SUB *KS*-SEMIGRUP FUZZY DAN ASPEK-ASPEK YANG TERKAIT

Tessa Danty Fajriyah[1], Suryoto[2], Widowati[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto,SH. Tembalang Semarang 50275, Indonesia

ABSTRAK

Suatu *KS*-semigrup merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma yaitu *BCK*-aljabar, semigrup, dan bersifat distributif kiri dan distributif kanan. Dengan menerapkan teori himpunan fuzzy dan teori ideal pada proses fuzifikasi didapat *KS*-semigrup fuzzy. Teori himpunan fuzzy dapat diimplementasikan menjadi sub *KS*-semigrup fuzzy jika dibentuk himpunan bagian fuzzy $\mu : X \rightarrow [0,1]$ dan aspek-aspek pada teori ideal dibahas mengenai *KS*-ideal fuzzy dan *KS*-p-ideal fuzzy.

Kata kunci : *KS*-semigrup, himpunan fuzzy, teori ideal.

1. PENDAHULUAN

Dalam mempelajari struktur aljabar yang diketahui selama ini mungkin hanya grup dan ring saja, ternyata masih banyak stuktur aljabar yang lain diantaranya yaitu *BCK*-aljabar.

Pada Tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan *BCK*-aljabar [4]. Dari perkembangan umum *BCK*-aljabar terdapat teori ideal yang memiliki peranan penting. Seiiring berjalannya waktu dan perkembangan ilmu pengetahuan yang semakin pesat, pada Tahun 2006 Kyung Ho Kim memperkenalkan struktur aljabar baru yaitu *KS*-semigrup yang merupakan kombinasi dari *BCK*-aljabar dan semigrup [4]. Kemudian oleh D.R Prince Williams dan Shamshad Husain dibahas lanjut mengenai sub *KS*-semigrup fuzzy, *KS*-ideal fuzzy, dan *KS*-p-ideal fuzzy[8].

KS-semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. *KS*-semigrup telah dibahas dalam tugas akhir yang disusun oleh Rina Puji Anggraeny yang didalamnya mengkaji tentang Homomorfisma KS-semigrup dan Teorema Fundamental Isomorfisma pada KS-semigrup [6]. Dalam KS-semigrup, salah satu aksioma yang harus dipenuhi yaitu BCK-aljabar. Fenomena yang menarik dari KS-semigrup adalah KS-semigrup mempunyai konsep-konsep yang hampir sama dengan BCK-aljabar. Dalam BCK-aljabar terdapat konsep BCK-aljabar fuzzy yang diperkenalkan oleh O.G Xi, begitu pula dalam KS-semigrup juga terdapat konsep baru yang akan dikaji meliputi konsep sub KS-semigrup fuzzy, KS-ideal fuzzy, dan KS-p-ideal fuzzy[5]. Dengan menggunakan konsep - konsep tersebut maka dapat dilihat beberapa hasil KS-semigrup fuzzy yang sangat erat terkait dengan hasil BCK-aljabar fuzzy.

2. SUB KS-SEMIGRUP FUZZY

Definisi 2.1

Misalkan X KS-semigrup dan μ suatu himpunan fuzzy didalam X, μ disebut sub KS-semigrup dari X jika memenuhi aksioma – aksioma berikut :

(FSKS1) $\mu(x * y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$

(FSKS2) $\mu(x \cdot y)\ \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$

untuk semua $x, y \in X$

Contoh 2.1

Diberikan $X = \{0,1,2,3\}$ suatu KS-semigrup dan didefinisikan suatu operasi biner " $*$ " dan " $\cdot$ " sebagaimana diberikan oleh tabel berikut :

Tabel 2.1 Pendefinisian operasi " $*$ " pada X

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

Tabel 2.2 Pendefinisian operasi " $\cdot$ " pada X

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

Teorema 2.2

Misalkan X *KS*-semigrup dan μ suatu himpunan fuzzy di dalam X, μ disebut sub *KS*-semigrup fuzzy jika dan hanya jika untuk setiap $0 \leq t \leq 1$ himpunan tingkat atas μ_t merupakan himpunan kosong atau sub *KS*-semigrup dari X.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Misalkan μ sub *KS*-semigrup fuzzy dari X untuk setiap $0 \leq t \leq 1$. Jika $\mu(x) < t$ untuk setiap $x \in X$ maka $\mu_t = \emptyset$. Jika $\mu_t \neq \emptyset$ akan ditunjukan μ_t sub *KS*-semigrup maka $x, y \in \mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$. Karena $x, y \in X$ dan μ himpunan fuzzy dari X, maka berlaku :

$\mu(x * y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$ ...... (2.1)

$\mu(x \cdot y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$ ...... (2.2)

Selanjutnya karena $x, y \in \mu_t$, maka berlaku $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$

akibatnya $\min\ \{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ ...... (2.3)

Sehingga dari persamaan (3.1) , (3.2), dan (3.3) didapat :

1. $\mu(x * y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ akibatnya $x * y \in \mu_t$
2. $\mu(x \cdot y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ akibatnya $xy \in \mu_t$

Dari hasil di atas didapatkan bahwa μ_t adalah sub *KS*-semigrup dari X

($\Leftarrow$)

Misalkan μ_t sub KS-semigrup, maka $\mu_t = \emptyset$. Karena $\mu_t = \emptyset$ maka terdapat $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ dengan $0 \leq t \leq 1$, suatu sub *KS*-semigrup.

Akan dibuktikan μ adalah sub *KS*-semigrup fuzzy.

Selanjutnya misalkan t = min $\{\mu(x), \mu(y)\}$ ...... (2.4)

Diambil sebarang $x, y \in X$,

maka berlaku $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$ ...... (2.5)

Sehingga dari persamaan (3.4) dan (3.5) didapat :

1. $\mu(x * y) \geq t = \min \{\mu(x), \mu(y)\}$
2. $\mu(x \cdot y) \geq t = \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

Dari hasil di atas didapatkan bahwa μ adalah sub *KS*-semigrup fuzzy.

Teorema 2.3 [8]

Setiap sub *KS*-semigrup dari X dapat diimplementasikan sebagai tingkat sub *KS*-semigrup dari suatu sub *KS*-semigrup fuzzy.

Bukti :

Misalkan A adalah sub *KS*-semigrup fuzzy dari X dan μ menjadi himpunan bagian fuzzy dari X yang didefinisikan oleh

$$\mu(x) = \begin{cases} t & jika\ x \in A \\ 0 & jika\ x \notin A \end{cases}$$

dengan $0 < t < 1$, yaitu akan dibuktikan : $A \subseteq \mu_t$ dan $\mu_t \subseteq A$

i) Akan diperlihatkan $A \subseteq \mu_t$.

   Diambil sebarang $x \in A$, maka $\mu(x) = t$,

   Dalam hal ini $\mu(x) \geq t$ akibatnya $x \in \mu_t$.

   Hal ini berlaku untuk setiap $x \in A$, maka $A \subseteq \mu_t$

ii) Selanjutnya akan diperlihatkan $\mu_t \subseteq A$.

   Diambil sebarang $y \in \mu_t$, maka $\mu(y) \geq t$, Karena $0 < t < 1$, maka $t \neq 0$ dan $\mu(x) \neq 0$.

Akibatnya $\mu(y) = t$, ini memberikan $y \in A$

Hal ini berlaku untuk setiap $y \in A$, maka didapat $\mu_t \subseteq A$.

Dengan diperlihatkan bahwa $A \subseteq \mu_t$ dan $\mu_t \subseteq A$ maka $A = \mu_t$

Selanjutnya ambil sebarang $x, y \in X$, dalam hal ini terdapat tiga kemungkinan dari tingkat sub *KS*-semigrup dari suatu sub *KS*-semigrup fuzzy, yaitu :

1) Misalkan $x, y \in A$

Karena $x, y \in A$, maka $\mu(x) = \mu(y) = t$ dan berlaku,

$\mu(x * y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = t$ dan

$\mu(x \cdot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = t$,

Oleh karena itu $x * y \in \mu_t$ dan $xy \in \mu_t$

2) Misalkan $x, y \notin A$

Karena $x, y \notin A$, maka $\mu(x) = \mu(y) = 0$ dan berlaku,

$\mu(x * y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = 0$ dan

$\mu(x \cdot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = 0$,

Oleh karena itu $x * y \in \mu_t$ dan $xy \in \mu_t$

3) Misalkan $x \in A$ atau $y \in A$

Karena $x \in A$ atau $y \in A$, maka $\mu(x) = 0$ atau $\mu(y) = 0$ dan berlaku,

$\mu(x * y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = 0$ dan

$\mu(x \cdot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = 0$.

Oleh karena itu $x * y \in \mu_t$ dan $xy \in \mu_t$

3. TEORI IDEAL

Definisi 3.1 [8]

Misalkan X *KS*-semigrup dan μ suatu himpunan fuzzy dari X, μ disebut *KS*-ideal kiri fuzzy dari X jika memenuhi aksioma – aksioma berikut :

(KSI1) $\mu(0) \geq \mu(x)$

(KSI2) $\mu(x) \quad \geq \min\{\mu(x * y), \mu(y)\}$,

(KSI3) $\mu(x \cdot a) \geq \min\{\mu(x), \mu(a)\}$

untuk semua $x, y, a \in X$.

Suatu himpunan fuzzy μ disebut *KS*-ideal kanan fuzzy jika memenuhi aksioma (KS1), (KS2), dan aksioma berikut :

(KSI4) $\mu(a \cdot x) \geq \min\{\mu(x), \mu(a)\}$

Selanjutnya jika μ merupakan *KS*-ideal fuzzy kiri dan sekaligus merupakan *KS*-ideal kanan fuzzy dari X, maka μ dikatakan *KS*-ideal fuzzy dari X.

Contoh 3.1

Diberikan $X = \{0,1,2,3\}$ dengan operasi biner $" * "$ yang didefinisikan pada Tabel 2.1 dan operasi biner $" \cdot "$ yang didefinisikan pada Tabel 2.2, merupakan suatu *KS*-semigrup.

Definisi 3.2 [8]

Misalkan X *KS*-semigrup dan μ suatu himpunan fuzzy dari X, μ disebut *KS*-p-ideal kiri fuzzy jika memenuhi aksioma – aksioma berikut :

(KSP1) $\mu(0) \quad \geq \mu(x)$

(KSP2) $\mu(x * z) \geq \min\{\mu((x * y) * z), \mu(y * z)\}$,

(KSP3) $\mu(x \cdot a) \geq \min\{\mu(x), \mu(a)\}$

Untuk semua $x, y, z, a \in X$.

Suatu himpunan fuzzy μ disebut *KS*-p-ideal kanan fuzzy jika memenuhi aksioma (KSP1), (KSP2), dan aksioma berikut :

(KSP4) $\mu(a \cdot x) \geq \min\{\mu(x), \mu(a)\}$

Selanjutnya jika μ merupakan *KS*-p-ideal kiri fuzzy dan sekaligus merupakan *KS*-p-ideal kanan fuzzy dari X, maka μ dikatakan *KS*-p-ideal fuzzy dari X.

Teorema 3.3 [8]

Setiap *KS*-p-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X adalah *KS*-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X.

Bukti :

Diberikan μ adalah KS-p-ideal kiri fuzzy dari X, akan dibuktikan bahwa μ juga merupakan KS-ideal kiri fuzzy. Diambil sebarang $x, y \in X$, maka

$\mu(x) = \mu(x * 0)$	karena $x = x * 0$
$\geq \min\ \{\mu((x * y) * 0), \mu(y * 0)\}$	Aksioma (KSP2)
$= \min\ \{\mu(x * y), \mu(y)\}$	Karena $(x * y) * 0 = x * y$
	dan $y * 0 = y$

Dari hasil diatas didapatkan bahwa μ KS-ideal kiri fuzzy dari X.

Teorema 3.4 [8]

Jika μ adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X, maka himpunan tingkat tidak kosong μ_t juga merupakan KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X.

Bukti :

Misalkan μ KS-ideal kiri fuzzy dari X. Jika $x, y, a \in \mu_t$ maka $\mu(x) \geq t$, $\mu(y) \geq t$, dan $\mu(a) \geq t$.

i) Diambil sebarang $\in \mu_t$, maka terdapat $\mu(x) \geq t$. Dari tingkat himpunan tidak kosong μ_t terdapat $\mu_t(x) = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ maka berlaku $\mu(0) \geq \mu(x) \geq t$, oleh karena itu $\mu_t(0) \geq \mu_t(x)$.

ii) Diambil sebarang $x \in \mu_t$ maka terdapat $\mu(x) \geq t$, Karena untuk setiap $t = \min\ \{\mu(x * y), \mu(y)\}$ dan didapat $\mu(x) \geq t$, maka demikian sehingga $\mu(x) \geq t = \min\ \{\mu(x * y), \mu(y)\}$.

iii) Diambil sebarang $x, a \in \mu_t$ maka terdapat $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(a) \geq t$, Karena untuk setiap $t = \min\ \{\mu(x), \mu(a)\}$ dan didapat $\mu(x \cdot a) \geq t$, maka demikian sehingga $\mu(x \cdot a) \geq t = \min\ \{\mu(x), \mu(a)\}$

Oleh karena itu μ_t adalah KS-ideal kiri fuzzy dari X.

Definisi 3.5 [8]

Misalkan X KS-semigrup, λ dan μ merupakan himpunan bagian fuzzy didalam himpunan X. Hasil kali kartesius dari $\lambda \times \mu : X \times X \longrightarrow [0,1]$ didefinisikan bahwa $(\lambda \times \mu)(x, y) = \min\{\lambda(x), \mu(y)\}$ untuk semua $x, y \in X$.

Berikut akan diberikan contoh mengenai hasil kali kartesius dari himpunan fuzzy.

Contoh 3.2

Diberikan $X = \{0,1,2\}$ merupakan KS-semigrup. Untuk memperlihatkan hasil kali kartesius dari $\lambda \times \mu : X \times X \longrightarrow [0,1]$ akan diperlihatkan untuk setiap $x, y \in X$ didefinisikan bahwa $(\lambda \times \mu)(x, y) = \min\ \{\lambda(x), \mu(y)\}$. Diambil sebarang $x, y \in X$ dan dibentuk himpunan bagian fuzzy :

$$\lambda : X \to [0,1], \text{ dengan } \lambda(x) = \begin{cases} \lambda(0) = 0.7 \\ \lambda(1) = 0.4 \quad \text{untuk } x \in X \\ \lambda(2) = 0.4 \end{cases}$$

$$\mu : X \to [0,1], \text{ dengan } \mu(x) = \begin{cases} \mu(0) = 0.5 \\ \mu(1) = 0.5 \quad \text{untuk } x \in X \\ \mu(2) = 0.5 \end{cases}$$

Teorema 3.6 [8]

Misalkan X KS-semigrup, λ dan μ merupakan KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X. Kemudian $\lambda \times\ \mu$ juga merupakan KS-ideal fuzzy dari X.

Bukti :

Diberikan X KS-semigrup dan λ merupakan KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X. Akan ditunjukan bahwa $\lambda \times\ \mu$ merupakan KS-ideal fuzzy dari X.

(i) Diambil sebarang $(x, y)(0,0) \in X \times X$ maka berlaku,

$$\begin{aligned}(\lambda \times \mu)(0,0) &= \min\ \{\lambda(0), \mu(0)\} \geq \min\ \{\lambda(x), \mu(y)\} \\ &= (\lambda \times \mu)(x, y)\end{aligned}$$

(ii) Diambil sebarang $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ maka berlaku,

$$(\lambda \times \mu)(x_1, x_2) = \min\{\lambda(x_1), \mu(x_2)\} \geq \min\{\min\{\lambda(x_1 * y_1), \lambda(y_1)\},$$
$$\min\{\mu(x_2 * y_2), \mu(y_2)\}\}$$
$$= \min\{\min\{\lambda((x_1 * y_1), \mu(x_2 * y_2))\}, \min\{\lambda(y_1), \mu(y_2)\}$$
$$= \min\{(\lambda \times \mu)((x_1, x_2) * (y_1, y_2)), (\lambda \times \mu)(y_1, y_2)\}$$

(iii) Diambil sebarang $(x, y), (a_1, a_2) \in X \times X$ maka berlaku,

$$(\lambda \times \mu)(x, y)(a_1, a_2) = (\lambda \times \mu)(xa_1, ya_2)$$
$$= \min\{\lambda(xa_1), (ya_2)\} \geq \min\{\min\{\lambda(x), \lambda(xa_1)\},$$
$$\min\{\mu(y), \mu(a_2)\}\}$$
$$= \min\{\min\{\lambda(x), \lambda(y)\}, \min\{\mu(a_1), \mu(a_2)\}$$
$$= \min\{(\lambda \times \mu), (\lambda \times \mu)(a_1, a_2)\}$$

Teorema 3.7 [8]

Misalkan λ dan μ merupakan himpunan fuzzy dari X sehingga $\lambda \times \mu$ adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari $X \times X$, maka :

(i) Salah satu $\lambda(0) \geq \lambda(x)$ atau $\mu(0) \geq \mu(x)$, untuk semua $x \in X$

(ii) Jika $\lambda(0) \geq \lambda(x)$, maka $\mu(0) \geq \lambda(x)$ atau $\mu(0) \geq \mu(x)$, untuk semua $x \in X$

Jika $\mu(0) \geq \mu(x)$, maka $\lambda(0) \geq \lambda(x)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(x)$, untuk semua $x \in X$

Teorema 3.8 [8]

Misalkan X KS-semigrup, λ dan μ merupakan himpunan fuzzy dari X. Jika $\lambda \times \mu$ adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari $X \times X$, maka baik λ atau μ adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X.

Definisi 3.9 [8]

Misalkan A suatu himpunan fuzzy didalam S yang merupakan relasi fuzzy terkuat pada S maka relasi fuzzy pada A disebut μ_A diberikan relasi $\mu_A(x, y) = \min\{A(x), A(y)\}$

Berikut ini akan diberikan contoh dari relasi terkuat pada himpunan fuzzy.

Contoh 3.3

Diberikan $S = \{0,1,2,3\}$ merupakan KS-semigrup dan A suatu himpunan didalam S yang merupakan relazy fuzzy terkuat pada S. Diambil sebarang $x, y \in S$ dan dibentuk himpunan bagian fuzzy :

$$A : S \to [0,1], \text{ dengan } A(s) = \begin{cases} 0.7 & \text{untuk } s = 0 \\ & \qquad\qquad \text{untuk } s \in S \\ 0.4 & \text{untuk } s \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 3.10 [8]

Misalkan A adalah himpunan fuzzy didalam X dan μ_A merupakan relasi fuzzy terkuat pada X dan $xx = x$ untuk semua $x \in X$. Kemudian A adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X jika dan hanya jika μ_A adalah KS-ideal kanan (kiri) fuzzy dari $X \times X$.

Definisi 3.11 [8]

Diberikan $f : X \longrightarrow Y$ pemetaan dari KS-semigrup dan μ adalah himpunan fuzzy dari Y. Pemetaan μ^f adalah pra bayangan pada μ dibawah f jika $\mu^f = \mu((f(x))$ untuk semua $x \in X$.

Berikut ini akan diberikan contoh pemetaan dari himpunan fuzzy**.**

Contoh 3.4

Diberikan $A = \{0,1,2,3\}$ merupakan KS-semigrup. Dibentuk himpunan bagian fuzzy :

$$\mu : X \to [0,1], \text{ dengan } X(\mu) = \begin{cases} 0.7 & \text{untuk } \mu = 0 \\ & \qquad\qquad \text{untuk } x \in X \\ 0.4 & \text{untuk } \mu \neq 0 \end{cases}$$

Didefinisikan pemetaan $f : X \longrightarrow X$ dengan $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, dan $f(3) = 3$. Akan diperlihatkan bahwa $f : X \longrightarrow X$ merupakan homomorfisma KS-semigrup sebagaimana didefinisikan $\mu^f = \mu(\big(f(x)\big) = (\mu \circ f)(x)$ untuk semua $x \in X$ dimana μ^f pemetaan ke $[0,1]$.

Teorema 3.12

Diberikan $f : X \longrightarrow Y$ adalah homomorfisma *KS*-semigrup. Jika μ adalah *KS*-ideal kanan (kiri) fuzzy dari Y maka μ^f merupakan *KS*-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X.

Teorema 3.13

Diberikan $f : X \longrightarrow Y$ adalah epimorfisma. Jika μ^f merupakan *KS*-ideal kanan (kiri) fuzzy dari X maka μ adalah *KS*-ideal kanan (kiri) fuzzy dari Y

DAFTAR PUSTAKA

[1] Achmad Arifin, 2000, Aljabar, ITB, Bandung.

[2] Gilbert, Jimmie, and Linda Gilbert, 1984, *Element of Modern Algebra,* Lousiana Tech University, Boston.

[3] Howie, J.M., 1976, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academy Press, London.

[4] Kim, Kyung Ho, *On Structure of KS-semigroup*. International Mathematical Forum, 1 (2006), 67 – 76.

[5] O.G Xi, *Fuzzy BCK-algebras*, Math. Japan, 36 (1991), 935 – 942

[6] Rina Puji Anggraeny, 2011, *KS-semigroup* (SKRIPSI), UNDIP, F.MIPA UNDIP, Semarang.

[7] Villela, Jocelyn S.P. and Mila Cawi, 2009, *On KS-semigroup Homomorphism*, International Mathematical Forum, No.23 : 1129 – 1138.

[8] Williams, D. R. Prince and Husain Shamshad, *On Fuzzy KS-semigroup*. International Mathematical Forum, 2, 2007, no. 32, 1577 - 1588.

[9] Y. Imai and K. Iseki, *On Axiom systems of Propositional Calculi XIV,* Proc, Japan Acad., 42 (1966), 19 – 22.