SOLUSI POLINOMIAL PERSAMAAN INTEGRO-DIFERENSIAL FREDHOLM LINEAR DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Imam Taufik[1*], **Syamsudhuha**[2], **Zulkarnain**[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*imamtaufik732@gmail.com

ABSTRACT

This paper discusses how to obtain a polynomial solution of linear Fredhlom integro-differential equation with constant coefficients using a matrix method. The Linear Fredhlom integro-differential equation with constant coefficients and its initial-boundary conditions are tranformed into a matrix, resulting a system of linear equations. Polynomial solutions of linear Fredhlom integro-differential is obtained by solving the system of linear equations.

Keywords: *linear Fredhlom integro-differential equation, Taylor series, matrix, system of linear equations*

ABSTRAK

Artikel ini membahas solusi polinomial persamaan integro-diferensial Fredhlom linear dengan koefisien konstan yang kondisi awalnya diketahui, dengan menggunakan metode matriks. Persamaan integro-diferensial Fredholm linear beserta syarat awalnya diubah dalam bentuk matriks, sehingga menghasilkan suatu sistem persamaan linear. Solusi polinomial integro-diferensial Fredholm linear diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut.

Kata kunci: *persamaan integro-diferensial Fredholm, deret Taylor, matriks, sistem persamaan linear.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan integro-diferensial Fredholm linear muncul dalam berbagai bidang ilmu seperti pertumbuhan populasi [6, h. 272], perambatan gelombang [6, h. 293], reaktor nuklir [6, h. 301], dan viscoelastisitas [6, h. 310]. Salah satu bentuk umum persamaan integro-diferensial Fredholm linear adalah

$$\sum_{k=0}^{m} P_k y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt; \quad a \leq x, t \leq b, \tag{1}$$

dan nilai awal

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{ik}y^{(k)}(a)+b_{ik}y^{k}(b)+c_{ik}y^{(k)}(c)=\lambda_i; \quad i=0,1,2,...,m-1, \tag{2}$$

dengan $P_k \in \mathbb{R}, k=1,2,3,\cdots,m$, $g(x)$ dan $K(x,t)$ adalah fungsi yang terdefinisi pada interval $I=[a,b]$, dimana a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} dan λ_i adalah suatu bilangan konstan.

Pada tulisan ini persamaan (1) dengan syarat awal persamaan (2) diselesaikan dengan memisalkan solusi $y(x)$ berupa deret Taylor, dan mentransformasikannya kebentuk sistem persamaan linear sehingga diperoleh solusi polinomial persamaan (1). Pembahasan ini merupakan review dari artikel Kurt et.al.[4] yang berjudul *Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coeffisients.*

Untuk pembahasan ini dibagian dua, dibahas bagimana mentranformasikan persamaan integro-diferensial Fredholm linear dengan koefiseien konstan ke sistem persamaan linear dan teknik menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut sehingga diperoleh solusi persamaan (1). Pada bagian tiga diberikan dua contoh persamaan integro-diferensial Fredholm linear yang diselesaikan dengan menggunakan metode yang dipaparkan pada bagian dua.

2. SOLUSI POLINOMIAL PERSAMAAN INTEGRO-DIFERENSIAL FREDHOLM LINEAR DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

Misalkan $y(x)$ adalah solusi polinomal persamaan integro-diferensial Fredholm linear pada persamaan (1) dan diasumsikan $y(x)$ dapat diekspansi dengan deret Taylor yaitu

$$y(x)=\frac{d^0y(c)}{dx^0}\frac{(x-c)^0}{0!}+\frac{d^1y(c)}{dx^1}\frac{(x-c)}{1!}+\cdots+\frac{d^Ny(c)}{dx^N}\frac{(x-c)^N}{N!}. \tag{3}$$

Persamaan (3) dapat disederhanakan menjadi

$$y(x)=\sum_{i=0}^{N}\frac{d^iy(c)}{dx^i}\frac{(x-c)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{N}y^{(i)}(c)\frac{(x-c)^i}{i!}. \tag{4}$$

Persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk perkalian vektor

$$y(x)=\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ \frac{y^{(1)}(c)}{1!} \\ \frac{y^{(2)}(c)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{y^{(N)}(c)}{N!}\end{bmatrix}.$$

Definisikan

$$X(x)=[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N], \tag{5}$$

dan

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & \frac{y^{(1)}(c)}{1!} & \frac{y^{(2)}(c)}{2!} & \cdots & \frac{y^{(N)}(c)}{N!} \end{bmatrix}^T$$

sehingga $y(x)$ dapat dituliskan sebagai

$$y(x) = X(x)Y. \tag{6}$$

Turunan pertama untuk persamaan (5) adalah

$$X^{(1)}(x) = [0 \quad 1 \quad 2(x-c) \quad \cdots \quad N(x-c)^{N-1}],$$

yang dapat dituliskan sebagai hasil kali antara $X(x)$ dan suatu matrik $B_{n\times n}$ dimana

$$X^{(1)}(x) = X(x)B^T = \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N & 0 \end{bmatrix}.$$

Turunan ke k dari $X(x)$ adalah

$$\begin{aligned} X^{(k)}(x) &= X(x)(B^T)^{k-1}B^T \\ X^{(k)}(x) &= X(x)(B^T)^k, \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $k \in N$. Perhatikan kembali bentuk pada persamaan (6). Karena Y adalah konstanta, maka diperoleh

$$y^{(k)}(x) = X^{(k)}(x)Y, \tag{8}$$

dengan mensubstitusi persamaan (7) ke persamaan (8) diperoleh

$$y^{(k)}(x) = X(x)(B^T)^k Y. \tag{9}$$

Subsitusikan persamaan (9) ke dalam persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\sum_{i=0}^{m} P_i X(x)(B^T)^i Y = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt. \tag{10}$$

Selanjutnya nyatakan fungsi $K(x,t)$ sebagai ekspansi Taylor dua variabel disekitar $(x,t) = (c,c)$ sehingga diperoleh

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} k_{m,n}(x-c)^m(t-c)^n, \tag{11}$$

dengan

$$k_{m,n} = \frac{1}{m! \times n!} \frac{\partial^{m+n} K(c,c)}{\partial x^m \partial t^n}; \quad m,n = 0,1,2,\cdots,N. \tag{12}$$

Selanjutnya perhatikan persamaan (11) yang dapat ditulis dalam bentuk perkalian vektor menjadi

$$\begin{aligned} K(x,t) = &\begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} k_{0,0} & k_{0,1} & k_{0,2} & \cdots & k_{0,N} \\ k_{1,0} & k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,N} \\ k_{2,0} & k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N,0} & k_{N,1} & k_{N,2} & \cdots & k_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (t-c) \\ (t-c)^2 \\ \vdots \\ (t-c)^N \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fungsi $K(x,t)$ selanjutnya ditulis dalam bentuk matriks menjadi

$$K(x,t) = X(x)AX^T(t), \tag{13}$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= [k_{m,n}] \\ X(x) &= [1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N], \\ X(t) &= [1 \quad (t-c) \quad (t-c)^2 \quad \cdots \quad (t-c)^N]^T. \end{aligned}$$

Perhatikan kembali bentuk integral pada persamaan (1). Subsitusikan persamaan (13) ke (1) sehingga diperoleh

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = \int_a^b X(x)KX^T(t)X(t)Y\,dt$$

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = X(x)A\left(\int_a^b X^T(t)X(t)dt\right)Y. \tag{14}$$

Definisikan

$$Q = \int_a^b X^T(t)X(t)dt, \tag{15}$$

selanjutnya

$$X^T(t)X(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ (t-c) \\ (t-c)^2 \\ \vdots \\ (t-c)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (t-c) & (t-c)^2 & \cdots & (t-c)^N \end{bmatrix}$$

$$X^T(t)X(t) = \begin{bmatrix} 1 & (t-c) & (t-c)^2 & \cdots & (t-c)^N \\ (t-c) & (t-c)^2 & (t-c)^3 & \cdots & (t-c)^{N+1} \\ (t-c)^2 & (t-c)^3 & (t-c)^4 & \cdots & (t-c)^{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t-c)^N & (t-c)^{N+1} & (t-c)^{N+2} & \cdots & (t-c)^{2N} \end{bmatrix},$$

sehingga nilai Q pada persamaan(15) adalah

$$Q = \int_a^b X^T(t)X(t)dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} (b-c)-(a-c) & \frac{(b-c)^2-(a-c)^2}{2} & \frac{(b-c)^3-(a-c)^3}{3} & \cdots & \frac{(b-c)^{N+1}-(a-c)^{N+1}}{N+1} \\ \frac{(b-c)^2-(a-c)^2}{2} & \frac{(b-c)^3-(a-c)^3}{3} & \frac{(b-c)^4-(a-c)^4}{4} & \cdots & \frac{(b-c)^{N+2}-(a-c)^{N+2}}{N+2} \\ \frac{(b-c)^3-(a-c)^3}{3} & \frac{(b-c)^4-(a-c)^4}{4} & \frac{(b-c)^5-(a-c)^5}{5} & \cdots & \frac{(b-c)^{N+3}-(a-c)^{N+3}}{N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(b-c)^{N+1}-(a-c)^{N+1}}{N+1} & \frac{(b-c)^{N+2}-(a-c)^{N+2}}{N+2} & \frac{(b-c)^{N+3}-(a-c)^{N+3}}{N+3} & \cdots & \frac{(b-c)^{2N+1}-(a-c)^{2N+1}}{2N+1} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya Q dapat ditulis

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1,N+1} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2,N+2} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3,N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N+1,1} & q_{N+1,2} & q_{N+1,3} & \cdots & q_{N+1,N+1} \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_{i,j}], \tag{16}$$

dengan

$$q_{i,j} = \frac{(b-c)^{i+j-1} - (a-c)^{i+j-1}}{i+j-1} \qquad i,j = 1,2,\cdots,N+1. \tag{17}$$

Selanjutnya persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = X(x)AQY. \tag{18}$$

Perhatikan kembali persamaan (2) dan persamaan (9) maka didapatkan

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Big(a_{ik}X(a) + b_{ik}X(b) + c_{ik}X(c) \Big)(B^T)^k Y = \lambda_i, \tag{19}$$

dengan $i = 0,1,2,\cdots,m-1$.
Fungsi $g(x)$ didekati dengan ekspansi Taylor dimana

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{N} g^{(n)}(c)\frac{(x-c)}{n!} \\ &= g^{(0)}(c)\frac{(x-c)}{0!} + g^{(1)}(c)\frac{(x-c)}{1!} + \cdots + g^{(N)}(c)\frac{(x-c)^N}{N!} \\ g(x) &= g_0(c) + g^{(1)}(c)\frac{(x-c)}{1!} + \cdots + g^{(N)}(c)\frac{(x-c)^N}{N}. \end{aligned} \tag{20}$$

Persamaan (20) dapat ditulis dalam bentuk perkalian vektor menjadi

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ \frac{g^{(1)}(c)}{1!} \\ \frac{g^{(2)}(c)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{g^{(N)}(c)}{N!} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

dan

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & \frac{g^{(1)}(c)}{1!} & \frac{g^{(2)}(c)}{2!} & \cdots & \frac{g^{(N)}(c)}{N!} \end{bmatrix}^T.$$

Jadi dengan menggunakan persamaan (5) maka persamaan (21), dapat ditulis sebagai

$$g(x) = X(x)G. \tag{22}$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (18) dan (22) kepersamaan (1) diperoleh

$$\sum_{k=0}^{m} P_k X(x)(B^T)^k Y = X(x)G + \lambda X(x)AQY, \tag{23}$$

$$X(x)I\left(\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y\right) = X(x)I\Big(G + \lambda AQY\Big). \tag{24}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $(X(x)I)^{-1}$ sehingga persamaan (24) dapat ditulis

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y = G + \lambda AQY$$

$$\sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k Y - \lambda AQY = G$$

$$\sum_{k=0}^{m} \Big(P_k (B^T)^k - \lambda AQ\Big) Y = G. \tag{25}$$

Definisikan

$$W = \sum_{k=0}^{m} P_k (B^T)^k - \lambda AQ, \tag{26}$$

maka persamaan (25) menjadi

$$WY = G. \tag{27}$$

Selanjutnya syarat awal yang diberikan pada persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$U_i = \sum_{k=0}^{m-1} \Big(a_{ik} X(a) + b_{ik} X(b) + c_{ik} X(c) \Big) (B^T)^k, \tag{28}$$

sehingga persamaan (19) menjadi

$$UY = \lambda_i. \tag{29}$$

Bentuk matriks $\tilde{W}$ dengan mengganti m baris terakhir matriks W dengan matriks U. Kemudian bentuk juga matriks $\tilde{G}$ dengan mengganti m baris terakhir vektor G dengan vektor $\lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \cdots \lambda_{m-1}]^T$, sehingga diperoleh

$$\tilde{W} Y = \tilde{G}.$$

Jika rank $\tilde{W} = N + 1$, maka

$$Y = \tilde{W}^{-1} \tilde{G}.$$

Sehingga solusi dari persamaan (1) adalah

$$y(x) = X(x) Y.$$

3. CONTOH KOMPUTASI

Contoh 1

Perhatikan persamaan diferensial linear orde ke 8

$$y^{(8)}(x) - y(x) = -8e^x, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{30}$$

dengan syarat awal

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, & y^{(1)}(0) &= 0, & y^{(2)}(0) &= -1, \\ y^{(3)}(0) &= -2, & y^{(4)}(0) &= -3, & y^{(5)}(0) &= -4, \\ y^{(6)}(0) &= -5, & y^{(7)}(0) &= -6. \end{aligned}$$

Solusi $y(x)$ dihampiri dengan polinomial Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{8} y_n x^n; \quad y_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}.$$

Dari persamaan (30) diperoleh

$$N = 8, \quad c = 0, \quad P_0 = -1, \quad P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 0, \quad P_8 = 1,$$
$$g(x) = -8e^x, \quad \lambda = 0.$$

Berdasarkan persamaan (26) diperoleh

$$W = -I + (B^T)^8.$$

Kemudian dengan persamaan (21) diperoleh

$$G = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{90} & -\frac{1}{630} & -\frac{1}{5040} \end{bmatrix}^T.$$

Dari syarat awal pada persamaan (28) diperoleh

$$U_i = \sum_{k=0}^{m-1} \Big(a_{ik}X(a) + b_{ik}X(b) + c_{ik}X(c) \Big) (B^T)^k,$$

sehingga diperoleh $a_{ik} = 1$ dan $b_{ik} = c_{ik} = 0$ kemudian matriks nilai awal adalah

$$U_i = a_{ik}X(a)(B^T)^k, \quad i, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, m-1.$$

Selanjutnya, dari matriks W dan U diperoleh $\tilde{W}$ dan dari matriks G dan $[\lambda_i]$ diperoleh $\tilde{G}$, yaitu

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}^T,$$

sehingga

$$[\tilde{W} \mid \tilde{G}] = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40320 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5040 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

Selanjutnya perhatikann bahwa rank $(\tilde{W}) = 9$ sehingga $\tilde{W}$ punya invres.
Jadi

$$\begin{aligned} \tilde{W}Y &= \tilde{G} \\ Y &= \tilde{W}^{-1}\tilde{G}, \end{aligned}$$

sehingga

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{144} & -\frac{1}{840} & -\frac{1}{5760} \end{bmatrix}^T.$$

Solusi persamaan (30) adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= X(x)Y \\ y(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{840}x^7 - \frac{1}{5760}x^8. \end{aligned}$$

Contoh 2

Perhatikan persamaan integro-diferensial Fredhlom linear berikut

$$y(x) = (x+1)^2 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)dt. \tag{31}$$

Dari persamaan (31) diperoleh

$$P_0 = 1, \quad g(x) = (x+1)^2, \quad \lambda = 1, \quad K(x,t) = xt + x^2t^2.$$

Dengan menggunakan persamaan (26) diperoleh

$$W = (B^T)^0 - AQ,$$

dengan

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk menentukan ekspansi Taylor $K(x,t)$, digunakan persamaan (12), sehingga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan (17) diperoleh

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Kemudian dari persamaan (21) diperoleh

$$G = [1 \quad 2 \quad 1]^T$$

Solusi Y diperoleh dari persamaan (27), yaitu

$$
\begin{aligned}
WY &= G \\
Y &= (I - KQ)^{-1} G \\
Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{10}{9} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ \frac{25}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi, solusi persamaan integro-diferensial Fredhlom linear persamaan (31) adalah

$$
\begin{aligned}
y(x) &= X(x)Y \\
y(x) &= 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2.
\end{aligned}
$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H.1995. *Aljabar Linear Elementer, 5th Ed*, Terj. Dari *Elementary Linear Algebra, 5th Ed*, Oleh Pantur Silaban & Nyoman Susila I. Penerbit Erlangga, Jakarta.

[2] Burden, R. L. & J. D. Faires. 2001. *Numerical Analysis.* 9th *Ed.* Brooks Cole, New York .

[3] Jacob, B. 1990. *Linear Algebra*, W.H. Freeman and Company, New York.

[4] Kurt N., M. Sezer. 2008. Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients. *Journal of the Franklin Institute.* 345:839-850

[5] Lay, D. C. 2012. *Linear Algebra and Its Applications, 4th Ed.* Addison-Wesley, Boston.

[6] Laksmikhantham, V & M. R. M. Rao. 1995. *Theory of Integro-Differential Equations.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.

[7] Supranto, J. 1993. *Pengantar Matriks.* Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

[8] Wazwaz, A. M. 2011. *Linear and Nonlinear Integral Equations.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.