

# MODEL PERSEBARAN KONSENTRASI *BIOLOGICAL OXYGEN DEMAND* 1-D PADA SISTEM PENGOLAHAN AIR LIMBAH KOLAM STABILISASI BERDASARKAN MEKANISME ADVEKSI – DIFUSI

Moh Anis Faozi<sup>1</sup>, Sunarsih<sup>2</sup>, Kartono<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup> Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

*mohanisfaozi@gmail.com*

**ABSTRACT.** Salah satu masalah yang sering muncul dalam kawasan pemukiman penduduk adalah pencemaran air limbah domestik. Permasalahan ini jika tidak diatasi dapat merusak peran, fungsi, dan nilai estetika lingkungan bagi kehidupan di sekitarnya. Oleh karena itu diperlukan suatu sistem pengolahan air limbah sebelum dibuang ke lingkungan. Salah satunya adalah IPAL Sewon Bantul dengan menggunakan kolam stabilisasi fakultatif. Konsentrasi BOD merupakan tolok ukur kualitas pengolahan air limbah yang dijadikan sebagai baku mutu pengolahan air limbah domestik sehingga diperlukan suatu informasi tentang karakteristik pola persebaran konsentrasi BOD dalam sistem pengolahannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengetahui pola persebaran konsentrasi polutan BOD adalah menggunakan model matematika berupa persamaan differensial parsial *1 (satu) – dimensi* dengan syarat batas *Dirichlet Non Homogen* yang dibangun dari model transport berdasarkan mekanisme adveksi-difusi. Model diselesaikan secara analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation variable*). Berdasarkan solusi model diketahui bahwa semakin jauh polutan tersebar maka konsentrasi BOD semakin menurun.

**Kata kunci :** air limbah domestik, kolam stabilisasi, bod, persebaran konsentrasi.

## I. PENDAHULUAN

Proses pengolahan air limbah dalam wilayah perkotaan saat ini adalah sebuah kebutuhan yang sangat diperlukan. Apalagi suatu wilayah dengan pusat aktivitas yang sangat tinggi. Semakin padat suatu penduduk dalam wilayah tertentu maka permasalahan akan semakin kompleks. Salah satunya adalah masalah pencemaran air limbah. Oleh karena itu, diperlukan suatu upaya pengolahan air limbah sebelum dibuang pada badan air di wilayah tersebut.

IPAL Sewon merupakan salah satu instansi pengolahan air limbah di wilayah Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY) yang bertugas mengolah air limbah menggunakan kolam stabilisasi di seluruh bagian Kota Yogyakarta, sebagian wilayah di Kabupaten Sleman, dan sebagian wilayah di Kabupaten Bantul. Sistem pengolahan IPAL Sewon menggunakan tolok ukur BOD (*Biological Oxygen Demand*) untuk mengetahui kualitas pengolahannya. BOD ini merupakan tolok ukur yang penting bagi pengendalian kualitas pengolahan air limbah yang

biasanya dijadikan sebagai baku mutu. Oleh karena itu diperlukan informasi tentang pola persebaran konsentrasi BOD dalam sistem pengolahan air limbah kolam stabilisasi.

Beragam penelitian tentang pengolahan BOD dalam kolam stabilisasi telah banyak berkembang. Pada tahun 2006 peneliti Karla Patricia Oleivera – Esquere bersama timnya mengembangkan model estimasi untuk bukti keakuratan prediksi BOD pada *inlet* dan *outlet* pada sungai kecil hasil olahan kolam aerasi [1]. Selain itu pada tahun 2008 Nila Yudhita mengembangkan model *adveksi-dispersi* persebaran BOD menggunakan software Qual2k [2]. Secara umum tujuan penelitian tentang BOD selama ini adalah untuk mengetahui proses pengolahan air limbah melalui mekanisme perubahan BOD, mengetahui prediksi kapan terjadinya bau, melakukan evaluasi kinerja IPAL berdasarkan hasil keluaran BOD, dan lain sebagainya [1].

Di sisi lain asumsi kehomogenan konsentrasi polutan dalam kolam fakultatif perlu diuji kembali. Hal ini karena terdapat sebuah dugaan bahwa konsentrasi polutan di setiap titik dalam kolam stabilisasi adalah berbeda. Oleh karena itu diperlukan kajian lebih tentang fenomena persebaran konsentrasi BOD pada kolam stabilisasi ini. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menjelaskan pola persebaran konsentrasi BOD adalah pemodelan matematika yang berupa model transport dalam suatu aliran terbuka berdasarkan mekanisme adveksi-dispersi. Melalui pendekatan model ini akan diketahui perilaku pola persebaran konsentrasi BOD dalam sistem pengolahan air limbah kolam stabilisasi.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematis tentang persebaran konsentrasi BOD dalam sistem pengolahan air limbah IPAL Sewon pada kolam Stabilisasi ini diselesaikan melalui beberapa tahapan yaitu proses observasi dan kajian literatur tentang sistem pengolahan air limbah menggunakan kolam stabilisasi tersebut. Selanjutnya penyusunan model berdasarkan fenomena yang terjadi dan penyelesaian model menggunakan solusi pendekatan analitik. Kemudian dikaji karakteristik solusi model yang diperoleh untuk mengetahui pola persebaran konsentrasi BOD dalam sistem pengolahan tersebut.

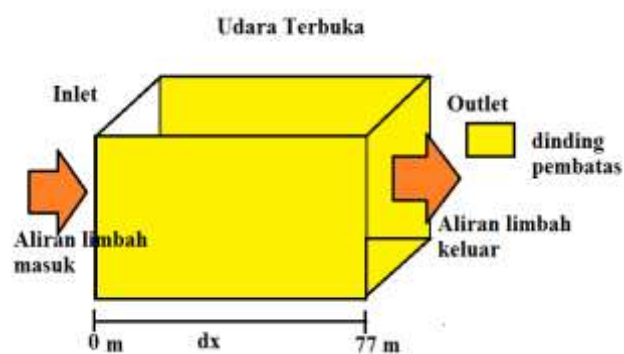
### 2.1 Gambaran Umum

IPAL Sewon merupakan instansi yang bertugas untuk mengelola air limbah yang terletak di Jalan Bantul KM 6, tepatnya di Dusun Cepit, Kelurahan Pendowoharjo, Kecamatan Sewon, Kabupaten Bantul, Propinsi DIY. Sistem IPAL ini menjangkau kurang lebih 1250 hektar daerah pelayanan atau sekitar 110.000 penduduk dengan 18.420

sambungan yang terdiri atas 17.330 sambungan rumah tangga dan 1.090 sambungan nonrumah tangga. Luas lahan IPAL Sewon ini adalah 6,7 hektar. Secara garis besar IPAL ini memiliki tiga kemanfaatan yakni perlindungan terhadap badan-badan air penerima dari pencemaran rumah tangga, peningkatan dan estetika lingkungan, serta pemanfaatan hasil IPAL berupa pupuk organik dari lumpur air limbah.

## 2.2 Fenomena Persebaran Konentrasi BOD dalam Kolam Stabilisasi

Gambaran tentang fenomena perubahan konsentrasi BOD dalam sistem pengolahan air limbah domestik kolam stabilisasi berdasarkan desain rancangan bangunannya terdapat dalam gambar berikut ini.



Gambar 3.4 Desain kolam fakultatif

Berdasarkan hasil pengamatan tersebut terdapat beberapa kondisi tentang fenomena konsentrasi BOD yang terjadi selama proses pengolahan yaitu sebagai berikut.

- Air limbah mengalir sepanjang kolam terbuka yaitu dari *inlet* menuju *outlet*
- Kecepatan aliran diperkirakan konstan
- Konsentrasi BOD di *Inlet* dan *Outlet* berbeda
- Sumber konsentrasi polutan berasal dari satu sumber yaitu bagian ujung kolam (*inlet*).

IPAL sewon mempunyai sebanyak 4 (empat) kolam stabilisasi yang idektik dengan debit masukan total rata-rata adalah 13061,20 m<sup>3</sup>/hari. Kecepatan aliran kolam diperkirakan konstan yaitu  $u$  m/hari. Kecepatan aliran dalam arah horizontal sepanjang kolam dirumuskan pada persamaan 2.1 [3].

$$u = \frac{Q}{B \cdot H} \quad (2.1)$$

dimana:  $u$  = kecepatan aliran dalam arah horizontal (m/hari)

$Q$  = debit rata-rata harian yang keluar dari inlet (m<sup>3</sup>/hari)

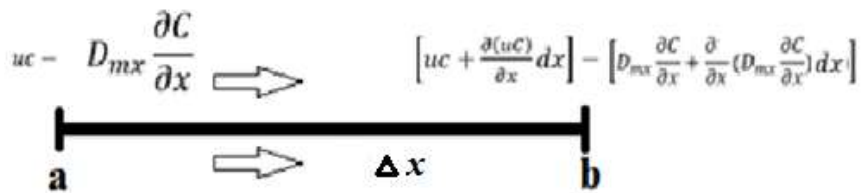
$B$  = lebar kolam (m)

$H$  = kedalaman kolam (m)

Oleh karena kolam stabilisasi di IPAL Sewon terdiri dari 4 (empat) bagian maka kecepatan aliran tiap kolam adalah  $u = \frac{Q}{4.B.H}$  m/hari. Beberapa kondisi kolam stabilisasi tersebut menjadi karakteristik khusus bagi proses penyusunan model tentang fenomena persebaran konsentrasi BOD dalam kolam stabilisasi.

### 2.3 Konstruksi Model

Ilustrasi fenomena perubahan konsentrasi BOD dalam bentuk fluks massa sepanjang kolam dari *inlet* menuju *outlet* terdapat dalam gambar berikut.



Gambar 3.5 Ilustrasi perubahan fluks massa BOD dari *inlet* menuju *outlet*

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut.

- Laju aliran limbah dari *inlet* menuju *outlet* adalah seragam sepanjang kolam (tetap).
- Tidak ada pengaruh lain bagi kecepatan aliran limbah melainkan hanya disebabkan oleh aliran debit rata-rata yang masuk dari *inlet*.
- Polutan BOD bergerak searah dengan aliran fluida limbah yaitu dalam arah horizontal  $-x$ .
- Sumber polutan BOD hanya berasal dari titik tengah sumber aliran yaitu bagian *inlet*.
- Bahan organik limbah tidak mengalami reaksi dengan material apapun saat proses pengolahan pada kolam stabilisasi.

Berdasarkan penjelasan tentang kondisi-kondisi dan asumsi-asumsi pada bagian sebelumnya maka perubahan konsentrasi dalam kolam fakultatif dari bagian *inlet* menuju *outlet* mengikuti hukum *mass balance* yaitu perubahan fluks massa bagian *inlet* (*Inflow*) dikurangi fluks massa bagian *outlet* (*Outflow*).

$$\text{Accumulation} = \text{Inflow} - \text{Outflow} \quad (2.2)$$

Besar fluks massa yang melalui *inlet* dan *outlet* berdasarkan mekanisme adveksi dan difusi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Inflow} = uc + \left(-D_{mx} \frac{\partial C}{\partial x}\right) = uc - D_{mx} \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\text{Outflow} = \left(uc + \frac{\partial(uC)}{\partial x} dx\right) - \left(D_{mx} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (D_{mx} \frac{\partial C}{\partial x}) dx\right)$$

sehingga perubahan konsentrasi BOD (*accumulation*) fungsi  $C(x,t)$  terhadap waktu  $t$  dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (D_{mx} \frac{\partial C}{\partial x}) - \frac{\partial (uC)}{\partial x} \quad (2.3)$$

Persamaan 2.3 merupakan model akhir yang dapat digunakan untuk menggambarkan persebaran konsentrasi BOD secara 1-dimensi berdasarkan mekanisme adveksi-difusi

Tabel 2.1 Laporan Kualitas Air Limbah Masuk Keluar IPAL Sewon Tahun 2014

No	Bulan	Volume Air Masuk (m3/hari)			Suhu (0C)		BOD (mg/l) Rata-rata	
		Minimal	Maksimal	Rata-rata	Inlet	Outlet	Inlet	Outlet
1	Januari	10104,00	22170,40	15762,90	28,97	30,39	75,28	16,17
2	Februari	9180,60	27285,00	15401,76	28,59	30,03	76,65	13,53
3	Maret	8752,60	20576,10	15287,79	28,90	30,20	105,15	17,30
4	April	8655,90	17965,30	12934,65	28,88	30,65	91,20	18,85
5	Mei	8506,50	17098,60	12436,93	29,26	30,62	125,41	20,53
6	Juni	4836,40	16595,70	11443,89	29,63	30,03	116,63	18,56
7	Juli	7104,80	13407,10	10485,33	28,95	30,29	146,13	20,06
8	Augustus	7768,20	13577,90	10736,36	29,39	30,58	150,63	18,79
Rata-Rata Total		8113,63	18584,51	13061,20	29,07	30,35	110,88	17,97

Berdasarkan model dan data yang diperoleh maka sebelum menyelesaikan model diperlukan konversi nilai dan satuan pada setiap variabel yang terlibat untuk memberikan penggambaran yang baik pada proses persebaran konsentrasi BOD 1-dimensi pada kolam stabilisasi. Berikut adalah model dengan syarat batas dan syarat awal yang baru.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_{mx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$C(0,t) = 0,00396 \text{ mg/m;}$$

$$C(77,t) = 0,00064 \text{ mg/m;} \quad C(x,0) = 0$$

dengan :  $u = 11,66178689 \cong 11,66 \text{ m/hari} \left( \frac{Q}{4.B.H} \right)$

$$D_{mx} = 0,02225 \text{ m}^2/\text{hari} [4]$$

## 2.4 Penyelesaian Model

Model akan diselesaikan secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel (*separation variable*) kemudian akan dipelajari karakteristik solusi model tersebut. Berikut adalah langkah-langkahnya [5].

Langkah pertama dimisalkan  $C(x,t)=G(x).T(t)$ . Oleh karena persamaan 2.4 merupakan suatu PDP dengan syarat batas *dirichlet non homogen* sehingga perlu dilakukan manipulasi aljabar untuk membuatnya menjadi PDP yang syarat batasnya adalah *dirichlet homogen*.

Langkah kedua adalah merubah syarat batas persamaan 2.4 menjadi syarat batas homogen. Dalam langkah ini dimisalkan  $C(x,t)=V(x,t)+W(x)$  dimana  $W(x)$  adalah fungsi konsentrasi yang hanya dipengaruhi oleh posisi saja yaitu  $x$  dengan  $W(x=0)=0,00396$  mg/m,  $W(x=77)=0,00064$  mg/m. Berdasarkan persamaan 3.6 akan diperoleh  $V(0,t)=0$  dan  $V(77,t)=0$ . Selanjutnya dengan mensubstitusikan  $C(x,t)=V(x,t)+W(x)$  ke dalam persamaan 2.4 sehingga dihasilkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(V+W)}{\partial t} &= D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(V+W)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(V+W)}{\partial x} \\ \frac{\partial(V)}{\partial t} &= D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(V)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(V)}{\partial x} + D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(W)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(W)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pada persamaan 2.5 merupakan PDP yang tidak linier juga tidak homogen sehingga perlu dimanipulasi aljabar agar dapat diselesaikan secara analitis. Dengan mengambil

$$D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(W)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(W)}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Akan *dicari solusi* pada persamaan 2.6 untuk mendapatkan syarat batas dan syarat awal yang baru. Diperoleh solusi umum  $W(x)$  adalah

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{u}{D_{mx}}x} \quad (2.7)$$

Dengan mensubstitusikan nilai batas  $W(x=0)=0,00396$  mg/m,  $W(x=77)=0,00064$  mg/m maka diperoleh solusi khusus

$$W(x) = 0,00396 \quad (2.8)$$

Berdasarkan solusi khusus  $W(x)$  maka diperoleh syarat awal yang baru yaitu sebagai berikut.

$$V(x,0) = -0,00396 \quad (2.9)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 2.6 ke persamaan 2.5 sehingga diperoleh persamaan 2.10.

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} = D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(V)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(V)}{\partial x} \quad (2.10)$$

Berdasarkan hasil pada persamaan 2.10, 2.9, dan syarat-syarat batas yang baru maka diperoleh bentuk PDP yang linier dan homogen beserta syarat awal dan syarat batasnya adalah sebagai berikut.

$$\text{Model : } \frac{\partial(V)}{\partial t} = D_{mx} \left[ \frac{\partial^2(V)}{\partial x^2} \right] - u \frac{\partial(V)}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\text{Syarat awal : } V(x,0) = -0,00396$$

$$\text{Syarat batas : } V(0,t)=V(l,t)=0$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode pemisahan variabel akan dicari solusi umum pada persamaan 2.11 yaitu dengan memisalkan  $V(x,t)=F(t)G(x)$ . Dengan mensubstitusikan  $V(x,t) = F(t)G(x)$  pada persamaan 2.11 dengan mengikuti aturan turunan yang bersesuaian sehingga diperoleh bentuk berikut.

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{D_{mx} G''(x) - u.G'(x)}{G(x)} = -n^2 \quad \text{dengan } -n^2 \in \mathbb{C} \quad (2.12)$$

Solusi  $V(x,t)$  dapat dicari dengan mencari penyelesaian  $F(t)$  dan  $G(x)$ . Dengan mensubstitusikan syarat batas pada setiap penyelesaian  $F(t)$  dan  $G(x)$  diperoleh solusi khusus yaitu

$$G(x) = e^{(262,02x)} \cdot \beta_1 \sin(0,041kx) \quad (2.13)$$

$$F(t) = C_3 e^{-\left(\frac{0,0195k^2 + 806080,75}{527,681}\right)t} \quad \text{dengan } k = 0,1,2,3, \dots \quad (2.14)$$

sehingga solusi umum PDP pada model persebaran konsentrasi BOD dalam kolam stabilisasi adalah  $V(x,t) = F(t) G(x)$ ,

$$V_k(x,t) = \gamma_k e^{-\left(\frac{0,0195k^2 + 806080,75}{527,681}\right)t} \cdot e^{(262,02x)} \cdot \sin(0,041kx), \quad k=1,2,3, \dots \quad (2.15)$$

Menurut prinsip superposisi solusi PDP maka diperoleh sebagai berikut

$$V_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x,t)$$

$$V_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot e^{-\left(\frac{0,0195k^2 + 806080,75}{527,681}\right)t} \cdot e^{(262,02x)} \cdot \sin(0,041kx) \quad (2.16)$$

Konstanta  $\gamma_k$  dapat ditentukan dengan menggunakan masalah nilai awal deret Fourier. Kondisi awal  $V(x,0) = -0,00396$  maka diperoleh  $\gamma_k$  adalah sebagai berikut.

$$\gamma_k = \frac{1}{(-3,93 \cdot 10^{-4} - 15351,56 \left(\frac{1}{k}\right)^2)} \left( 2,46 \cdot \frac{1}{k} e^{20175,54} \cos(3,23k) + \right.$$

$$\left. - (15351,56 \left(\frac{1}{k}\right)^2 e^{20175,54} \cdot \sin(3,23k) - 2,46 \cdot \frac{1}{k}) \right)$$

dengan  $k = 1, 2, 3, \dots \mathbb{N}$  (2.17)

Oleh karena model awal adalah fungsi  $C(x,t)$  maka solusi dinyatakan juga dalam fungsi  $C(x,t)$  yaitu sebagai berikut

$$C_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot e^{-\left(\frac{0,0195k^2 + 806080,75}{527,681}\right)t} \cdot e^{(262,02x)} \cdot \sin(0,041kx) + 0,00396 \quad (2.18)$$

## 2.5 Karakteristik Solusi Analitik Model

Berdasarkan solusi model diketahui bahwa nilai perubahan konsentrasi BOD dalam kolam dipengaruhi oleh adanya faktor *adveksi-difusi* yang secara matematis diekspresikan dalam bentuk deret fourier yaitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot e^{-\left(\frac{0,0195 k^2 + 806080,75}{527,681}\right)t} e^{(262,02x)} \cdot \sin(0,041kx)$$

Nilai konsentrasi BOD  $C(x,t)$  berbanding terbalik dengan waktu  $t$ , karena waktu mempunyai nilai yang berpangkat negatif sehingga dalam mekanisme *adveksi-difusi* waktu  $t$  berperan untuk menurunkan konsentrasi BOD saat waktu  $t$  semakin naik.

Pada suku 0,00396 sebagai solusi  $W(x)$  dalam kondisi batas *dirichlet non homogen* model turut menentukan konsentrasi BOD yaitu sebagai konsentrasi awal kolam sebelum mengalami proses pengolahan. Selanjutnya dengan mengikuti kenaikan harga  $t$  maka konsentrasi BOD menurut model akan berkurang dari kadar 0,00396 mg/m menjadi 0 mg/m.

### III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya yaitu tentang model matematis persebaran konsentrasi BOD 1-D pada sistem pengolahan air limbah kolam stabilisasi IPAL Sewon Yogyakarta beserta karakteristik solusinya maka dapat disimpulkan bahwa

1. Perubahan nilai konsentrasi BOD dipengaruhi oleh adanya mekanisme adveksi-difusi yaitu adveksi oleh aliran limbah, dan difusi oleh pengaruh molekuler polutan bahan organik dalam air limbah.
2. Semakin besar waktu  $t$  maka nilai konsentrasi  $C(x,t)$  pada titik-titik sepanjang kolam akan semakin kecil.
3. Semakin polutan tersebar maka konsentrasi BOD dalam kolam stabilisasi akan semakin mengecil.

### IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sunarsih. 2013. *Pemodelan Lingkungan Kualitas Air Limbah Domestik Pada Kolam Stabilisasi*. Fakultas. Program Pasca Sarjana Ilmu Lingkungan Universitas Diponegoro.
- [2] Nila, Yudhita. 2008. *Pengembangan Model Matematis Berdasarkan Mekanisme Adveksi-Dispersi*. Fakultas Teknik Universitas Indonesia.
- [3] Sholichin, Moh. *Pengolahan Air Limbah: Teknik Pengolahan Air Limbah*. Jurusan Teknik Pengairan, Universitas Brawijaya.
- [4] Koh, Hock Lye dan Poh Eng Lim. 1991. *Computing Dispersion Coefficient of Model Waste Stabilisation Ponds*. School of Chemical Science University Science Malaysia.



[5] Nagle, R. Kent, Edward B. Staff. 1989. *Fundamental Differential Equation*. Redwood City: The Benjamin/Cummings Publishing Company. Inc.