

# PENAKSIR UNTUK RASIO POPULASI DENGAN MENGGUNAKAN KOEFISIEN REGRESI DAN DUAL PADA VARIABEL TAMBAHAN

Nahriati Ersa<sup>1\*</sup>, Sigit Sugiarto<sup>2</sup>, Rustam Efendi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau  
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

\* nahriati.ersa@yahoo.co.id

## ABSTRACT

In this article we discuss three estimators for population ratio using the coefficient regression and dual, which is a review from the article of Onyeka et.al [Global Journal of Science Frontier Research, 13(2013):57-65]. The three estimators are biased estimators and their mean square errors are determined. Furthermore, this mean square errors are compared to mean square error of each estimator. This comparison shows that the type-product estimator is more efficient than another estimators.

**Keywords:** Simple random sampling, ratio estimators, bias, mean square error.

## ABSTRAK

Dalam artikel ini membahas tiga penaksir untuk rasio populasi dengan menggunakan koefisien regresi dan dual, yang merupakan review dari artikel Onyeka, A.C et.al [Global Journal of Science Frontier Research, 13(2013):57-65]. Ketiga penaksir tersebut merupakan penaksir bias dan ditentukan *mean square error (MSE)*. Selanjutnya, *MSE* ini dibandingkan dengan *MSE* masing-masing penaksir. Perbandingan ini menunjukkan bahwa penaksir tipe-produk lebih efisien dari penaksir lainnya.

**Kata kunci:** Sampling acak sederhana, penaksir rasio, bias, mean square error.

## 1. PENDAHULUAN

Untuk memperkirakan keadaan populasi di dalam suatu survei biasanya diambil dari rata-rata dengan menggunakan metode sampling. Dalam penggunaan metode sampling ada dua cara, yaitu secara acak dan secara tidak acak. Adapun beberapa metode yang sering digunakan pada sampling secara acak diantaranya yaitu sampling acak sederhana. Penarikan sampel acak sederhana merupakan suatu metode untuk mengambil  $n$  unit sampel dari  $N$  unit populasi di mana setiap elemen memiliki kesempatan yang sama untuk dipilih sebagai unit sampel. Penarikan sampel ini adalah penarikan sampel acak tanpa pengembalian agar

karakteristik unit-unit lebih akurat. Probabilitas seluruh  $n$  unit-unit tertentu yang terpilih dalam  $n$  pengambilan adalah  $\binom{N}{n}^{-1}$  [1].

Dalam perkembangan teori sampling acak sederhana, telah dianggap bahwa penaksiran hanya berdasarkan aritmatika sederhana dengan nilai pengamatan pada sampel. Oleh karena itu metode penaksiran lain yang dapat dipertimbangkan adalah metode yang memanfaatkan informasi tambahan dalam kondisi tertentu, sehingga penaksiran yang diberikan lebih baik dari nilai rata-rata populasi sederhana. Metode tersebut adalah metode rasio.

Metode rasio merupakan suatu metode yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian suatu penaksiran. Dengan mengambil manfaat hubungan antara  $y_i$  dan  $x_i$  dimana  $y_i$  adalah unit dari populasi berkarakter  $Y$  berukuran  $N$  dan  $x_i$  adalah unit dari populasi berkarakter  $X$  berukuran  $N$ . Variabel tambahan dapat meningkatkan ketelitian penaksiran. Oleh karena itu, dibutuhkan variabel pendukung  $x_i^*$ , dimana  $x_i^*$  adalah sampel diluar  $x_i$  dalam populasi  $X$  yang berhubungan dengan  $y_i$  yang akan diteliti untuk setiap sampel yang berukuran  $n$ . Dengan perbandingan  $\bar{y}$  dan  $\bar{x}$  setara dengan perbandingan  $\bar{Y}$  dan  $\bar{X}$ . Dengan  $\bar{y}$  dan  $\bar{x}$  adalah rata-rata sampel. Dengan  $\bar{y}/\bar{x} = \hat{R}$  yang akan digunakan untuk menaksir rata-rata populasi yaitu  $\bar{Y}$  dan  $\bar{X}$ . Dengan  $\bar{Y}/\bar{X} = R$ . Kemudian dibutuhkan juga  $x_i^* = (N\bar{X} - nx_i)/(N - n), i = 1, 2, \dots, N$  dan  $\bar{x}^* = (1 + \pi)\bar{X} - \bar{x}, \pi = n/(N - n)$ .

Untuk menentukan bias dan  $MSE$  pada sampling acak sederhana digunakan teorema variansi dan kovariansi.

**Teorema 1.1** [2:h.27] Apabila sampel berukuran  $n$  diambil dari populasi berukuran  $N$  yang berkarakter  $Y$  pada sampling acak sederhana maka variansi rata-rata sampel  $\bar{y}$  dinotasikan dengan  $V(\bar{y})$  dan dirumuskan sebagai

$$V(\bar{y}) = \frac{(1-f)}{n} S_y^2,$$

dengan  $f = n/N$  adalah fraksi penarikan sampel dan  $S_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 / (N - 1)$

adalah variansi  $y_i$  pada populasi berkarakter  $Y$ .

Bukti dari Teorema ini dapat dilihat pada [1: h.27].

**Teorema 1.2** [2:h.29] Jika  $y_i, x_i$  adalah sebuah pasangan yang bervariasi ditetapkan pada unit dalam populasi dan  $\bar{y}, \bar{x}$  adalah rata-rata dari sampel acak sederhana berukuran  $n$ , maka kovariansi  $\bar{y}, \bar{x}$  dinotasikan dengan  $Cov(\bar{y}, \bar{x})$  dinotasikan dengan

$$Cov(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{N-n}{nN} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})}{N-1}.$$

Buktidari Teorema 1.2 dapat dilihat pada [2: h. 29]. ■

## 2. BIAS DAN MSE PENAKSIR UNTUK RASIO POPULASI

Dalam penelitian ini akan dibandingkan tiga penaksir yaitu penaksir tipe-regresi ( $\hat{R}_1$ ), penaksir tipe-rasio ( $\hat{R}_2$ ), dan penaksir tipe-produk ( $\hat{R}_3$ ) untuk rasio populasi. Ketiga penaksir tersebut merupakan penaksir bias, maka untuk mendapatkan penaksir yang lebih efisien maka akan dibandingkan *mean square error* (*MSE*) dari ketiga penaksir tersebut.

- a. Penaksir tipe-regresi ( $\hat{R}_1$ ) untuk rasio populasi dengan menggunakan koefisien regresi ( $B$ ) yang diajukan oleh Onyeka, A.C, dkk [3] dirumuskan sebagai

$$\hat{R}_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x} - B(\bar{x}^* - \bar{X})}, \quad (1)$$

dengan  $B = S_{yx} / S_x^2$  menyatakan koefisien regresi populasi  $y$  atas  $x$ , dengan memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan *MSE* dari persamaan (1) adalah

$$B(\hat{R}_1) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (1 + \pi B) [(1 + \pi B) R S_x^2 - S_{yx}],$$

$$MSE(\hat{R}_1) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1-f}{n} (S_y^2 + (1 + \pi B)^2 R^2 S_x^2 - 2(1 + \pi B) R B S_x^2).$$

- b. Penaksir tipe-rasio ( $\hat{R}_2$ ) untuk rasio populasi yang dirumuskan dengan

$$\hat{R}_2 = \frac{\bar{y}\bar{x}^*}{\bar{x}\bar{X}}, \quad (2)$$

dengan memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan *MSE* dari persamaan (2) adalah

$$B(\hat{R}_2) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (1 + \pi) (R S_x^2 - S_{yx}),$$

$$MSE(\hat{R}_2) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1-f}{n} (S_y^2 + (1 + \pi)^2 R^2 S_x^2 - 2(1 + \pi) R B S_x^2).$$

- c. Penaksir tipe-produk ( $\hat{R}_3$ ) yang dirumuskan sebagai

$$\hat{R}_3 = \frac{\bar{y}\bar{X}}{\bar{x}\bar{x}^*}, \quad (3)$$

memanfaatkan Teorema 1 dan Teorema 2, maka diperoleh bias dan *MSE* dari persamaan (3) adalah

$$B(\hat{R}_3) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) [(1 - \pi + \pi^2) R S_x^2 - (1 - \pi) S_{yx}]$$

$$MSE(\hat{R}_3) \approx \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1-f}{n} (S_y^2 + (1 - \pi)^2 R^2 S_x^2 - 2(1 - \pi) R B S_x^2).$$

### 3. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Selanjutnya akan ditentukan penaksir yang efisien dengan membandingkan  $MSE$  dari penaksir  $\hat{R}_1$ , penaksir  $\hat{R}_2$ , dan penaksir  $\hat{R}_3$ .

- a. Perbandingan antar penaksir  $\hat{R}_1$  dengan penaksir  $\hat{R}_2$

Diperoleh bahwa penaksir  $\hat{R}_2$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_1$  jika

$$B > \frac{(-1-R) + \sqrt{W_1}}{(\pi R - 2)} \text{ dengan } 1 - 2R + R^2 - 2\pi R + 2\pi R^2 + \pi^2 R^2 = W_1.$$

- b. Perbandingan antar penaksir  $\hat{R}_1$  dengan penaksir  $\hat{R}_3$

Diperoleh bahwa penaksir  $\hat{R}_3$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_1$  jika  $B > \frac{(1+R) + \sqrt{W_1}}{(\pi R - 2)}$

$$\text{dengan } 1 + 6R + R^2 + 2\pi R - 2\pi R^2 + \pi^2 R^2 = W_1.$$

- c. Perbandingan antar penaksir  $\hat{R}_2$  dengan penaksir  $\hat{R}_3$

Diperoleh bahwa penaksir  $\hat{R}_3$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_2$  jika  $B > R$ .

**Contoh** Sebagai contoh pembahasan diberikan data pada tabel yaitu tentang jumlah pendapatan perkapita Petani karet di Kelurahan Air Tiris, Kecamatan Kampar, Kabupaten Kampar, Provinsi Riau, pada Tahun 2013. Jumlah pendapatan petani karet ( $Y$ ) dan jumlah produksi karet yang diperoleh petani karet ( $X$ ). Data ini merupakan suatu sampel dengan  $n=40$ . Dalam artikel ini data tersebut dianggap sebagai populasi dengan  $N=40$ . Dari populasi ini diambil sampel  $n=30$ . Peneliti ingin mengetahui rata-rata pendapatan perkapita dari petani. Kemudian diambil jumlah produksi karet yang diperoleh petani ( $X$ ) untuk dijadikan sebagai informasi tambahan. Dengan data ini akan ditentukan penaksir yang paling efisien dengan menghitung  $MSE$  dari masing-masing penaksir yang diberikan.

Tabel 1: Data tentang jumlah pendapatan perkapita Petani karet di Kelurahan Air Tiris, Kecamatan Kampar, Kabupaten Kampar, Provinsi Riau, pada Tahun 2013.

No	Jumlah Pendapatan (Ribuan) ( $Y$ )	Jumlah Produksi (Ton) ( $X$ )	No	Jumlah Pendapatan (Ribuan) ( $Y$ )	Jumlah Produksi (Ton) ( $X$ )
1	Rp15,096.0	1776	6	Rp16,524.0	1944
2	Rp16,524.0	1944	7	Rp13,185.6	1608
3	Rp14,280.0	1680	8	Rp15,504.0	1824
4	Rp16,320.0	1920	9	Rp19,152.0	2280
5	Rp16,728.0	1968	10	Rp12,240.0	1440

11	Rp17,952.0	2112	26	Rp21,828.0	2568
12	Rp17,952.0	2112	27	Rp17,748.0	2088
13	Rp14592.0	1824	28	Rp14,076.0	1656
14	Rp15,096.0	1776	29	Rp13,056.0	1536
15	Rp14,892.0	1752	30	Rp22,032.0	2592
16	Rp16,728.0	1968	31	Rp12,052.8	1488
17	RP13,056.0	1536	32	Rp22,908.0	2760
18	Rp20,800.8	2568	33	Rp19,788.0	2328
19	Rp10,036.8	1224	34	Rp12,288.0	1536
20	Rp11,832.0	1392	35	Rp16,524.0	1944
21	Rp18,768.0	2208	36	Rp15,096.0	1776
22	Rp23,052.0	2712	37	Rp12,864.0	1608
23	Rp15,912.0	1872	38	Rp15,504.0	1824
24	Rp18,972.0	2232	39	Rp18,564.0	2184
25	Rp16,932.0	1992	40	Rp20,808.0	2448

Dalam mengaplikasikan contoh dalam perbandingan *MSE* dari penaksir (1), (2) dan (3) maka dengan bantuan Microsoft Excel diperoleh nilai-nilai sebagai berikut

Tabel 2: Nilai-nilai yang Dibutuhkan untuk Membandingkan *MSE* dari Ketiga Penaksir

$N$	40	$\pi$	3
$n$	30	$S_y^2$	10557773,33
$\bar{Y}$	16431,6	$S_x^2$	143372,3
$\bar{X}$	1950	$S_{yx}$	1225277
$f$	0,75	$\theta_1$	11,54
$B$	8,54	$\theta_2$	4
$R$	8,42	$\theta_3$	-2

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang diperoleh pada Tabel 2 ke persamaan, maka diperoleh *MSE* dari ketiga penaksir tersebut.

Tabel3: Nilai *MSE* dari Masing-masing Penaksir

Penaksir Rasio	<i>MSE</i>
$(\hat{R}_1)$	17,63
$(\hat{R}_2)$	0,19
$(\hat{R}_3)$	0,12

Dengan menggunakan informasi pada Tabel3, diperoleh bahwa penaksir  $\hat{R}_3$  memiliki nilai *MSE* terkecil.

#### 4. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas diperoleh bahwa penaksir  $\hat{R}_3$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_2$  dan penaksir  $\hat{R}_1$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_1$ . Jadi, dapat disimpulkan bahwa penaksir  $\hat{R}_3$  lebih efisien daripada penaksir  $\hat{R}_1$  dan penaksir  $\hat{R}_2$  untuk rasio populasi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain. L. J, & M. Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*. Duxbury Press, California.
- [2] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi Ketiga*. Terj. Dari *Sampling Techniques*, oleh Rudiansyah & E. R Osman. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3] Onyeka, A.C., Nlebedim, V.U. & Izunobi, C.H. 2013. Estimation of Population Ratio in Simple Random Sampling using Variable Transformation. *Global Journal of Science Frontier Research*, 13 : 57-65.
- [4] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.
- [5] Yanto. 2013. Penaksir Rasio yang Efisien untuk Rata-rata Populasi dengan Menggunakan Desil pada Acak Sederhana. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau, Pekanbaru.