negara-negara maju, yang umumnya beriklim sub-tropis.

Hal lain yang mendorong penelitian DBD karena sejauh ini belum tersedia vaksin yang dapat digunakan untuk pencegahan DBD ini (Patz dkk, 1998). Sebagai alternatif, biasanya pencegahan DBD dilakukan dengan pengendalian/pemberantasan vektor pembawa DBD ini, yaitu nyamuk *Aedes aegypti*, baik dengan penyemprotan maupun dengan pengontrolan oleh predator alamnya, seperti *Toxorhynchites amboinensis* (Mangaraja, 1998).

Secara umum, penyebaran DBD erat kaitannya dengan kondisi iklim di tempat yang bersangkutan. Kondisi iklim ini menentukan sifat biologis/fisik dari *Aedes aegypti*, yang pada akhirnya juga menentukan sifat dan pola penyebaran DBD ini (Focks dkk, 1995; Doshoff dan Levin, 1995). Hal ini mengisyaratkan bahwa pengendalian vektor harus juga memperhatikan iklim dimana vektor tersebut hidup. Di dalam paper ini akan dibahas bagaimana mekanisme dan dinamika penyebaran DBD ini dengan bantuan model matematika. Hal ini penting untuk dilakukan, salah satunya adalah untuk memperoleh pengendalian vektor yang optimal.

POKOK BAHASAN

Di dalam paper ini diasumsikan bahwa kondisi perubahan iklim mempengaruhi *recruitment rate* dari *Aedes aegypti* secara periodik. Faktor iklim ini akan disisipkan pada model standar yang dikembangkan oleh Esteva dan Vargas (1998). Oleh sebab itu, untuk dapat membandingkan hasil yang diperoleh dari model dengan sisipan iklim ini, maka dibahas juga model dan hasil yang diperoleh Esteva dan Vargas tersebut.

Model Esteva-Vargas mengasumsikan bahwa populasi manusia pada suatu daerah adalah konstan, sebesar N_H . Asumsi ini berarti bahwa laju kematian sama dengan laju kelahiran, misalkan besarnya μ_H . Populasi nyamuk *Aedes aegypti* diberikan oleh persamaan

$$\frac{dN_V}{dt} = A - \mu_V N_V,$$

dengan N_V , A dan μ_V berturut-turut merupakan jumlah populasi, laju penambahan (*recruitment rate*) dan laju kematian dari *Aedes aegypti*. Untuk waktu yang cukup lama ($t \rightarrow \infty$) jumlah *Aedes aegypti* ini akan mendekati suatu nilai konstan, yaitu A/μ_V .

Selanjutnya populasi manusia kita bagi menjadi tiga sub-populasi: *susceptible* S_H , *infective* I_H dan *recovered* R_H . Sedangkan populasi *Aedes aegypti* kita bagi dua sub-populasi saja mengingat masa hidup nyamuk cukup singkat dibandingkan dengan masa hidup manusia. Kedua sub-populasi tersebut adalah *susceptible* S_V dan *infective* I_V . Dengan notasi ini, model penyebaran DBD diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - \mu_H S_H \\ \frac{dI_H}{dt} &= \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H \\ \frac{dR_H}{dt} &= \gamma_H I_H - \mu_H R_H \\ \frac{dS_V}{dt} &= A - \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V S_V \\ \frac{dI_V}{dt} &= \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V I_V\end{aligned}$$

dimana β_H dan β_V berturut-turut merupakan probabilitas penyebaran demam berdarah dari nyamuk ke manusia dan dari manusia ke nyamuk, serta b merupakan rata-rata gigitan seekor nyamuk per hari.

Permasalahan yang biasa dikaji dalam teori epidemik diantaranya adalah memprediksi berapa jumlah penderita pada saat yang akan datang. Keadaan ini dapat di lihat misalnya dengan cara menentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan di atas. Titik kesetimbangan (titik tetap) tersebut diperoleh pada saat terjadi "zero growth rate" untuk setiap sub-populasi. Dengan cara seperti ini Esteva dan Vargas (1998) memperoleh dua jenis titik tetap untuk pasangan proporsi sub-populasi orang yang sehat (*susceptible human*), penderita (*infective human*) dan nyamuk pembawa virus (*infective vector*), yaitu

$$P_1 = \left(\frac{S_H}{N_H}, \frac{I_H}{N_H}, \frac{I_V}{A/\mu_V} \right) = (1, 0, 0)$$

dan

$$P_2 = \left(\frac{S_H}{N_H}, \frac{I_H}{N_H}, \frac{I_V}{A/\mu_V} \right) = \left(\frac{\gamma + \beta\delta}{\gamma(1+\alpha)}, \frac{(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\beta\gamma(1+\alpha)}, \frac{(\alpha\gamma - \beta\delta)}{\alpha(\gamma + \beta)} \right),$$

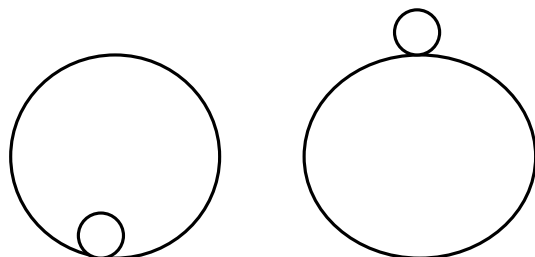
dengan $\alpha = \frac{b\beta_H A}{\mu_H \mu_V N_H}$, $\beta = \frac{\gamma_H + \mu_H}{\mu_H}$, $\gamma = \frac{b\beta_V}{\mu_H}$ dan $\delta = \frac{\mu_V}{\mu_H}$.

Titik tetap P_1 menyatakan bahwa kondisi setimbang terjadi apabila seluruh populasi manusia sudah tidak terjangkit DBD dan tak satu pun nyamuk terkena virus DBD ini. Sedangkan P_2 menyatakan bahwa akan selalu ada sebagian manusia yang terjangkit DBD. Hal ini yang dinamakan sebagai kondisi endemik dari DBD. Kita perhatikan bahwa kondisi endemik P_2 muncul apabila

$R = \frac{\alpha\gamma}{\delta\beta} > 1$. Sebaliknya, jika $R = \frac{\alpha\gamma}{\delta\beta} < 1$, maka tidak terjadi kondisi endemik.

Dalam hal ini DBD akan musnah. Beberapa literatur misalnya Bailey (1975) menyebut bilangan \sqrt{R} sebagai *basic reproductive ratio*, yakni banyaknya kasus DBD yang terjadi apabila seorang penderita dicampurkan pada populasi orang sehat. Sedangkan R sendiri dinamakan ambang epidemik (*epidemic threshold*).

Selain masalah eksistensi titik tetap di atas, hal lain yang menarik untuk dibahas adalah masalah stabilitas titik tetap tersebut. Sebuah titik tetap dinamakan *stabil* jika gangguan kecil terhadap titik tetap ini selalu akan membawa sistem kembali ke titik tetap (lihat Gambar 1 sebagai Ilustrasinya).

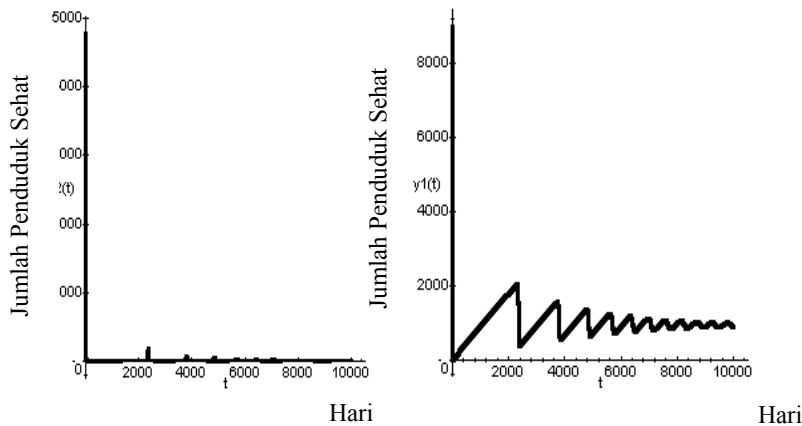


Gambar 1: Ilustrasi kestabilan. Gambar sebelah kiri menunjukkan penampang sebuah bola pingpong di dalam sebuah bola basket. Jika bola basket ini digoyang-goyangkan maka pada akhirnya bola pingpong akan kembali ke tempat semula. Gambar tersebut mengilustrasikan kondisi kestabilan dari sebuah titik tetap. Pada gambar sebelah kanan, goyangan sedikit saja dari bola basket akan menyebabkan bola pingpong tersebut jatuh dari tempat asalnya, yang mengilustrasikan kondisi ketidakstabilan sebuah titik tetap.

Telah dijelaskan bahwa jika $R < 1$ maka yang muncul hanya satu titik tetap saja, yakni P_1 yang mengatakan bahwa pada akhirnya DBD akan hilang. Misalnya beberapa orang penderita DBD atau nyamuk yang mengandung virus DBD dari daerah lain datang ke suatu daerah yang bebas DBD. Akibat interaksi dari penderita pendatang tersebut dengan nyamuk lokal atau nyamuk pendatang pembawa virus dengan penduduk lokal yang sehat, maka beberapa kasus DBD mungkin akan muncul di daerah yang tadinya bebas DBD tadi. Akan tetapi karena R yang kecil, Esteva dan Vargas (1998) memperlihatkan bahwa P_1 bersifat stabil, artinya lama kelamaan penyakit ini akan hilang dengan sendirinya.

Sebaliknya, jika $R > 1$, maka muncul dua buah titik tetap, P_1 dan P_2 . Dalam hal ini Esteva dan Vargas (1998) memperlihatkan bahwa state bebas DBD bersifat tak stabil dan sebaliknya state endemik DBD bersifat stabil. Artinya kedatangan seorang penderita DBD saja ke daerah yang tadinya bebas DBD akan mengakibatkan DBD menjadi endemik di daerah yang didatangi penderita tadi. Dalam hal ini Soewono dan Supriatna (2000) dapat memprediksi waktu yang diperlukan penularan dari seorang penderita menjadi 10 penderita, 20 penderita, dst.

Gambar 2 memperlihatkan sebuah contoh grafik populasi sehat (Gambar 2a) dan penderita (Gambar 2b) terhadap waktu untuk nilai R yang sangat besar ($R=10,5$ dan sangat jauh dari 1) sebagai output dari model Esteva-Vargas ini. Dalam contoh ini diambil jumlah populasi adalah 10000 orang, terdiri dari 90% populasi sehat dan 10% penderita DBD (contoh ini mungkin tidak realistis, hanya sebagai ilustrasi saja). Terlihat bahwa setelah 10000 hari kurang dari 2000 orang saja populasi yang belum terkena DBD (Gambar 2a). Ledakan DBD terjadi pada saat-saat awal, kemudian disusul dengan letupan-letupan kecil misalnya setelah lewat 2000 hari, menjelang 4000 hari dan seterusnya semakin mengecil, tetapi tetap ada (Gambar 2b)

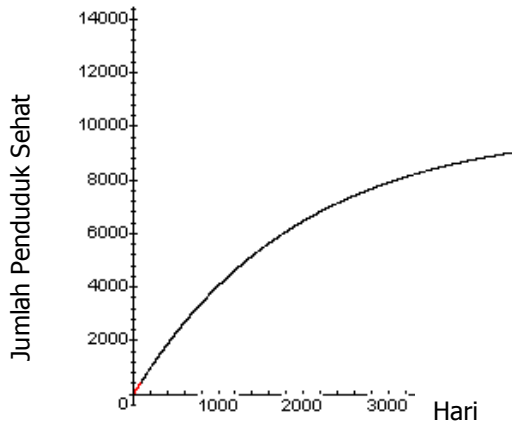


Gambar 2: Gambar sebelah kiri (Gambar 2a) adalah grafik populasi sehat (S_H dalam model Esteva-Vargas atau $y_1(t)$ pada gambar di atas) dan gambar sebelah kanan (Gambar 2b) adalah grafik penderita DBD (I_H dalam model Esteva-Vargas atau $y_2(t)$ pada gambar di atas). Angka-angka yang digunakan adalah seperti pada Esteva dan Vargas (1998), yaitu: $\mu_H = 0,0000457/\text{hari}$, $\mu_V = 0,25/\text{hari}$, $b = 0,5$, $N_H = 10000$, $\beta_H = 0,75$, $\beta_V = 1$, $\gamma_H = 0,1428/\text{hari}$ dan $A = 5000$. Dalam hal ini diperoleh state endemik $S_H^* = 953$ dan $I_H^* = 12$ yang stabil (t dalam satuan hari).

Dalam ilustrasi di atas, jelas bahwa yang sangat berpengaruh dalam pola penyebaran DBD adalah R . Hal ini mengisyaratkan bahwa pengontrolan DBD yang efektif adalah dengan cara menekan angka ini sekecil mungkin menjauhi 1. Selama R masih besar, maka keberhasilan penanggulangan DBD hanya bersifat sementara. Kalau kita uraikan lebih lanjut akan kita peroleh

$$R_0 = \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A / (\mu_V)^2}{(N_H)^2 (\gamma_H + \mu_H)}$$

Jadi salah satu cara penanggulangan DBD adalah dengan menjaga agar A (*recruitment rate*) dari *Aedes aegypti* sekecil mungkin pada setiap saat atau dengan menjaga agar μ_V (*death rate*) dari *Aedes Aegypti* sebesar mungkin pada setiap saat. Kecilnya A atau besarnya μ_V yang hanya sesaat tidak akan efektif mengingat kestabilan dari state endemik DBD. Gambar 3 memperlihatkan contoh numerik apabila pengendalian DBD dilakukan dengan pengontrolan A . Misalkan secara alami nilai $A=5000$, dengan grafik pertumbuhan populasi seperti pada Gambar 2. Jadi dalam hal ini akan muncul state endemik DBD yang stabil. Selanjutnya kita lakukan pengontrolan, misalnya setiap enam bulan sekali nilai A kita tekan menjadi 400. Ternyata dengan cara pengontrolan seperti ini state endemik DBD hilang, yakni pada akhirnya $I_H=0$ dan $I_V=0$.



Gambar 3: Grafik populasi sehat S_H terhadap waktu (dalam hari) jika dilakukan pengontrolan agar nilai A tidak melebihi angka 400. Dalam hal ini semua parameter seperti pada Gambar 2 kecuali A yang selalu berubah setiap enam bulan sekali dari 5000 ke 400 secara periodik. I_H tidak nampak karena dengan cepat menuju ke nol akibat pengontrolan A ini.

Pengaruh Iklim pada Pola Penyebaran DBD

Esteva dan Vargas (1998) sama sekali tidak memasukan faktor iklim dalam model penyebaran DBD di atas. Model ini tentunya kurang realistis, karena iklim dapat saja mempengaruhi pola pertumbuhan nyamuk *Aedes aegypti* dan pada akhirnya mempengaruhi pola penyebaran DBD ini.. Dalam bagian ini penulis

mencoba memasukkan faktor iklim ini ke dalam dinamika pertumbuhan nyamuk *Aedes aegypti*.

Misalkan iklim, khususnya di daerah tropis yang mempunyai dua musim, mengakibatkan fluktuasi pada tingkat *recruitment rate* A secara periodik. Pada musim hujan nilai $A=A_1$ dan pada musim kemarau nilai $A=A_2$. Model secara umum persis sama dengan model Esteva-Vargas di atas, kecuali nilai A yang periodik ini. Perubahan kecil ini berimplikasi cukup signifikan terhadap penentuan stabilitas titik tetap dari sistem penyebaran DBD yang ada. Eksistensi titik tetap diperoleh dengan cara mereduksi sistem dinamik menjadi berdimensi tiga dan reduksi selanjutnya ke sistem dinamik berdimensi dua dapat melihat sekilas tentang kestabilan dari titik tetap yang dihasilkan (kestabilan dari state bebas DBD dan state endemik DBD).

Reduksi pertama dilakukan mengingat kedua populasi, manusia dan nyamuk, diasumsikan konstan, yaitu $S_H + I_H + R_H = N_H$ dan $S_V + I_V = A / \mu_V$. Dengan asumsi ini, jika kita lakukan skala t dengan μ_t maka kita peroleh sistem dinamik tiga dimensi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - x - \alpha x z \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x z - \beta y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma(1 - z)y - \delta z\end{aligned}$$

dengan $x=S_H/N_H$, $y=I_H/N_H$, $z=I_V(A/\mu_V)$ serta α , β , γ dan δ seperti pada model sebelumnya. Titik tetap dari sistem ini adalah P_1 dan P_2 sama seperti P_1 dan P_2 sebelumnya, akan tetapi pengujian stabilitasnya tidak semudah seperti sebelumnya.

Reduksi kedua dilakukan dengan mengasumsikan bahwa $R_H=0$, yakni untuk tipe DBD ini tidak ada kekebalan, jadi setiap penderita yang sembuh masih dimungkinkan dihindangi DBD (mungkin DBD tipe yang lain). Kenyataan yang ada menunjukkan bahwa proporsi populasi penderita DBD sangat kecil dibandingkan dengan jumlah populasi keseluruhan, N_H ataupun jumlah populasi yang tidak terinfeksi, N_0 . Dengan demikian model dapat direduksi menjadi sistem dinamik berdimensi dua

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \alpha(\varepsilon - y)z - \beta y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma(1 - z)y - \delta z\end{aligned}$$

dengan $\varepsilon = \frac{N_0}{N_H}$

Untuk melihat kestabilan titik tetap dari model ini pembahasan dibagi menjadi dua bagian. Pertama jika $A_1=A_2$, maka model menghasilkan titik tetap $F_1=(y_1, z_1)=(0,0)$, yaitu state bebas DBD, yang bersifat stabil apabila $\alpha < (\delta\beta)/(\gamma\varepsilon)$. Sebaliknya apabila $\alpha > (\delta\beta)/(\gamma\varepsilon)$, maka muncul dua buah titik

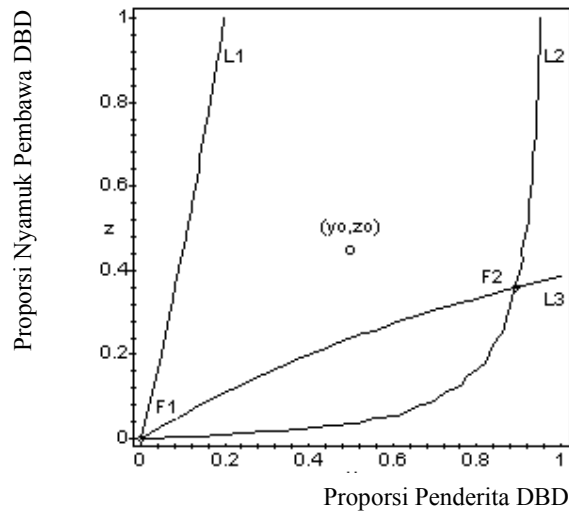
tetap, yaitu F_1 yang tidak stabil dan $F_2 = (y_2, z_2) = \left(\frac{\alpha\varepsilon\gamma - \beta\delta}{(\alpha + \beta)\gamma}, \frac{\alpha\varepsilon\gamma - \beta\delta}{\alpha(\varepsilon\gamma + \delta)} \right)$,

yaitu state endemik DBD, yang bersifat stabil (lihat Lampiran 1). Dalam hal ini, $\alpha = (\delta\beta)/(\gamma\varepsilon)$ merupakan titik ambang batas epidemik (*epidemic threshold*).

Kedua, jika $A_1 \neq A_2$ maka titik tetap yang dihasilkan selalu dua buah apabila salah satu dari *recruitment rate* A mengakibatkan sistem berada di atas ambang batas epidemik. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $A_2 > A_1$, yakni *recruitment rate* pada perioda kedua lebih besar dari pada *recruitment rate* pada perioda pertama, maka dalam hal ini A_2 menghasilkan dua buah titik tetap sedangkan A_1 hanya menghasilkan state bebas DBD. Gambar 4 memperlihatkan isoklin dari *infective host* y , yaitu L_1 untuk A_1 dan L_2 untuk A_2 , serta isoklin *untuk infective vector* z , yaitu L_3 .

Dalam hal $A_1 \neq A_2$, setiap kondisi awal (y_0, z_0) selalu ditarik oleh state endemik DBD jika *recruitment rate* *Aedes aegypti* sangat tinggi, kemudian pada perioda berikutnya ditarik oleh state bebas DBD yang diakibatkan oleh *recruitment rate* *Aedes aegypti* yang rendah. Begitu seterusnya. Jadi kestabilan dapat ditentukan dengan melihat seberapa jauh suatu keadaan ditarik oleh F_1 dan seberapa jauh kemudian ditarik oleh F_2 . Lampiran 2 memperlihatkan satu kondisi yang harus dipenuhi agar titik tetap ini stabil.

Model penyebaran DBD dengan pertumbuhan nyamuk yang dipengaruhi oleh iklim memperkuat hasil analisis dari model Esteva dan Vargas yang menyatakan bahwa kondisi endemik dapat muncul. Salah satu kelemahan dari kedua model di atas adalah tidak melibatkan mobilitas/migrasi populasi (baik populasi manusia atau pun nyamuk) secara eksplisit. Padahal, Clancy (1996) memperlihatkan bahwa baik mobilitas manusia maupun nyamuk sangat berpengaruh dalam pola penyebaran DBD. Pengaruh migrasi ini sangat menarik untuk dikaji. Contoh dalam sistem biologi lain memperlihatkan bahwa migrasi dapat mempengaruhi kebijakan yang harus diambil dalam pengontrolan populasi (Supriatna dan Possingham, 1999). Hal yang sama mungkin terjadi dalam masalah pengontrolan DBD ini.



Gambar 4: Isoklin dan titik tetap DBD.

KESIMPULAN

Sifat dan penyebaran penyakit demam berdarah sangat dipengaruhi oleh pertumbuhan dari nyamuk *Aedes aegypti* sebagai vektor pembawa virus. Besarnya laju pertumbuhan nyamuk sangat menentukan kestabilan dari state bebas dan state endemik demam berdarah. Hal ini berarti bahwa pertumbuhan nyamuk sangat menentukan apakah penyakit DBD ini akan segera hilang atau tetap akan bersifat endemik.

Analisis dari model di atas memperlihatkan bahwa pengontrolan yang bersifat tidak kontinu hanya bermanfaat sesaat saja, selanjutnya jika pertumbuhan nyamuk kembali membesar maka kestabilan dari titik tetap akan menyebabkan endemisitas dari DBD. Kondisi endemik DBD ini juga dapat muncul pada model kedua dimana pertumbuhan nyamuk diasumsikan dipengaruhi oleh iklim. Oleh sebab itu, pencegahan DBD yang efektif adalah dengan cara mengontrol pertumbuhan nyamuk tersebut secara periodik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Dr. Ridad Agoes, dr. MPH yang telah memberikan beberapa informasi yang diperlukan tentang penyakit demam berdarah. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada Dr. M. Qomarudin yang telah membaca draft tulisan ini dengan seksama dan juga atas kritik dan saran yang telah disampaikannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Beneson AS. 1990. Control of communicable diseases in man. Washington DC: American Public Health Association.
- Bailey N. 1975. The mathematical theory of infectious diseases. Griffin, London.
- Clancy D. 1996. Carrier-borne epidemic models incorporating population mobility. *Math. Biosc.* **132**:185-204.
- Doshoff J and S Levin. 1995. The effects of population heterogeneity on disease invasion. *Math. Biosc.* **128**:13-24.
- Esteva L and C Vargas. 1998. Analysis of a dengue disease transmission model. *Math. Biosc.* **150**:131-151.
- Focks DA, E Daniels, DG Haile and JE Keesling. 1995. A simulation model of the epidemiology of urban dengue fever: literature analysis, model development, preliminary validation and samples of simulation results. *Am. J. Med. Hyg.* **53**:489-506.
- Gubler, DJ and GC Clark. 1995. Dengue/dengue hemorrhagic fever: the emergence of a global health problem. *Emerging Infectious Diseases* **1**: 55 - 57.
- Nisbet RM and C Gurney. 1982. *Modelling Fluctuating Populations*. John Wiley, Brisbane. Australia.
- Mangaraja DT. 1998. Pengendalian hayati larva *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* dengan menggunakan predator *Toxorhynchites amboinensis* 3. Penelitian Hibah Bersaing V/2 1997/1998.
- Patz JA, PR Epstein, TA Burke and JM Balbus. 1996. Global climate change and emerging infectious diseases. *JAMA* **275**:217-223.
- Patz JA, WJM Martens, DA Focks and TH Jetten. 1998. Dengue fever epidemic potential as projected by general circulation models of global climate change. *Environ. Health Perspective* **106**:147-153.
- Soewono E dan AK Supriatna. 2000. A two-dimensional model for the transmission of dengue fever disease. *J. Malay. Math. Soc.* (to appear).
- Supriatna AK and HP Possingham. 1999. Harvesting a two-patch predator-prey metapopulation. *Natur. Res. Model.* **12**(4): 481-498.

LAMPIRAN

Pengujian kestabilan state bebas endemik dan state endemic

Pengujian kestabilan berikut ini menggunakan program Maple V 4.00a.

```
#A Simplified Dengue Model
#y = Infective Host, z = Infective Vector
> restart:
> dy:=alpha*(epsilon-y)*z-beta*y:
> dz:=gamma*(1-z)*y-delta*z:
> equils:=solve({dy,dz},{y,z});
> assign(equils):
> yo:=y:zo:=z:
> y:='y':z:='z':
> with(linalg):
> Jac:=jacobian([dy,dz],[y,z]):
> Jac1:=subs(y=0,z=0,evalm(Jac)):
> Jac2:=map(factor,subs(y=yo,z=zo,evalm(Jac))):
> eigenvals(Jac1);
> Char:=map(factor,collect(numer(charpoly(Jac2,lambda)),lambda)):
> A:=factor(coeff(Char,lambda^2)):
> B:=factor(coeff(Char,lambda)):
> C:=factor(tcoeff(Char,lambda)):
> a1:=B/A;
> a2:=C/A;
```

Program di atas menghasilkan output:

$$\text{equils} = \{z = 0, y = 0\}, \left\{ z = \frac{\alpha\epsilon\gamma - \beta\delta}{\alpha(\epsilon\gamma + \delta)}, y = \frac{\alpha\epsilon\gamma - \beta\delta}{(\alpha + \beta)\gamma} \right\}$$

yang merupakan dua buah titik tetap, berturut-turut state bebas DBD dan state endemic DBD. Dalam hal ini threshold epidemik diberikan oleh $\delta\beta < \gamma\epsilon\alpha$.

Eigenvalues untuk state bebas DBD diberikan oleh $\text{eigenvals}(\text{Jac1})$, yaitu:

$$-\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 + 4\alpha\epsilon\gamma} \quad \text{dan}$$

$$-\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 + 4\alpha\epsilon\gamma}.$$

Jika $(\beta + \delta)^2 - (\beta - \delta)^2 > 4\alpha\gamma\epsilon$ maka kedua eigenvalues negatif, yang artinya state bebas DBD stabil. Sebaliknya jika $(\beta + \delta)^2 - (\beta - \delta)^2 < 4\alpha\gamma\epsilon$ maka state tersebut tidak stabil. Kondisi $(\beta + \delta)^2 - (\beta - \delta)^2 < 4\alpha\gamma\epsilon$ berarti pula $\delta\beta < \alpha\gamma\epsilon$.

Stabilitas untuk state endemik DBD diperiksa dengan menggunakan kriteria Rout-Hurwitz, yaitu memeriksa tanda a_1 dan a_2 pada persamaan polinom $x^2+a_1x+a_2=0$. Apabila a_1 dan a_2 keduanya positif maka eigenvalues yang dihasilkan negatif, yang artinya state yang diperiksa bersifat stabil (Nisbet dan Gurney, 1982). Program di atas menghasilkan:

$$a_1 = \frac{2\delta\alpha\epsilon\gamma + \alpha^2\epsilon\gamma + 2\beta\alpha\epsilon\gamma + \delta^2\alpha + \beta^2\epsilon\gamma + \epsilon^2\gamma^2\alpha}{(\epsilon\gamma + \delta)(\alpha + \beta)} \text{ dan } a_2 = \alpha\epsilon\gamma - \beta\delta.$$

Jelas a_1 positif dan jika $\delta\beta < \alpha\gamma\epsilon$ maka a_2 juga positif.

Ilustrasi kestabilan state bebas endemik dan state endemik

Kita lakukan diskritisasi model dan tanpa mengurangi keumuman kita misalkan $\alpha_1 < \alpha_2$ serta $\Delta t = 1$. Selanjutnya kita peroleh

$$\Delta y = \alpha(\epsilon - y)z - \beta y \text{ dan } \Delta z = \gamma(1 - z)y - \delta z$$

Misalkan (y_0, z_0) merupakan state awal yang akan dibawa ke (y_1, z_1) oleh α_1 sejauh Δy_0 dan Δz_0 dan kemudian dibawa ke (y_2, z_2) oleh α_2 sejauh Δy_1 dan Δz_1 , dengan

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0 = y_0 + \alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0 \\ z_1 &= z_0 + \Delta z_0 = z_0 + \gamma(1 - z_0)y_0 - \delta z_0 \\ \Delta y_1 &= \alpha_2(\epsilon - y_1)z_1 - \beta y_1 \\ \Delta z_1 &= \gamma(1 - z_1)y_1 - \delta z_1. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tinjau rasio perubahan komponen y oleh α_2 terhadap α_1 , (rasio perubahan komponen z dapat dilakukan dengan cara yang sama), yakni

$$\frac{|\Delta y_1|}{|\Delta y_0|} = \frac{|\alpha_2(\epsilon - y_1)z_1 - \beta y_1|}{|\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0|}$$

$$\frac{|\Delta y_1|}{|\Delta y_0|} = \frac{|\alpha_2[\epsilon - (y_0 + \alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0)](z_0 + \gamma(1 - z_0)y_0 - \delta z_0) - \beta[y_0 + \alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0]|}{|\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0|}$$

$$\frac{|\Delta y_1|}{|\Delta y_0|} = \left| \frac{\alpha_2(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0}{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0} + \alpha_2 \frac{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0}{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0} z_1 \right.$$

$$\left. - \beta \frac{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0}{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0} + \frac{\Delta z_0}{\Delta y_0} \alpha_2(\epsilon - y_0) \right|$$

$$\frac{|\Delta y_1|}{|\Delta y_0|} = \left| \frac{\alpha_2(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0}{\alpha_1(\epsilon - y_0)z_0 - \beta y_0} + \alpha_2(z_0 + \gamma(1 - z_0)y_0 - \delta z_0) - \beta + \frac{\Delta z_0}{\Delta y_0} \alpha_2(\epsilon - y_0) \right|$$

Jika ruas kanan lebih besar dari satu maka α_2 lebih dominan daripada α_1 artinya pada akhirnya kondisi awal akan tertarik pada state endemik DBD. Di lain pihak jika ruas kanan kurang dari satu maka α_1 lebih dominan daripada α_2 artinya pada akhirnya kondisi awal akan tertarik pada state bebas endemik DBD.