MENGHITUNG DETERMINAN MATRIKS $n \times n$ ($n \geq 3$) DENGAN MENGGUNAKAN METODE SALIHU

Andi Bahota[1*], Aziskhan[2], Musraini M.[2]

[1]Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

*andybahota@gmail.com

ABSTRACT

This article presents a new method to calculate $n \times n$ ($n \geq 3$) order determinants. This article is a review of Salihu's papers [Internationational Journal of Algebra, 6(19): 913-917, 2012]. Some examples are presented at the end of discussion.

Keywords: *determinant of matrix, Chio's condentation method, Dodgson's condentation method*

ABSTRAK

Artikel ini membahas metode Salihu untuk menghitung determinan matriks $n \times n$ ($n \geq 3$) . Artikel ini merupakan kajian ulang dari artikel Salihu [Internationational Journal of Algebra, 6(19): 913-917, 2012]. Beberapa contoh diberikan di akhir pembahasan.

Kata kunci : *determinan matriks, metode kondensasi Chio, metode kondensasi Dodgson*

1. PENDAHULUAN

Matriks adalah himpunan skalar yaitu bilangan riil atau kompleks yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang menurut baris dan kolom [2.h:65]. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstuktur pemamfaatannya misalnya dalam menjelaskan persamaan linear, transformasi koordinat, dan lainnya. Matriks seperti halnya variabel biasa dapat dilakukan operasi matematik, seperti operasi perkalian, operasi penjumlahan dan operasi pengurangan.
Matriks merupakan salah satu cara yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan-persoalan dalam mencari hubungan antar variabel-variabel, baik dalam bidang ilmu statistik, fisika, tekhnik sosial dan ekonomi.
Terdapat berbagai jenis matriks yaitu, matriks bujur sangkar, matriks nol, matriks diagonal dan lain sebagainya. Secara umum matriks mempunyai suatu ukuran yang disebut dengan orde. Orde adalah jumlah dari kolom dan baris suatu matriks, mulai dari matriks yang berode 1, orde 2, hingga matriks yang berorde n yang artinya matriks tersebut berukuran $m \times n$. Matriks yang jumlah baris sama dengan jumlah kolom dinamakan matriks bujur sangkar atau matriks persegi

Banyak hal yang bisa dihitung dari suatu matriks, diantaranya menghitung determinan matriks. Determinan dari suatu matriks A adalah semua hasil perkalian elementer yang bertanda A dan dinyatakan dengan $det\ A$ atau $|A|$.
Banyak metode penyelesaian determinan matriks. Metode-metode tersebut adalah metode Sarrus, metode Minor-Kofaktor, metode Chio, metode Dodgson dan metode eliminasi Gauss.
Dalam menghitung determinan sebuah matriks yang berukuran $n \times n$ $(n \geq 3)$ akan dibahas sebuah metode, yang dinamakan dengan metode Salihu. Metode Salihu didasarkan pada metode kondensasi Dodgson dan metode kondensasi Chio, namun prioritas metode Salihu dibandingkan dengan Dodgson- Chio dan metode minor adalah bahwa metode Salihu menurunkan orde dari determinan, dan metode Salihu juga secara otomatis mempengaruhi dalam mengurangi orde determinan pada orde ke-2.

2. DETERMINAN MATRIKS

Determinan merupakan nilai yang penting dalam perhitungan matriks bujur sangkar. Sebelum pembahasan lebih lanjut, perlu diketahui definisi-definisi yang merupakan hal-hal penting dalam menghitung determinan matriks.

Definisi 2.1 [2. h:41]

Sebuah permutasi dari himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut aturan tertentu “tanpa menghilangkan” atau “tanpa mengulangi” bilangan tersebut.

Definisi 2.2 [2. h:42]

Dalam permutasi, dikatakan terjadi sebuah inversi apabila sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan yang lebih kecil.

Definisi 2.3 [2. h:43]

Sebuah permutasi dinamakan permutasi genap jika banyaknya inversi dalam permutasi tersebut genap. Sebaliknya, sebuah permutasi dinamakan permutasi ganjil jika banyaknya inversi dalam permutasi tersebut ganjil.

Definisi 2.4 [2. h:44]

Sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari **A** adalah sebuah hasil perkalian elementer (atau bentuk $a_1, a_2, \cdots, a_n$) yang dikalikan dengan +1 jika permutasinya genap dan dikalikan dengan -1 jika permutasinya ganjil.

Definisi 2.5 [2. h:50]

Dalam matriks bujur sangkar elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots a_{nn}$ disebut diagonal utama.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 [2. h:63] Determinan Matriks

Determinan matriks **A** adalah selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks **A** dinotasikan dengan **det** (**A**) .

$$\mathbf{det}\ (\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{S_n} \varepsilon_{j_1\,,\, j_2, \ldots, j_n} a_{1 j_1} a_{2 j_2}, \ldots, a_{n j_n}$$

3. MENGHITUNG DETERMINAN MATRIKS $n \times n$ ($n \geq 3$) DENGAN MENGGUNAKAN METODE SALIHU

Dalam sub bab ini akan dibahas mengenai metode untuk menghitung determinan matriks orde $n \times n$ $(n \geq 3)$. Metode Salihu ditemukan oleh Armend Salihu. Metode Salihu dihasilkan berdasarkan pada metode Dodgson dan metode Chio. Sebelum pembahasan lebih lanjut, akan diperkenal beberapa istilah yang berkaitan dengan metode Salihu.

3.1 Determinan interior

Determinan interior adalah determinan yang berorde $(n-2) \times (n-2)$ dari sebuah matriks berorde $n \times n$ $(n \geq 3)$ yang diperoleh dengan cara menghapus baris pertama, menghapus kolom pertama, menghapus baris terakhir dan menghapus kolom terakhir.
Misalkan A adalah matriks yang berukuran 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

maka determinan interiornya

$$(|B|) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.2 Determinan Unik

Determinan unik adalah determinan yang berorde $(n-1)\times(n-1)$ dari sebuah matriks berorde $n\times n$ $(n \geq 3)$. Dalam metode Salihu, terdapat empat buah determinan unik, yaitu $|C|, |D|, |E|$ dan $|F|$ yang diperoleh dengan cara menghapus baris terakhir dengan kolom terakhir, menghapus baris pertama dengan kolom terakhir, menghapus baris pertama dengan kolom terakhir dan menghapus baris pertama dengan kolom pertama.

Misalkan A adalah matriks yang berukuran 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

maka determinan unik:

$$(|C|) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(|D|) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$(|E|) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$(|F|) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.1 Setiap determinan yang berorde $n\times n$ $(n > 2)$ dapat direduksi menjadi determinan yang berorde 2×2, dengan menghitung 4 buah determinan yang berorde $(n-1)\times(n-1)$ dan sebuah determinan yang berorde $(n-2)\times(n-2)$, dengan syarat $(n-2)\times(n-2) \neq 0$.

Bentuk umum dari metode Salihu untuk menghitung determinan matriks berorde $n\times n$ $(n \geq 3)$ adalah sebagai berikut:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix}, |B| \neq 0$$

dimana, $|B|$ adalah determinan interior yang berorde $(n-2)\times(n-2)$ sementara $|C|, |D|, |E|$ dan $|F|$ adalah determinan unik yang berorde $(n-1)\times(n-1)$.

Bukti:
Misalkan $|A|$ adalah matriks yang berorde 4×4, dan akan dibuktikan bahwa menghitung determinan dengan metode ini memiliki hasil yang sama jika mengunakan metode yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \cdot (A_1 - A_2)$$

$$A_1 - A_2 = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} -$$

$$-a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{3}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$

$$+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} +$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} +$$

$$-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42})$$

$$|A| = \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \cdot (A_1 - A_2)$$

$$= \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

$$\cdot(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} -$$

$$-a_{14}a_{21}a_{43}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} +$$

$$+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{41}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Maka terbukti bahwa menghitung determinan dengan metode ini memiliki hasil yang sama jika mengunakan metode yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

4. CONTOH

Misalkan A adalah matriks yang berukuran 5×5. Tentukanlah determinan matriks A

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesain

$$|A|=\frac{1}{|B|}\cdot\begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}\cdot\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -19 & -26 \end{vmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\left(-286-57\right)=\frac{-343}{7}=-49$$

4. KESIMPULAN

Dalam menghitung determinan matriks yang berorde $n\times n$ $(n\geq 3)$, metode Salihu merupakan opsi lain untuk menghitung determinan matriks orde $n\times n$ $(n\geq 3)$ selain metode yang sudah ada sebelumnya. Dan juga menghasilkan skema baru yang lebih mudah untuk dipahami sehingga lebih mudah dalam menghitung determinan matriks orde $n\times n$ $(n\geq 3)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Gunawan S.R. 2009. *Aljabar Linier Elementer Dasar. Edisi kesatu.* Rekayasa Sains, Semarang

[2]. Howard, A.1991. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi 6. Erlangga, Jakarta.

[3]. Ruminta. 2009. *Matriks. Edisi kesatu.* Andi, Bandung.

[4]. Salihu, A. 2012. New Method to Calculate Determinants of Matrix, by Reducing Determinants to 2^{nd} Order, *International Journal of Algebra.* 6(19): 913-917.