FAKTORISASI POLINOMIAL ALJABAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE EUCLIDEAN DAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR

Rora Oktafia[1*], Sri Gemawati[2], Endang Lily[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, (28293), Indonesia

[*]rora oktafia@unri.ac.id

ABSTRACT

This article discusses a factorization of algebraic polynomial of order n using the Euclidean method and the greatest common factor. The new polynomial is equivalent to the original polynomial. The new polynomial is formed by multiplication of the roots of the original polynomial.

Keyword: *factorization polynomials, method Euclidean, greatest common divisor.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas faktorisasi polinomial aljabar pangkat n dengan menggunakan metode Euclidean dan faktor persekutuan terbesar, yang menghasilkan polinomial baru yang ekivalen dengan polinomial asal. Polinomial baru yang diperoleh berbentuk perkalian akar-akar dari polinomial asal.

Kata kunci: *faktorisasi polinomial, metode Euclidean, faktor persekutuan terbesar.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu metode yang digunakan untuk memfaktorkan polinomial pangkat n adalah metode Euclidean dan faktor persekutuan terbesar. Metode ini bertujuan untuk menemukan faktor dari polinomial n dan bentuk baru dari polinomial $f(x)$. Prosesnya yaitu fungsi polinomial $f(x)$ berpangkat n ditentukan turunan pertamanya, dengan $f'(x)$. Kemudian dari dua polinomial $f(x)$ dan $f'(x)$ dihitung faktor persekutuan terbesar dengan menggunakan metode Euclidean dimana polinomial $f(x) = G_0(x)$, dengan deg $f(x) = n$ dan $f'(x) = G_0'(x)$, dengan deg $f'(x) = m$. Proses ini berakhir bila sudah ditemukan $G_k = 1$. Kemudian dapat ditentukan $N_k, N_{k-1}, \dots, N$ dimana $N_k = m_{k-1}$ yang merupakan nilai pangkat dari polinomial $f(x)$ dan X_i merupakan faktor linear dari polinomial $f(x)$ dimana $X_k = G_{k-1}$, $G_k = 1$. Kemudian dapat ditemukan polinomial baru berbentuk perkalian akar yang sama bentuknya dengan polinomial pertama sehingga ditemukan faktor dari polinomial $f(x)$.

Berdasarkan ide dari B.M. Podlev'kyi cara yang mudah untuk menemukan faktor dari polinomial $f(x)$ adalah metode Euclidean dan faktor persekutuan terbesar bila dibandingkan dengan metode yang lain.

2. FAKTORISASI POLINOMIAL.

Metode Euclidean adalah cara yang digunakan untuk mencari faktor dari polinomial $f(x)$.

Teorema 1 [1, h. 164] Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial atas lapangan F, yang tak nol dan terdapat polinomial monik $d(x)$ atas F, maka

a) $d(x) \mid f(x)$ dan $d(x) \mid g(x)$,

b) Jika $c(x)$ adalah polinomial maka $c(x) \mid f(x)$ dan $c(x) \mid g(x)$ maka $c(x) \mid d(x)$.

Polinomial $d(x)$ dalam Teorema 2.1 disebut dengan faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$, faktor persekutuan terbesar ini dapat dihitung dengan menggunakan algoritma Euclidean untuk polinomial.

Bukti. Bukti dari Teorema 1 dapat dilihat pada [1, h. 164]

3. FAKTORISASI POLINOMIAL ALJABAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE EUCLIDEAN DAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR.

Bentuk umum polinomial adalah,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x + a_{n,} \deg f(x) = n, \quad (1)$$

merupakan polinomial berpangkat n yang memiliki bentuk polinomial baru dengan akar-akar perkalian. Jika $f(x) = 0$ dan $a_0, a_1, \dots, a_m$ akar polinomial (1) dan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah pangkat dari $f(x)$, maka

$$f(x) = a_0 \sum_{j=1}^{m} (x - \alpha_j)^{vj}, \sum_{j=1}^{m} v_j = n, m \leq n. \quad (2)$$

Persamaan (2) sulit kalau difaktorkan maka dihitung semua akar-akar polinomial dengan metode Euclidean dan faktor persekutuan terbesar. Persamaan (2) juga sama dengan

$$f(x) = X_1X_2^2X_3^3 \dots X_k^k. \quad (3)$$

Persamaan (3) juga ekivalen dengan

$$f(x) = \prod_{i=1}^{N_\beta} (x - \alpha_{\beta i}), \beta = 1, \dots, k, k \leq n, \quad (4)$$

dimana $\alpha_{\beta i}$ adalah akar polinomial. Dari persamaan (4) diperoleh

$$\deg f(x) = \sum_{\beta=1}^{k} \beta N_\beta = \sum_{j=1}^{m} v_j = n, \quad (5)$$

dari (5), maka dapat dihitung pangkat dari $f(x)$. Kemudian $f(x)$ pada persamaan (3) dapat ditentukan turunannya $f'(x)$ yaitu :

$$f'(x) = F(x)X_2X_3^2X_4^3 \dots X_k^{k-1}. \quad (6)$$

Dari (3) dan (6) dihitung faktor persekutuan terbesar $f(x)$ dan $f'(x)$ yaitu faktor persekutuan terbesar

$$(f, f') = G_1(x) = X_2 X_3^2 X_4^3 \dots X_k^{k-1}. \quad (7)$$

Ambil $m_1 = \deg G_1(x)$, maka persamaan (7) dapat dihitung faktor persekutuan terbesar

$$(G, G_1') = G_2(x) = X_3 X_4^2 X_5^3 \cdots X_k^{k-2}. \quad (8)$$

Kemudian ambil $m_2 = \deg G_2\,(x)$, maka dari persamaan (8) diperoleh

$$G_{k-2}, G_{k-2}') = G_{k-1}(x) = X_k,$$

dimana $m_{k-1} = N_k$. Dari persamaan (4) dapat ditemukan pangkat dari persamaan (5), (6), $\cdots$, (8) diperoleh $n, m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}$ maka

$$\begin{aligned} N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots + (k-1)N_{k-1} + kN_k &= n, \\ N_2 + 2N_3 + \cdots + (k-2)N_{k-1} + (k-1)N_k &= m_{1,} \\ N_3 + \cdots + (k-3)N_{k-1} + (k-2)N_k &= m_{2,} \\ &\vdots \\ N_{k-1} + 2N_k &= m_{k-2,} \\ N_k &= m_{k-1.} \end{aligned} \quad (9)$$

Dari persamaan (9) diperoleh $N_k, N_{k-1}, \cdots, N_1$, maka faktor dari polinomial $f(x)$

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{G_{i-1}G_{i+1}}{G_i^2}, i = 1, \cdots, k-1, \\ X_i &= G_{k-1.} \end{aligned} \quad (10)$$

Dari persamaan (10) didapatkan $G_0 = f(x)$ dan $G_k = 1$. Kemudian langkah dalam menentukan faktor polinomial $f(x)$ adalah,

1. Ambil $G_0(x) = f(x)$.
2. Tunjukan turunan dari $G_0'(x)$.
3. Gunakan algoritma Euclidean untuk menentukan faktor persekutuan terbesar $(G_{k-1}, G_{k-1}') = G_k(x)$, sehingga diperoleh koefisien polinomial $G_k(x)$ dengan pangkat $m_{k.}$
4. Jika $G_k(x) \neq 1$, kemudian ditunjukan turunan dari $G_k'(x)$ dan proses ini selesai jika $G_k = 1$
5. Kemudian subtitusikan nilai $(n, m_1, \cdots, m_{k-1})$, sehingga didapatkan nilai $N_k, N_{k-1}, \cdots, N_{1.}$
6. Dari persamaan (5) diperoleh faktor linear X_β, $\beta = 1,2, \cdots, k$.

4. CONTOH

Diberikan polinomial,

$$f(x) = x^6 - 15x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 24x - 32, \deg f(x) = 6,$$

kemudian hitung turunan dari $f(x)$ yaitu:

$$f'(x) = 6x^5 + 60x^3 - 42x^2 + 72x + 24.$$

Kemudian hitung faktor persekutuan terbesar (f, f') dengan metode Euclidean,

$$G_1(f, f') = x^3 + 3x^2 - 4, \deg G_1 = m_1 = 3,$$

dan

$$G_1'(x) = 3x^2 + 6x,$$

kemudian

$$G_2(G_1, G_1') = x + 2, \deg G_2 = m_2 = 1.$$

Kemudian subtitusikan $n, m_{1,} m_2$ kepersamaan (10)

$$\begin{aligned} N_1 + 2N_2 + 3N_3 &= 6, \\ N_2 + 2N_3 &= 3, \\ N_3 &= 1. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $N_3 = 1, N_2 = 1$ dan $N_3 = 1$, ini berarti bahwa polinomial memiliki tiga akar berbeda yaitu $\beta = 1,2,3$. Kemudian hitung nilai X_β dengan mensubtitusi kepersamaan (10)

$$X_i = \frac{G_{i-1} G_{I+1}}{G_1^2}.$$

Untuk $i = 1$, maka $X_1 = \frac{G_0(x) G_2(x)}{G_1^2(x)}$

$$X_1 = \frac{(x^6 - 15x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 24x - 32)(x + 2)}{(x^3 + 3x^2 - 4)}$$

$$X_1 = x - 4.$$

Untuk $i = 2$, maka $X_2 = \frac{G_1(x) G_3(x)}{G_2^2}$

$$X_2 = \frac{(x^3 + 3x^2 - 4)1}{(x - 2)^2}$$

$$X_2 = x - 1.$$

Untuk $i = 3$, maka $X_3 = \frac{G_2(x) G_4(x)}{G_3^2}$

$$X_3 = \frac{(x + 1)1}{1}$$

$$X_3 = x + 2.$$

Kemudian subtitusikan nilai X_1, X_2, X_3 kepersamaan (3), maka diperoleh polinomial $f(x)$ yang baru yaitu $f(x) = (x - 4)(x - 2)^2(x + 2)^3$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan dapat diambil kesimpulan bahwa dengan menggunakan metode Euclidean dan faktor persekutuan terbesar, maka dapat dihitung bentuk baru fungsi polinomial $f(x)$ tetapi polinomial yang diperoleh berbentuk perkalian akar . Pertama diberikan fungsi $f(x)$ kemudian akan ditemukan $f'(x)$, dengan metode Euclidean dihitung faktor persekutuan terbesar dengan $\deg m_k$. Cara ini selesai jika $G_k(x) = 1$, kemudian dihitung akar fungsi polinomial X_β maka diperoleh fungsi polinomial baru yang mempunyai bentuk sama dengan fungsi polinomial awal tetapi dalam bentuk faktor.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Durbin, J. R. 2000. *Modern Algebra An Introduction*. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gilbert, J. & L. Gilbert. 1992. *Element of Modern Algebra*. Spartanburg PWS-KENT Publishing Company Boston.

[3] Ostrowski, A. M. 1973. *Solution of Equations in Euclidean and Banach Space.* Academic Press, New York.

[4] Podlevs'kyi, B. M. 2003. *On One Method For Factorization Of Algebraic Polynomial.* Ukrainian Mathematical Journal, vol. 55, no. 9, 2003.