

MENAKSIR NILAI INTEGRAL BESAR

Mutya Pratami^{1*}, M.Natsir², Agusni²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*mutyapratami29@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses a new method to estimate the value of the integral of the form

$$\int_a^M \exp(f(x))dx,$$

where $M \rightarrow \infty$ and $x > 0$. The discussion includes the reduction method with First Approximation and Further Approximations. Furthermore, supported by a few example of the use of this new method.

Keywords: *First approximation, further approximations, integral estimation.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang metode baru untuk menaksir nilai integral tentu dengan bentuk

$$\int_a^M \exp(f(x))dx,$$

dimana $M \rightarrow \infty$ dan $x > 0$. Pembahasan meliputi penurunan metode dengan Aproksimasi awal dan Aproksimasi lanjut. Selanjutnya didukung dengan beberapa contoh penggunaan metode baru.

Kata kunci: *Aproksimasi awal, aproksimasi lanjut, estimasi integral.*

1. PENDAHULUAN

Secara umum dalam kalkulus, bentuk integral dari fungsi f pada $[a, b]$ sebagai berikut

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Berdasarkan kalkulus dijelaskan jika $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada $[a, b]$, maka integral (1) ada. Salah satu cara untuk menyelesaikan integral dengan menggunakan metode numerik adalah dengan mengaproksimasi integral (1) dengan cara mengganti

$f(x)$ dengan fungsi aproksimasi yang mana integralnya ada. Dua metode numerik yang paling sering digunakan untuk mengevaluasi integral (1) adalah aturan trapesium dan aturan Simpson.

Aturan trapesium menggunakan interpolasi polinomial linear untuk mengaproksimasi $f(x)$ pada $[a, b]$. Kemudian dengan mempartisi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval dan misalkan $h = (b - a)/n$ adalah panjang tiap subinterval, bentuk umum aturan trapesium adalah

$$T_n(f) = h \left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right],$$

dengan $x_j = a + jh$ adalah titik akhir dari subinterval, untuk $j = 0, 1, \dots, n$.

Sedangkan aturan Simpson menggunakan interpolasi polinomial kuadratik untuk mengaproksimasi $f(x)$ pada $[a, b]$. Misalkan n adalah bilangan bulat genap dan misalkan $h = (b - a)/n$ panjang tiap subinterval, bentuk umum aturan Simpson adalah

$$S_n(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

dengan $x_j = a + jh$, untuk $j = 0, 1, \dots, n$.

Aturan trapesium dan aturan Simpson memiliki keakuratan yang bergantung pada banyak subinterval n , semakin besar n maka semakin besar keakuratan dari kedua aturan tersebut. Aturan trapesium dan aturan Simpson tidak bisa digunakan pada integral besar seperti pada persamaan (1) apabila $b \rightarrow \infty$, maka untuk menyelesaikan integral besar perlu dicari teknis alternatif lain.

Pada artikel ini, di bagian dua dan tiga dibahas metode baru yaitu dengan Aproksimasi awal dan Aproksimasi lanjut untuk menemukan estimasi pada integral (1) yang merupakan review dari artikel Ira Rosenholtz [4], dengan judul "*Estimating Large Integrals: The Bigger They Are, The Harder They Fall*", kemudian dilanjutkan di bagian empat melakukan uji komputasi.

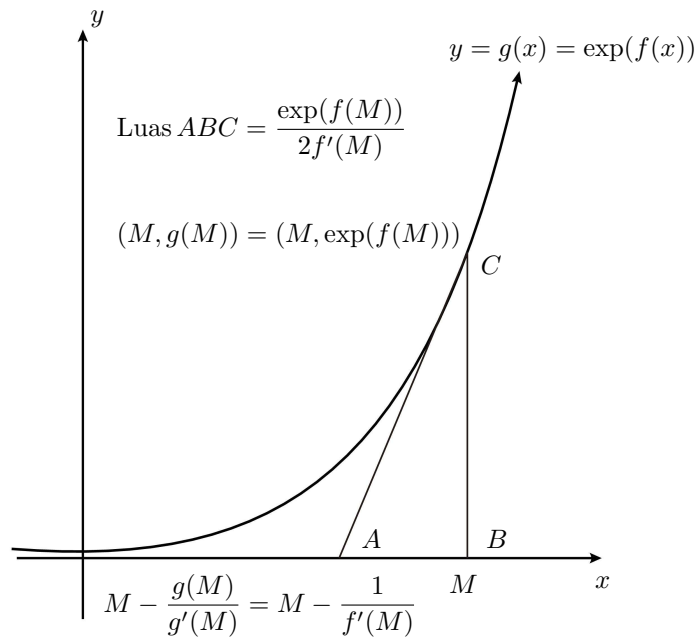
2. APROKSIMASI AWAL

Diketahui integral dengan bentuk

$$\int_a^M \exp(f(x))dx, \tag{2}$$

dimana integral akan menuju tak hingga jika $M \rightarrow \infty$ dan x adalah bilangan positif. Aproksimasi awal dalam menaksir nilai integral (2) adalah

$$\frac{\exp(f(M))}{f'(M)}. \tag{3}$$



Gambar 1: Ilustrasi Kelayakan Estimasi Awal

Untuk mengetahui bagaimana terbentuknya estimasi (3), gambarlah fungsi positif dimana fungsi tersebut fungsi naik, terbuka ke atas, dan menuju tak hingga jika $x \rightarrow \infty$. Misalkan fungsi tersebut adalah $g(x) = \exp(f(x))$. Kemudian pilih nilai besar M dan gunakan metode Newton (pada Gambar 1). Kemudian buat garis tangen menyinggung kurva pada titik $(M, g(M)) = (M, \exp(f(M)))$ dan memotong sumbu- x pada $M - g(M)/g'(M) = M - 1/f'(M)$. Perhatikan segitiga ABC yang dihasilkan mempunyai luas $(1/2) \exp(f(M))/f'(M)$, atau setengah dari estimasi awal (3). Hal itu berarti luas area di bawah kurva tetapi di atas garis tangen kira-kira telah diestimasi oleh estimasi awal (3) juga.

Teorema 1 (Aproksimasi Awal) [4] Misalkan $I(M) = \int_a^M \exp(f(x))dx$ dan $A(M) = \exp(f(M))/f'(M)$, dimana f merupakan fungsi kontinu terdiferensialkan dua kali pada $[a, \infty)$. Andaikan

$$f'(x) > 0 \text{ untuk } x \geq a, \text{ dan } \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 0.$$

Maka $\lim_{M \rightarrow \infty} A(M)/I(M) = 1$.

Untuk membuktikan Teorema 1 dilakukan dengan 2 cara :

Bukti 1. Andaikan jika $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = L$, maka $L = 0$.

Jika f' dan f'' positif, maka $g(x) = \frac{1}{f'(x)}$ positif. Dari Teorema Uji Naik/Turun [2, h. 135], karena $f'(x) > 0$ untuk semua $x \in [a, \infty)$, maka $f(x)$ adalah fungsi

naik. Selanjutnya fungsi turun jika $g'(x) = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2} < 0$. Karena $g(x) \geq 0$ maka $g(x)$ terbatas di bawah. Kemudian $g(x)$ mempunyai limit, katakan M , untuk $x \rightarrow \infty$. Kemudian

$$0 = \lim[g(x+1) - g(x)]. \quad (4)$$

Dari Teorema Nilai Rata-rata [h. 125-126]koko, terdapat c_x di antara x dan $x+1$, diperoleh

$$\begin{aligned} g(x+1) - g(x) &= g'(c_x)(1) \\ g(x+1) - g(x) &= \frac{-f''(c_x)}{[f'(c_x)]^2} \\ \lim[g(x+1) - g(x)] &= \lim \frac{-f''(c_x)}{[f'(c_x)]^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

dan jika $\lim \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = L$, maka $\lim \frac{-f''(c_x)}{[f'(c_x)]^2} = -L$. Maka dari persamaan (4) dan persamaan (5) diperoleh bahwa $-L = 0 = L$.

Karena $f(x)$ adalah fungsi naik, maka diperoleh bahwa $I(M)$ menuju ∞ . Kemudian

$$\begin{aligned} A'(M) &= ([f'(M)]^2 - f''(M)) \frac{\exp(f(M))}{[f'(M)]^2} \\ A'(M) &= \left(1 - \frac{f''(M)}{[f'(M)]^2}\right) \exp(f(M)), \end{aligned}$$

dan berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus [3, h. 382-385], $I'(M) = \exp(f(M))$. Kemudian diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{A'(M)}{I'(M)} &= \left(1 - \frac{f''(M)}{[f'(M)]^2}\right) \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'(M)}{I'(M)} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{f''(M)}{[f'(M)]^2}\right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} 1 - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{f''(M)}{[f'(M)]^2} \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'(M)}{I'(M)} &= 1. \end{aligned}$$

Berdasarkan Aturan L'Hôpital [2, h. 163], diperoleh bahwa

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A(M)}{I(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'(M)}{I'(M)} = 1. \quad (6)$$

Bukti 2. Berdasarkan integral dari persamaan 2 diperoleh sebagai berikut

$$I(M) = \int_a^M \exp(f(x)) dx = \int_a^M \left(\frac{1}{f'(x)} \right) (f'(x) \exp(f(x)) dx), \quad (7)$$

integralkan secara parsial persamaan 7, misalkan $dv = f'(x) \exp(f(x)) dx$ dan $u = 1/f'(x)$, diperoleh

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_a^M u dv \\ &= \frac{1}{f'(x)} \exp(f(x)) \Big|_a^M + \int_a^M \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right) \exp(f(x)) dx \\ &= \left(\frac{\exp(f(M))}{f'(M)} - \frac{\exp(f(a))}{f'(a)} \right) + \int_a^M \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right) \exp(f(x)) dx \\ I(M) &= (A(M) - A(a)) + \int_a^M \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right) \exp(f(x)) dx, \end{aligned}$$

dan diperoleh

$$I(M) - A(M) = -A(a) + \int_a^M \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right) \exp(f(x)) dx.$$

Andaikan ϵ adalah bilangan real positif. Pilih X_1 sedemikian hingga jika $x \geq X_1$ maka $\left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < \epsilon/2$. Kemudian pilih X_2 sedemikian hingga

$$\left| \frac{\left(\int_a^{X_1} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \exp(f(x)) dx \right) - A(a)}{I(X_2)} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kemudian jika $M \geq \max\{X_1, X_2\}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(M)}{I(M)} - 1 \right| &\leq \frac{\left| \left(\int_a^{X_1} \left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} - L \right) \exp(f(x)) dx \right) - A(a) \right|}{I(M)} \\ &\quad + \frac{\int_{X_1}^M \left| \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| \exp(f(x)) dx}{I(M)} \\ \left| \frac{A(M)}{I(M)} - 1 \right| &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A(M)}{I(M)} = 1$.

3. APROKSIMASI LANJUT

Aproksimasi lanjut untuk menaksir nilai integral (2) berawal dari Teorema 1 (Teorema Aproksimasi Awal). Misalkan $A_0(M) = \exp(f(M))$ dan $A_1(M) = A(M) = \frac{\exp(f(M))}{f'(M)}$. Dari persamaan (6) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A(M)}{I(M)} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'(M)}{I'(M)} = 1 \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A_1(M)}{\int_a^M \exp(f(x)) dx} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'(M)}{\exp(f(M))} = 1 \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A_1(M)}{\int_a^M \exp(f(x)) dx} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'_1(M)}{A_0(M)} = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Kemudian dari persamaan (8) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A_1(M)}{\int_a^M \exp(f(x)) dx} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A'_1(M)}{A_0(M)} \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M \exp(f(x)) dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A_1(M)A_0(M)}{A'_1(M)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Misalkan $A_2(M) = \frac{A_1(M)A_0(M)}{A'_1(M)}$, maka aproksimasi lanjut untuk menaksir nilai integral (2) adalah $A_2(M)$.

Jadi, secara umum dapat dinyatakan bahwa metode baru menggunakan aproksimasi lanjut untuk menaksir nilai integral (2) adalah

$$\left. \begin{aligned} A_0(M) &= \exp(f(M)) \\ A_1(M) &= \frac{A_0(M)}{f'(M)} \\ &\vdots \\ A_{n+1}(M) &= \frac{A_n(M)A_0(M)}{A'_n(M)}. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

4. KOMPUTASI NUMERIK

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi estimasi dari $\int_0^{10^N} \exp(x^2)dx$ dan $\int_0^M \exp(\exp(x))dx$ dalam hal jumlah perhitungan nilai fungsi dengan menggunakan barisan estimasi dari metoda baru.

Tabel 1: Estimasi dari $\int_0^{10^N} \exp(x^2)dx$

$N = 1$	A	$1.34405857091 \times 10^{42}$
	B	$1.35081263408 \times 10^{42}$
	C	$1.35088085866 \times 10^{42}$
$N = 2$	A	$4.40340911283 \times 10^{4340}$
	B	$4.40362929430 \times 10^{4340}$
	C	$4.40362931632 \times 10^{4340}$
$N = 3$	A	$1.51660769840 \times 10^{434291}$
	B	$1.51660845671 \times 10^{434291}$
	C	$1.51660845671 \times 10^{434291}$
$N = 4$	A	$7.74988373324 \times 10^{43429443}$
	B	$7.74988377199 \times 10^{43429443}$
	C	$7.74988377199 \times 10^{43429443}$

Tabel 1 merupakan nilai estimasi yang diperoleh dari persamaan (10) dengan menggunakan Maple 13. Dari persamaan (10) diperoleh sebagai berikut

$$M = 10^N,$$

$$A = A_1(M) = \frac{\exp(M^2) \exp(M^2)}{(2M) \exp(M^2)},$$

$$B = A_2(M) = \frac{M \exp(M^2)}{2M^2 - 1},$$

$$C = A_3(M) = \frac{M(2M^2 - 1) \exp(M^2)}{4M^4 - 4M^2 - 1}.$$

Dapat dilihat bahwa dengan menggunakan metode baru, jumlah perhitungan nilai fungsi menjadi lebih singkat. Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai estimasi untuk $N = 1, 2, 3$ dan 4 adalah $1.35088085866 \times 10^{42}$, $4.40362931632 \times 10^{4340}$, $1.51660845671 \times 10^{434291}$, dan $7.74988377199 \times 10^{43429443}$ berturut-turut. Sedangkan untuk $N \geq 5$ Maple 13 tidak dapat menunjukkan hasil estimasi.

Tabel 2: Estimasi dari $\int_0^M \exp(\exp(x))dx$

$M = 10$	A	$4.26192395368 \times 10^{9561}$
	B	$4.26211745351 \times 10^{9561}$
	C	$4.26211746230 \times 10^{9561}$
$M = 20$	A	$3.10523993293 \times 10^{210704558}$
	B	$3.10523993933 \times 10^{210704558}$
	C	$3.10523993933 \times 10^{210704558}$

Tabel 2 merupakan nilai estimasi yang diperoleh dari persamaan (10) dengan menggunakan Maple 13. Dari persamaan (10) diperoleh sebagai berikut

$$M = 10^N,$$

$$A = A_1(M) = \frac{\exp(\exp(M)) \exp(\exp(M))}{\exp(\exp(M)) + (M)},$$

$$B = A_2(M) = \frac{\exp(\exp(M))}{\exp(M) - 1},$$

$$C = A_3(M) = \frac{(\exp(M) - 1) \exp(\exp(M))}{\exp(M)(\exp(M) - 2)}.$$

Dapat dilihat bahwa dengan menggunakan metode baru, jumlah perhitungan nilai fungsi menjadi lebih singkat. Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai estimasi untuk $M = 10$ dan 20 adalah $4.26211746230 \times 10^{9561}$ dan $3.10523993933 \times 10^{210704558}$ berturut-turut. Sedangkan untuk $M > 20$ Maple 13 tidak dapat menunjukkan hasil estimasi. Dari hasil komputasi numerik, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan metode baru dapat menaksir nilai estimasi dari integral besar yang fungsinya eksponensial dengan jumlah perhitungan nilai fungsi yang cukup kecil dibandingkan dengan aturan trapesium dan Simpson, meskipun hasil estimasi nya mendekati hasil dari aturan trapesium dan Simpson.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Atkinson, K. E. 1992. *Elementary Numerical Analysis, Second Edition*. John Wiley & Son, Inc., New York.
- [2] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Erlangga, Jakarta.
- [3] Stewart, J. 1998. *Kalkulus, Edisi Keempat: Jilid 1. Terj. dari Calculus, Fourth Edition*, oleh Susila, I.N. & Gunawan, H. Penerbit Erlangga, Jakarta.

- [4] Rosenholtz, I. 2001. Estimating Large Integrals: The Bigger They Are, The Harder They Fall. *The College Mathematics Journal*, **32** (5): 322-329.