

PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN UNTUK VARIANSI POPULASI PADA SAMPLING ACAK SEDERHANA MENGGUNAKAN FRAKSI PENGAMBILAN SAMPEL

Rio Permadi^{1*}, Bustami², Haposan Sirait²

¹Mahasiswa Program S1 Matematika

²Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru 28293, Indonesia

*rio.permadi1@gmail.com

ABSTRACT

The estimators studied here are three ratio estimators for population variance in simple random sampling without replacement using sampling fraction. This study is a review of article written by Tailor and Sharma [*Statistics in Transition-new series* 13 (2012): 37-46]. All estimators are biased, then their mean square error (*MSE*) of the studied estimators are compared to obtain the most efficient estimator. An example is given to explain the studied problem.

Keywords: *ratio estimator, sampling fraction, simple random sampling, biased estimator and mean square error.*

ABSTRAK

Penaksir yang dibahas merupakan tiga penaksir rasio untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian dengan menggunakan fraksi pengambilan sampel, yang merupakan penjabaran dari artikel yang ditulis oleh Tailor dan Sharma [*Statistics in Transition-new series* 13 (2012): 37-46]. Ketiga penaksir merupakan penaksir bias, kemudian mean square error (*MSE*) dari penaksir tersebut dibandingkan untuk memperoleh penaksir yang paling efisien. Sebuah contoh diberikan untuk menunjukkan efisiensi dari penaksir.

Kata kunci: penaksir rasio, fraksi pengambilan sampel, sampling acak sederhana, penaksir bias dan mean square error.

1. PENDAHULUAN

Sampling acak sederhana terbagi atas dua yaitu sampling acak sederhana dengan pengembalian dan sampling acak sederhana tanpa pengembalian. Pada penelitian ini digunakan sampling acak sederhana tanpa pengembalian yaitu metode untuk mengambil sampel dari data populasi sehingga setiap elemen dari data populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk diambil, dan sampel yang telah diambil tidak dikembalikan ke populasi [1:h.21].

Suatu penaksir yang baik berasal dari sampel yang bersifat representatif, yaitu sampel dapat mewakili parameter populasi. Salah satu parameter yang ditaksir melalui sampling adalah variansi populasi. Ketelitian penaksir dapat ditingkatkan dengan menggunakan metode rasio. Dalam metode ini, suatu variabel tambahan yang berkarakter X berkorelasi positif dengan variabel yang akan diteliti yaitu variabel yang berkarakter Y , dimana informasi tentang populasi pada variabel tambahan telah diketahui [1:h.173].

Dalam artikel ini dibahas tiga penaksir rasio yang diajukan oleh Tailor dan Sharma [4] yaitu \hat{S}_{y1}^2 , \hat{S}_{y2}^2 dan \hat{S}_{y3}^2 untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana dengan menggunakan fraksi pengambilan sampel. Penaksir tersebut merupakan penaksir bias, untuk mendapatkan penaksir rasio yang efisien diantara ketiga penaksir adalah dengan membandingkan *Mean Square Error (MSE)* untuk masing-masing penaksir. Penaksir yang memiliki nilai *MSE* yang terkecil merupakan penaksir yang paling efisien.

2. SAMPLING ACAK SEDERHANA

Sampling acak sederhana adalah sebuah metode untuk mengambil n unit sampel dari N unit populasi dimana setiap unit memiliki kesempatan yang sama untuk diambil menjadi unit sampel. Pengambilan sampel dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian. Dalam hal ini pengambilan sampel tanpa pengembalian menyatakan satuan unit yang telah diambil tidak mungkin terambil kembali menjadi anggota sampel, sehingga hasil yang diperoleh lebih akurat

Pada sampling acak sederhana tanpa pengembalian, peluang satu dari n unit akan terambil menjadi sampel pada pengambilan pertama adalah n/N . Selanjutnya pada pengambilan ke dua adalah $(n-1)/(N-1)$, dan seterusnya, sehingga peluang dari n unit terambil pada pengambilan ke- n kali adalah $(C_n^N)^{-1}$ [1:h.21].

Untuk menentukan bias dan *MSE* dari masing-masing penaksir rasio digunakanlah teorema mengenai variansi.

Teorema 2.1 [1:h.30] Untuk sebuah sampling acak sederhana tanpa pengembalian dari populasi berkarakter Y , variansi sampel s_y^2 yang didefinisikan dengan

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1},$$

merupakan penaksir tak bias untuk variansi populasi S_y^2

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1}.$$

Bukti: Dapat dilihat pada [1:h.30]. ■

Teorema 2.2 [3:h.36] Sebuah sampel berukuran n diambil secara sampling acak sederhana tanpa pengembalian dari populasi berkarakter Y dan berukuran N , maka variansi dari s_y^2 dengan notasi $V(s_y^2)$ adalah

$$V(s_y^2) = \frac{1}{n} S_y^4 (\beta_{2(y)} - 1),$$

dengan $\beta_{2(y)} = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$,

Bukti: Dapat dilihat pada [3:h.36]. ■

3. BIAS DAN *MSE* PENAKSIR RASIO UNTUK VARIANSI POPULASI

Dalam artikel ini dibahas tiga penaksir untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana dengan menggunakan fraksi pengambilan sampel yang merupakan review dari artikel Tailor dan Sharma [4], yaitu

1. Bentuk dari penaksir rasio tipe 1 untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$\hat{S}_{y1}^2 = f s_y^2 + (1-f) s_y^2 \frac{S_x^2}{s_x^2} \quad (1)$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio tipe 1 pada persamaan (1), yaitu

$$B(\hat{S}_{y1}^2) \approx \frac{S_y^2}{n} (1-f)(\beta_{2(x)} - h),$$

$$MSE(\hat{S}_{y1}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 ((\beta_{2(y)} - 1) + (1-f)^2 (\beta_{2(x)} - 1) - 2(1-f)(h-1)). \quad (2)$$

dengan

$$f = \frac{n}{N}, \quad \beta_{2(x)} = \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}, \quad h = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}.$$

2. Bentuk dari penaksir rasio tipe 2 untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$\hat{S}_{y2}^2 = \left(\left(\frac{1-f}{1+2f} \right) s_y^2 + \left(\frac{3f}{1+2f} \right) s_y^2 \frac{S_x^2}{s_x^2} \right) \quad (3)$$

Bias dan *MSE* penaksir rasio tipe 2 pada persamaan (3), yaitu

$$B(\hat{S}_{y2}^2) \approx \frac{S_y^2}{n} \left(\frac{3f}{1+2f} \right) (\beta_{2(x)} - h),$$

$$MSE(\hat{S}_{y2}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\beta_{2(y)} - 1) + \left(\frac{3f}{1+2f} \right)^2 (\beta_{2(x)} - 1) - 2 \left(\frac{3f}{1+2f} \right) (h-1) \right). \quad (4)$$

3. Bentuk dari penaksir rasio tipe 3 untuk variansi populasi pada sampling acak sederhana adalah

$$\hat{S}_{y3}^2 = \left(\left(\frac{1-f}{1+3f} \right) s_y^2 + \left(\frac{4f}{1+3f} \right) s_y^2 \frac{S_x^2}{s_x^2} \right) \quad (5)$$

Bias dan MSE penaksir rasio tipe 3 pada persamaan (5), yaitu

$$B(\hat{S}_{y3}^2) \approx \frac{S_y^2}{n} \left(\frac{4f}{1+3f} \right) (\beta_{2(x)} - h),$$

$$MSE(\hat{S}_{y3}^2) \approx \frac{1}{n} S_y^4 \left((\beta_{2(y)} - 1) + \left(\frac{4f}{1+3f} \right)^2 (\beta_{2(x)} - 1) - 2 \left(\frac{4f}{1+3f} \right) (h - 1) \right). \quad (6)$$

4. PENAKSIR RASIO YANG EFISIEN

Untuk menentukan penaksir yang lebih efisien dari penaksir bias, dapat ditentukan dengan cara membandingkan MSE dari masing-masing penaksir. Penaksir yang lebih efisien merupakan penaksir dengan MSE terkecil.

- a. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{y1}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{y2}^2)$

Dari persamaan (2) dan (4) diperoleh bahwa penaksir S_{y2}^2 akan lebih efisien dari penaksir S_{y1}^2 jika $0 < f < 0,366$, dan $2 - 2\beta_{2(x)} < 0$ dengan $\beta_{2(x)} > 1$ maka

$$f < \frac{h - \beta_{2(x)} - \sqrt{K_1}}{1 - \beta_{2(x)}} \text{ atau } f > \frac{h - \beta_{2(x)} + \sqrt{K_1}}{1 - \beta_{2(x)}}, \quad (7)$$

dengan

$$K_1 = \beta_{2(x)}^2 - 2h\beta_{2(x)} + \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}h - \frac{1}{3}.$$

- b. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{y1}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{y3}^2)$

Dari persamaan (2) dan (6) diperoleh bahwa penaksir S_{y3}^2 akan lebih efisien dari penaksir S_{y1}^2 jika $0 < f < 0,333$, dan $3 - 3\beta_{2(x)} < 3$ dengan $\beta_{2(x)} > 1$ maka

$$f < \frac{h - \beta_{2(x)} - \sqrt{K_2}}{1 - \beta_{2(x)}} \text{ atau } f > \frac{h - \beta_{2(x)} + \sqrt{K_2}}{1 - \beta_{2(x)}}, \quad (8)$$

dengan

$$K_2 = \beta_{2(x)}^2 - 2h\beta_{2(x)} + \frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}.$$

c. Perbandingan $MSE(\hat{S}_{y3}^2)$ dengan $MSE(\hat{S}_{y2}^2)$

Dari persamaan (6) dan (4) diperoleh bahwa penaksir S_{y2}^2 akan lebih efisien dari penaksir S_{y3}^2 jika $0 < f < 1$, dan $17\beta_{2(x)} - 12h - 5 > 0$ maka

$$f < \frac{10h - 7\beta_{2(x)} - 3 - \sqrt{K_2}}{34\beta_{2(x)} - 24h - 10} \text{ atau } f > \frac{10h - 7\beta_{2(x)} - 3 - \sqrt{K_3}}{34\beta_{2(x)} - 24h - 10}, \quad (9)$$

dengan

$$K_3 = 49\beta_{2(x)}^2 - 4h\beta_{2(x)} - 94\beta_{2(x)} + 4h^2 - 4h + 49.$$

Contoh Sebagai contoh dari pembahasan, diberikan data pada Tabel 1 mengenai permintaan masyarakat terhadap air bersih (Y) pada Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Indragiri di Kota Tembilahan Kabupaten Indragiri Hilir [4] dengan menganggap $N = 99$ merupakan data populasi, kemudian dari populasi ini diambil sampel dengan $n = 30$. Data pada Tabel 1 tersebut digunakan untuk mengetahui variansi permintaan air bersih dengan memanfaatkan informasi tambahan yaitu pendapatan masyarakat (X).

Tabel 1: Permintaan air bersih pada Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Indragiri di Kota Tembilahan Kabupaten Hilir, Riau

No.	Permintaan Air Bersih (Y)	Pendapatan Masyarakat (X)	No.	Permintaan Air Bersih (Y)	Pendapatan Masyarakat (X)
1	29	2.500.000	52	18	1.600.000
2	27	2.500.000	53	21	2.000.000
3	15	1.500.000	54	20	1.600.000
4	32	3.000.000	55	30	2.800.000
5	20	2.200.000	56	20	1.600.000
6	27	2.000.000	57	11	1.400.000
7	25	2.500.000	58	9	1.200.000
8	18	2.000.000	59	19	1.200.000
9	17	2.000.000	60	32	2.600.000
10	22	2.300.000	61	32	3.200.000
11	30	2.500.000	62	19	2.500.000
12	29	2.500.000	63	18	1.500.000
13	25	2.500.000	64	32	2.700.000
14	20	1.900.000	65	13	1.800.000
15	28	2.500.000	66	29	2.600.000
16	30	2.500.000	67	28	2.500.000
17	35	4.000.000	68	19	2.500.000

18	10	1.400.000	69	31	3.000.000
19	25	3.500.000	70	7	2.000.000
20	20	2.000.000	71	20	2.300.000
21	20	2.300.000	72	10	1.400.000
22	16	2.100.000	73	15	2.500.000
23	20	2.000.000	74	15	2.100.000
24	21	2.000.000	75	35	3.300.000
25	21	2.000.000	76	30	3.000.000
26	30	2.500.000	77	20	2.000.000
27	15	1.800.000	78	24	3.000.000
28	25	2.500.000	79	36	5.000.000
29	32	3.000.000	80	29	3.000.000
30	25	2.300.000	81	28	2.500.000
31	25	3.000.000	82	31	3.000.000
32	10	1.400.000	83	12	1.400.000
33	30	2.700.000	84	35	1.600.000
34	27	2.500.000	85	28	2.000.000
35	22	2.000.000	86	12	1.500.000
36	21	1.700.000	87	10	1.400.000
37	28	3.100.000	88	33	2.500.000
38	29	2.500.000	89	21	2.000.000
39	19	1.700.000	90	21	2.000.000
40	21	1.900.000	91	31	3.000.000
41	9	1.200.000	92	30	2.500.000
42	33	2.800.000	93	31	2.500.000
43	25	2.000.000	94	25	3.000.000
44	10	1.100.000	95	25	2.400.000
45	9	1.400.000	96	31	3.500.000
46	13	1.500.000	97	34	3.500.000
47	28	2.500.000	98	22	1.700.000
48	21	2.500.000	99	31	3.100.000
49	26	2.900.000	Jumlah	2.309	229.200.000
50	31	3.000.000			
51	30	2.500.000			

Sumber: [2]

Y : Permintaan masyarakat terhadap air bersih pada Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Indragiri di Kota Tembilahan Kabupaten Indragiri Hilir (m^3).

X : Pendapatan masyarakat (Rp/bulan).

Dari data pada Tabel 1 tersebut digunakan untuk menentukan penaksir rasio yang efisien untuk menaksir variansi permintaan air bersih dengan menggunakan syarat penaksir paling efisien yang diperoleh sebelumnya. Secara umum dapat ditunjukkan dengan menghitung MSE dari masing-masing penaksir, terlebih dahulu ditentukan nilai seperti pada Tabel 2 yang digunakan untuk membandingkan MSE dari ketiga penaksir.

Tabel 2 : Nilai parameter yang diperlukan untuk membandingkan MSE dari penaksir.

\bar{Y}	23,32	f	0,303
\bar{X}	2.315.151,52	$\beta_{2(y)}$	2,17014
S_y^2	55,6287	$\beta_{2(x)}$	4,44386
S_x^2	447.421.150.277,72	h	1,88873

Selanjutnya substitusikan nilai pada Tabel 2 ke persamaan (7), (8) dan (9) , diperoleh

- \hat{S}_{y2}^2 lebih efisien dari \hat{S}_{y1}^2 jika $0,01511 < f < 1$,
- \hat{S}_{y3}^2 lebih efisien dari \hat{S}_{y1}^2 jika $0,01131 < f < 1$,
- \hat{S}_{y2}^2 lebih efisien dari \hat{S}_{y3}^2 jika $0,09083 < f < 1$.

Penaksir yang efisien dapat juga ditentukan dengan menghitung MSE dari ketiga penaksir. Berdasarkan nilai-nilai dari Tabel 2, diperoleh MSE dari ketiga penaksir.

Tabel 3: Nilai MSE untuk Ketiga Penaksir

No	Penaksir	MSE
1	\hat{S}_{y1}^2	355,483
2	\hat{S}_{y2}^2	280,856
3	\hat{S}_{y3}^2	316,856

Berdasarkan Tabel 3 dan kriteria penaksir yang relatif efisien pada persamaan (7), (8) dan (9) diperoleh nilai $MSE(\hat{S}_{y2}^2) < MSE(\hat{S}_{y3}^2) < MSE(\hat{S}_{y1}^2)$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan pada artikel ini, maka dapat disimpulkan bahwa penaksir rasio S_{y2}^2 yang paling efisien dibanding penaksir rasio S_{y3}^2 dan penaksir rasio S_{y1}^2 jika syarat efisiennya terpenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cochran, W. G. 1991. *Teknik Penarikan Sampel, Edisi ke Tiga*. Terj. dari *Sampling Techniques* oleh Rudiansyah & Erwin R. Osman. UI-Press, Jakarta.
- [2] Rais, B. 2011. *Faktor-faktor yang Mempengaruhi Permintaan Air Bersih pada Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirta Indragiri di Kota Tembilahan Kabupaten Indragiri Hilir*. Skripsi Fakultas Ekonomi Universitas Riau, Pekanbaru.
- [3] Sukhatme, P. V. 1957. *Sampling Theory of Surveys with Applications*. The Indian Council of Agricultural Research, New Delhi.
- [4] Tailor, R. & B. Sharma. 2012. Modified estimators of population variance in presence of auxiliary information, *Statistics in Transition*. 13 : 37-46.